一种移除所有皇冠的扩展 NT 算法*)

常 乐 王建新 陈建二
(中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083)

摘 要 皇冠分解和NT算法长久以来被认V_1为是在参数化点覆盖的求核问题中有着广泛应用的两种相互独立的方法。NT算法将给定的图分成V_0,V_1和$V_{1/2}$三部分,将V_0和V_1移除从而完成图的分解。而皇冠分解则是找到尽可能多的皇冠结构,删除这些皇冠以降低图规模。最近的研究结果表明NT算法和皇冠分解存在很强的内在联系:NT算法中的V_0,V_1部分正好构成一个皇冠结构。本文进一步研究了皇冠分解和NT算法的内在联系,提出了严格皇冠和非严格皇冠的概念,提出了一般图中存在皇冠的判定定理,证明了NT算法可以移除一般图中存在的所有严格皇冠。论文还提出了一种扩展NT算法,能够移除图中的所有严格和非严格皇冠,即证明了用扩展NT算法处理过的图中将不会存在任何皇冠结构。

关键词 点覆盖,参数计算,核心化算法,皇冠分解,NT算法

An Expanded NT Algorithms Removing All Crowns

CHANG Le WANG Jian-Xin CHEN Jian-Er
(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083)

Abstract Crown reduction and NT algorithm had been thought to be two different approaches of great use in kernelization of the parameterized Vertex Cover problem. NT algorithm divides a given graph into three parts called V_0, V_1 and $V_{1/2}$ removes V_0 and V_1 from the graph to reduce it. While the idea of Crown reduction is to find crowns as much as possible to reduce the graph. The latest result shows that there exits strong connections between the two methods. It is proved that V_0 and V_1 in NT algorithm actually form a Crown. This paper focuses on further study of the relationships between Crown reduction and NT algorithm on general graphs, brings forward new definitions as proper and non-proper crowns and a new theorem determining whether a graph is crown-free, and proves that by applying NT algorithm all proper crowns can be removed from a given graph. Moreover, an expanded NT algorithm is proposed in order to remove both proper and non-proper crowns, thusproves that the graph after applying the expanded NT algorithm is crown-free.

Keywords Vertex cover, Parameterized computation, Kernelization algorithms, Crown reduction, NT algorithm

1 引言

作为经典的NP难问题之一,点覆盖问题由于在生物计算等诸多领域存在着重要的应用而在近年来成为研究热点。由于所有的NP难问题都无法被证明是在多项式可解的[1],而一般指数时间复杂度的算法在现有的计算机条件下几乎无法解决,因此,怎样改进NP难问题算法的时间复杂度以增强其实用程度,成为理论计算机界研究的热门问题之一[2]。

人们发现在实际的应用中,有很多NP问题的某些参数往往仅在小范围变化,充分利用此小参数的特点可以开发一些在实际应用中有着较高性能的算法。众多研究关注于此并逐渐发展出了一套参数计算理论。如对于点覆盖问题,其参数化问题即给定一个图$G(V,E)$和参数k,$|G|=n$(即问题规模),求G中是否存在点覆盖C(即图G的一个点子集,对于图G中的任一条边(v,w),v和w至少有一个点在集合C中)且C中的元素不多于k个。在实际的应用中,k的取值往往是在10~50之间这样比较小的数[14]。

在参数问题的求解中,核心化(kernelization)技术发挥着重要的作用。核心化方法的基本思想是在付出一个可以接受的代价的前提下,将问题转化成为另一个问题,降低问题的规模,即得到问题的小一些的核(kernel)。如果对于问题的核(kernel)能够给出解决方案,那么对于原问题我们就得到了解决方案,即转化为核的代价加上解决核的代价就是解决原问题的代价。可见,在核心化过程中,核的大小有着重要意义,我们总是希望核越小越好,这样会大大降低最终解决问题所用的时间。

参数化的点覆盖问题从1993年Buss和Goldsmith[3]首次提出复杂度为$O(kn+2^k k^{2k+2})$的算法以来,结果也经过了不断改进[4~8]。目前最好的算法是由Chen[8]给出的时间复杂度为$O(1.285^k+kn)$的算法。而这些算法往往都是先将参数化点覆盖问题核心化到一个更小的核上,然后再在核上采用分支限界等技术求解点覆盖。

参数化点覆盖的核心化方法有很多,典型的有高度点规约、线性规划、网络流规约、NT分解和皇冠分解[9]。

高度点规约的思想是将度数大于k的点直接加入到点覆盖中,做完所有预处理后,核的大小上界是$\frac{k^2}{3}+k$[9],下界则要依赖于高度点的个数。

*)国家自然科学基金重点项目:生物信息学中的相关组合理论和算法研究(60433020)。**常 乐** 硕士研究生,主要研究领域为参数计算、计算机理论;**王建新** 博士,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机算法、网络优化理论、生物信息学;**陈建二** 博士,长江学者特聘教授,主要研究领域为生物信息学、计算机理论、计算复杂性及优化理论。

线性规划和网络流规约都是对 NT 算法的具体实现办法，网络流规约比线性规划在运行速度上要更快一些。

Chen[8]证明了利用 NT 算法可以得到一个 2k 的线性核。即将问题规模从 n 降到了 $2k$，由于 k 本身很小，$2k$ 也可以认为是一个很小的数。

皇冠分解的基本思想是找到一些容易识别和处理的特殊结构即皇冠，删除这些皇冠以降低图规模，且可以重复进行这类查找和删除，直到图中不再有任何皇冠为止。Faisal[9]等证明皇冠分解的效果可以做到 $3k$，这个 $3k$ 表示的是上界，实际运行中的结果要依赖于皇冠的数目。在皇冠数目比较多的时候，皇冠分解将带来一个很好的核心化效果。但是，如何来判断并找到一个皇冠也是一个问题[10]。他们认为只有在下列情况下找到一个皇冠才不是 NP 完全的：①图中没有孤立的点。②图中存在一个点覆盖，其大小不小于 $|G|/2$。假设找到一个皇冠不是 NP 难的，那么这个问题的核也可以降到 $2k$。

Chlebik 和 Chlebikova[12]深入研究了皇冠分解和 NT 分解之间的联系，证明了 NT 算法（如图 1）中的 V_0，V_1 正好构成一个皇冠结构，且找到所有的皇冠也是可以在多项式内完成的。从而得到这样的结论：NT 分解也是一种皇冠分解，皇冠分解和 NT 分解的问题核都是 $2k$。

但是，Chlebik 和 Chlebikova 并没有说明 NT 分解移除了这样一个皇冠后图中是否还存在其他皇冠，或者 NT 分解所移除的皇冠具有怎样的性质。

本文考虑的是这样一个思想：由于 NT 算法有很好的可操作性，而皇冠分解对于皇冠结构较多的图的规模的降低往往在实际中能有很好的效果。是否能通过使用 NT 算法或者经过改进后的 NT 算法来完成皇冠分解的工作？即证明 NT 或者经过改进后的 NT 算法能够移除图中所有的皇冠。

本文首先研究了皇冠分解和 NT 算法之间的内在联系，探讨了皇冠分解和 NT 算法的作用域。对图 1 中定义的 B_G，本文证明连通图 G 中存在皇冠，当且仅当 B_G 不是基本图。这将作为连通图上存在皇冠的充分必要判定定理。本文还将此定理推广到了一般图上。另外，本文证明若 G 是一个连通图且 B_G 是基本图，则 NT 算法同样无法降低图的规模。从而得出这样的结论：NT 算法和皇冠分解对于 G 是一个连通图且 B_G 是基本图的情况都无法降低图的规模。

接下来我们证明了 NT 算法可以移除图中存在的所有严格皇冠。还提出了一种扩展 NT 算法，能够移除图中的所有严格和非严格皇冠，从而完全覆盖皇冠分解的结果。也就是说，我们能够通过使用扩展 NT 算法来完成皇冠分解要做的工作，任何一个做完扩展 NT 算法的图将不存在皇冠。

2 基本概念

我们将皇冠分为严格皇冠和非严格皇冠两种类型，其具体定义描述如下：

定义 2.1 给定图 G，一个皇冠是 G 的一个子图 $C(I,S)$，其中 I 是一个独立集，S 是 I 在 G 中的所有邻居节点的集合，$|I|\geq|S|$，且 I 和 S 之间存在一个匹配 M 浸润 S，即 S 中的所有节点都在匹配 M 中。对于 $|I|>|S|$ 的情况，我们称为严格皇冠。对于 $|I|=|S|$ 的情况，我们称为非严格皇冠。对于没有皇冠的图，称其为 crown-free 的。

为方便起见，有时 $C(I,S)$ 也可以简写作 (I,C)。

Fellows 等人[9]证明，对于任何皇冠，S 中的点集一定是图 $S\cup I$ 的最小点覆盖。因此，对点覆盖问题而言，皇冠分解实际上是尽可能多地找到这样的 $S\cup I$，然后认为 S 一定在图的最小点覆盖内。把 S 加到图的点覆盖中，I 加到图的独立集中，然后删除 $S\cup I$ 中的点及其相关边，从而完成一次皇冠分解，降低图的规模。

接下来回顾基本图的定义。基本图将是下一节中研究的重点。若一个二分图 $B(L,R)$ 只有两个最小点覆盖是 L 或 R，则称此图为基本图。显然，若 B 是一个基本图，则 B 是一个连通图，且 $|L|=|R|$。

NT 分解于 1975 年由 Nemhauser 和 Trotter[13]提出，在参数计算领域一直有着广泛应用，图 1 是 NT 分解的算法描述。

算法 NT 算法

输入：图 G 和整数 k

输出：图 G 的最小点覆盖的点子集 V_1 和问题核 $V_{1/2}$

1. 对 G 构造二分图 B_G 如下：B_G 的左集和右集都是 G 中的点的复制，对于一个点 v，v^L 和 v^R 分别代表它在 B_G 中的左集和右集中相应的点。对于 G 中的任意一条边 (v,w)，向 B_G 中添加一条边 (v^L,w^R)。
2. 找到 B_G 的一个最小点覆盖 C_B。
3. 令集合
$V_1=\{v\mid v\in V(G),v^L\in C_B,v^R\in C_B\}$，
$V_0=\{v\mid v\in V(G),v^L\notin C_B,v^R\notin C_B\}$，
$V_{1/2}=V(G)-V_1-V_0$
4. 输出 V_1 和 $V_{1/2}$

图 1 NT 算法

如图 1 所示，NT 算法中的三个集合有如下性质：V_0 是的一个独立集，$V_{1/2}$ 的最小点覆盖 $+V_1$ 将一定构成原图 G 的一个最小点覆盖，且 $G(V_{1/2})$ 中包含一个大小至少为 $|V_{1/2}|/2$ 的最小点覆盖。显然，NT 分解的思想就是将 V_1 中的点归入到点覆盖，V_0 中的点归入到独立集中，然后将问题转化为求 $V_{1/2}$ 的最小点覆盖，即相当于从图 G 中移除了 V_0 和 V_1 中的点及其相关边，降低图 G 的规模。另外，根据 Chlebik 和 Chlebikova[12]的证明，V_0 和 V_1 将构成一个皇冠，V_0 相当于 $C(I,S)$ 中的 I，V_1 相当于 $C(I,S)$ 中的 S。

在下一节中，我们将重点探讨 NT 分解与皇冠分解的内在联系和作用域。我们将给出连通图上存在皇冠的充分必要判定条件以及在一般图上的推广及证明。

3 NT 算法与皇冠分解的作用域

本节中，我们将重点关注 NT 分解与皇冠分解的作用域，即 NT 分解与皇冠分解对满足何种情况的图会失效。

首先，基于图的对称性，我们提出下列定义，这将有助于我们充分利用 B_G 是一个左右对称结构的图这一重要特点。

定义 3.1 给定一个对称二分图 B，如果 u 和 u' 在图中是对称的（即 u 和 u' 处于二分图两边的同构位置），则称 u 是 u' 的对称点，记作 $dual(u')=u$。依对称性，$dual(u)=u'$。

定义 3.2 给定一个对称二分图 B，对其中一个子图 B'，由点集 $\{dual(v)\mid v\in B'\}$ 引出的子图 B'' 称为 B' 的对称子图，记作 $dual(B')=B''$，同样 $dual(B'')=B'$。

引理 3.1 若 B_G 非连通图，则连通图 G 是一个二分图。

证明：假设 B_G 非连通图，而 G 是连通的，则 B_G 必为两个

分离部分的并集。这是因为G中的每一个点u，对于某个点v都是可达的，即存在一条路径自u出发最终能够到达v点。假设从某点u到点v的路径上有奇数条边，则由构造规则，在B_G中，u^L可由v^R到达。同样，如果从某点u到点v的路径上有偶数条边，则由构造规则，在B_G中，u^L可由v^L到达。可见，对B_G的左集中任意的点u^L，可以从v^R或v^L到达。即左集被分为两个相互不可达的点集，而右集也同样如此，即整个图存在两个分离部分。假设这两个部分为B_1和B_2，则由对称性可知，B_1和B_2的对称子图也是B的连通子图。如果$dual(B_1)=B_1$，$dual(B_2)=B_2$，令$V_1,V_2\subset V(G)$相关表示在二分图B_G中的B_1,B_2，则V_1,V_2之间将没有边相连，这与图G是一个连通图矛盾。因此$dual(B_1)=B_2$，$dual(B_1^L)=B_2^R$，$dual(B_1^R)=B_2^L$。令$V_1,V_2\subset V(G)$相关表示在二分图B_G中的B_1^L,B_1^R，则V_1,V_2各自内的点两两不存在边相连，即G是一个二分图。 □

为完成以后的证明，我们必须首先给出 Chor 等人[11]提出的引理。

引理 3.2 给定一个图$G=(V,E)$，如果图中存在独立集$I\subseteq V(G)$且$|N(I)|\leqslant|I|$，则G中存在皇冠。

引理 3.2 可以作为一个图中是否存在皇冠的判定定理，可以看出，引理 3.2 是充分必要的。由引理 3.2 我们可以得到以下推论：

推论 3.3 任何连通的二分图一定存在皇冠结构。

证明：假设二分图G的左集为L，右集为R，则L和R都是独立集，若$|L|\leqslant|R|$，则令R为引理 3.2 中的I，L为$N(I)$，则有$|N(I)|\leqslant|I|$。由引理 3.2，图中存在一个皇冠。同理若$|L|\geqslant|R|$，图中也存在一个皇冠，L为引理 3.2 中的I，R为$N(I)$。 □

推论 3.3 显然是判断图中存在皇冠的充分非必要条件。

接下来，我们提出一条新的判定图中是否存在皇冠的判定定理。较之引理 3.2，它在某些情况下能够更加方便地判断一个图是否是 crown-free 的。

定理 3.4（连通图G是否存在皇冠的判定定理） 连通图G中存在皇冠，当且仅当B_G不是基本图。

证明：⇒

假设B_G不是一个基本图。我们可以证明G中至少存在一个皇冠。

令$C_1^L\cup C_2^R$为二分图B_G的最小点覆盖，且$0\neq C_1^L\subset L$，$0\neq C_2^R\subset R$，则有：

$|C_1^L|+|C_2^R|\leqslant|L|=|R|=|G|$

因此，$|C_1^L|\leqslant|L|-|C_2^R|$。

设$C_4=C_1^L\cap C_2^R$，如果C_4为空，则$L-C_1$仅仅与C_2相连，则$R-C_2$仅仅与C_1相连。而C_1与C_2之间不可能存在边相连，因为假如存在一条边连接C_1中的点v_1^L和C_2中的V_2^R，则由B_G的对称性原理必将存在一条边连接C_1中的点v_2^L和C_2中的v_1^R，而由C_4为空，则v_2^L和v_1^R都不在点覆盖内，则边(v_2^L,v_1^R)将无法覆盖，这与$C_1^L\cup C_2^R$为二分图B_G的最小点覆盖矛盾。故推出B_G不是连通图。由引理 3.1 可知，G是一个二分图，由推论 3.3，G中必存在一个皇冠。

如果C_4不为空，令$C_3=V(G)-C_1-C_2$，由于$|C_1|+|C_2|\leqslant|V(G)|$，则$C_3\neq\Phi$。因为

$|C_1|+|C_2|-|C_4|+|C_3|=|V(G)|$,

由$|C_1|+|C_2|\leqslant|V(G)|$，我们得到$|C_4|\leqslant|C_3|$，且$C_3$中的点只和$C_4$相连，$C_3$是个独立集，由引理 3.2，$(C_3,C_4)$中存在一个皇冠。

⇐

假设G中存在一个皇冠$C(I,S)$，I是一个独立集，且$|I|\geqslant|S|$，当B_G构造好以后，I^L和I^R之间不存在边，I^L和I^R分别与S^R和S^L相连，则$L-I^L+S^R$构成B_G的一个点覆盖，且其大小小于$|L|$，显然L和R不可能是最小点覆盖的仅有的候选，则B_G不是一个基本图。 □

我们将定理 3.4 做一下推广，得到下述定理。

定理 3.5（一般图是否存在皇冠的判定定理） 对于任意图G，图G是 crown-free 的充要条件是对于G的每一个连通部分G_α，B_{G_α}都是基本图。

证明：由定理 3.4 可见，对于一个连通图G，若B_G不是基本图，则图G中存在皇冠。取其逆否命题，有：若图 G 是 crown-free 的，则B_G必为基本图。

同理，对若图G中存在皇冠，则B_G不是基本图，有：如果B_G是基本图，则图G是 crown-free 的。

因此，对于连通图G，还有下述成立：图G是 crown-free 的，当且仅当B_G是基本图。

对于图G非连通图的情况，显然，每个连通部分之间的皇冠互不相交，可以先求得图G的各个连通部分（此工作多项式可解），然后再对每个部分利用定理 3.4 分别判断。若存在G的某一个连通部分G_α，B_{G_α}不是基本图，则连通部分G_α中必含有一个皇冠，图中G也必然包含至少一个皇冠。因此，图G是 crown-free 的充要条件是对于G的每一个连通部分G_α，B_{G_α}都是基本图。 □

求得图G的B_G又是 NT 分解中要利用的一种重要的图的转换，籍此我们就可以从一个新的角度将 NT 分解与皇冠分解联系起来。

对于 NT 算法的作用域，我们提出以下定理。

定理 3.6 若G是一个连通图且B_G是基本图，则用 NT-算法对图进行处立后，将得到$V_1=V_0=\Phi$，$V_{1/2}=V(G)$，即，图的规模没有降低。

证明：由于B_G是一个基本图，则B_G的最小点覆盖不是左集就是右集。因此在 NT 算法第二步中找到的最小点覆盖不是左集就是右集，则在 NT 算法第三步，必将得到$V_1=V_0=\Phi$，$V_{1/2}=V(G)$，因此图规模没有降低。 □

上述条件是充分不必要的，即如果 NT 算法没有能够降低图的规模，B_G也不一定是基本图。

4 扩展 NT 算法

本节首先证明 NT 算法在一般图上移除皇冠的效果，即 NT 算法将移除G中的所有严格皇冠。随后提出一种扩展 NT 算法，可以识别和移除G中的所有皇冠，包括严格和非严格皇冠。

引理 4.1 对G使用 NT 算法后得到的残图G_1，其相关表示的B_{G_1}有一个大小为$|G_1|$的最小点覆盖。

证明：由 NT 定理知，图G中的点可被分为三部分V_0，V_1，$V_{1/2}$，并且V_1中对应的左集和右集的点都在B_G的在最小点覆盖中，$V_{1/2}$中的点全部在B_G的最小点覆盖中，在B_G中，除去V_0，V_1，剩下的图都是由$V_{1/2}$中的点构成的B_{G_1}。

在二分图B_G中，V_0对应的部分同$V_{1/2}$对应的部分一定没有边相连。因为，假如存在一条边(v_1^L,v_2^R)连接$V_{1/2}$中在点覆盖中的v_1^L和V_0中的v_2^R，则由$V_{1/2}$中的点只有一边在点覆盖中，v_1^L在则v_1^R必不在，且由V_0是独立集，则v_2^R和v_2^L都不

在点覆盖中。由对称性,存在边(v_1^L,v_2^R)必存在另一条边(v_1^R,v_2^L),而 v_1^R 和 v_2^L 都不在点覆盖内,边(v_1^R,v_2^L)无法得到覆盖,故 V_0 对应的部分同 $V_{1/2}$ 对应的部分没有边相连。

设 B_G 的最小点覆盖为 C_B,$C_B=V_1+V_{1/2}$,假设 B_{G_1} 存在一个大小小于$|G_1|$的最小点覆盖。$V_{1/2}$构成图 B_{G_1}。B_G 中的边包含四部分:连接 V_1 和 V_0 的部分,V_1 内部的部分,连接 V_1 和 $V_{1/2}$的部分,$V_{1/2}$ 内部的部分。而连接 V_1 和 V_0,V_1 和 $V_{1/2}$的部分,以及 V_1 内部的部分都被 V_1 中的点所覆盖,$V_{1/2}$ 内部的部分被 B_{G_1} 的最小点覆盖锁覆盖。因此 B_{G_1} 的最小点覆盖$+V_1$ 构成 B_G 的一个点覆盖。而 B_{G_1} 的最小点覆盖小于$|G_1|$,我们就构造了 B_G 的一个最小点覆盖,其大小小于$|G_1|+|V_1|$即$|V_1|+|V_{1/2}|$即$|C_B|$,这与 B_G 的最小点覆盖大小为$|C_B|$矛盾。引理得证。 □

定理 4.2 NT 算法将移除 G 中的所有严格皇冠。

证明:假设 $C(I,S)$是 G 中的一个严格皇冠,则有$|I|>|S|$,$L-I^L+S^R$ 构成B_G 的一个点覆盖,且其大小小于$|L|$,即 B_G 的最小点覆盖的大小小于$|L|$。由引理 4.1,NT 算法对图进行处理后的残图 G_1,其相关表示的 B_{G_1} 的最小点覆盖大小为$|G_1|$。因此,上述情况在使用完 NT 算法后是不可能出现的,故 NT 算法将移除 G 中的所有严格皇冠。 □

从定理 4.2 可知,NT 算法将移除中的所有严格皇冠。而对于非严格皇冠的情况,我们做如下说明:由上一节中证明的定理 3.4 和定理 3.5,如果残图 G_1 是一个连通图,只有当其相关表示的 B_{G_1} 是一个基本图时,G_1 才是 crown-free 的。如果残图 G_1 不是一个连通图,只要当其每个连通部分 G_1^α 所对应的二分图 $B_{G_1^\alpha}$ 都是基本图时,G_1 中才是 crown-free 的。而由图 1 中 NT 算法的描述,NT 算法在执行过程中无法确保 $V_{1/2}$中的点全部来自 B_G 的左集或全部来自 B_G 的右集,也就是说,无法确保 $V_{1/2}$ 即 B_{G_1} 是一个基本图,从而也就无法确保 G_1 是 crown-free 的,而由定理 4.2,G_1 中的严格皇冠已经被全部移除了,则 G_1 中还有可能存在非严格皇冠。因此,NT 算法将无法识别和移除非严格皇冠。

Chlebik 和 Chlebikova[12] 证明 NT 算法(如图 1)中的 V_0,V_1 构成一个皇冠结构,而定理 4.2 证明了 NT 算法能够移除的是所有的严格皇冠,两者是否存在矛盾?

假设我们从图中找到了 n 个严格皇冠:$C_1(I_1,S_1)$,$C_2(I_2,S_2)$,…,$C_n(I_n,S_n)$,则 $I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n$ 一定构成 NT 算法(如图 1)中的 V_0,$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$ 一定构成 NT 算法(如图 1)中的 V_1,(V_0,V_1)又构成一个大的皇冠。这样就把两个定理统一起来。Chlebik 和 Chlebikova 做过类似的说明,此处不再赘述。

现在提出一种扩展 NT 算法,可以识别和移除图 G 中的所有皇冠,包括严格和非严格皇冠。算法的思想很简单:如果图 G 中存在一个非严格皇冠,则有$|I|=|S|$,从 S 中选取一个点删去,则有$|I|>|S|-1$,即构成一个严格皇冠。然后再用 NT 算法移除之。考虑用穷举法来找到这样的点。算法如图 2 所示。

引理 4.3 令图 G 为一个没有严格皇冠的图,若找到一个非严格皇冠并移除之,则新图仍然是没有严格皇冠的。

证明:假设 G 为一个没有严格皇冠的图,且找到了一个非严格的皇冠 $C(I,S)$,将其从 G 中移除后 G 中产生一个新的严格皇冠 $C(I',S')$。

由皇冠和严格皇冠的定义:$I'\subset G-I-S$,I 和 I'都是独立集,因此 $I\cup I'$也是独立集且 $N(I\cup I')=S\cup S'$。另外,有

$$|I\cup I'|=|I|+|I'|=|S|+|I'|>|S|+|S'|>|S\cup S'|$$

这样,在移除 $C(I,S)$之前,图中就存在一个严格皇冠 $C(I\cup I',S\cup S')$,与题设矛盾。 □

算法 扩展 NT 算法

输入:图 G

输出:C_{output}-包含两部分-图 G 的最小点覆盖的点子集和问题核 G_1,G_1 的最小点覆盖的大小至少是 $|G_1|/2$。

1. $C_{output}=\{\phi\}$;
2. 对 G 使用 NT 算法,移除所有的严格皇冠,$C_{output}=C_0$;
3. For each $v\in G$
   3.1 若 $C_0\neq\{\phi\}$,对图 $G\setminus\{v\}$使用 NT 算法,将 $C_0\cup\{v\}$ 加入到 C_{output} 中,移除 I_0,降低图 G 规模。
4. 输出 C_{output} 和 G

图 2 扩展 NT 算法

现在提出下列定理以证明扩展 NT 算法的正确性:

定理 4.4 扩展 NT 算法将移除图 G 中的所有皇冠(包括严格和非严格皇冠)。

证明:由定理 4.2,扩展 NT 算法中的第 2 步已经移除了所有的严格皇冠。

假设图 G 中还存在一个非严格皇冠 $C(I,S)$,$|I|=|S|$,在扩展 NT 算法第三步的穷举过程中,一定会有一种情况,选取的点 v 来自集合 S,删去 v 之后,$|I|>|S|-1$,即构成一个严格皇冠。对这种情况的图 $G\setminus\{v\}$使用 NT 算法将获得一个输出 C_0,且 C_0 不为空。于是我们可以将 $C_0\cup\{v\}$加入到 C_{output} 中,处理此非严格皇冠。

由引理 4.3,移除掉一个非严格皇冠将不会产生任何新的皇冠,在穷举过所有的 v 并采用 NT 算法处理之后,图 G 中将不存在任何皇冠结构。 □

对扩展 NT 算法的时间复杂度分析如下:

NT 算法的时间复杂度为:$O(m\sqrt{n})$,在扩展 NT 算法最多会调用 NT 算法 n 次,故扩展 NT 算法的时间复杂度为 $O(nm\sqrt{n})$。

在 NT 算法中,最耗时的步骤是求 B_G 的完美匹配,在扩展 NT 算法中我们并不用每次穷举。在从 G 中移除 j 个点,且在 B_G 中移除 $2j$ 个点时,最坏情况下,将生成 $2j$ 个未匹配的点。为了恢复 B_G 的最大(即完美)匹配,我们只需要运行求增广路径算法 j 次。由于我们将从 G 中移除 n 个点,则算法的时间复杂度可以被改进到 $O(mn)$。

结论 本文研究了皇冠分解和 NT 算法之间的内在联系,首先证明了当且仅当 B_G 不是基本图时,连通图 G 中存在皇冠,并将其推广至一般图,即对于任意图 G,图 G 是 crown-free 的充要条件是对于 G 的每一个连通部分 G_α,B_{G_α} 都是基本图。本文进一步证明若 G 是一个连通图且 B_G 是基本图,则 NT 算法将无法降低图的规模。本文首次提出了严格皇冠和非严格皇冠的概念,并证明了 NT 算法可以移除图中存在的所有严格皇冠。基于此,论文提出了一种扩展 NT 算法,能够移除图中的所有严格和非严格皇冠,从而证明了以下设想:扩展 NT 算法能够移除图中所有的皇冠。任何一个做完扩展 NT 算法的图都是 crown-free 的,皇冠分解对做完扩展 NT 算法的图将失去意义。

(下转第 191 页)

会/征兆发现的研究，用户的认知主要通过对文本信息内容的计算机辅助分析过程中通过交互实现。这种认知的作用方式，忽视了注意作为人意识心理活动信息过滤器[17~31]应该发挥的作用，这是信息科学领域机会/征兆发现研究的严重不足。同时，被考察系统的时间属性被忽略是目前进行的机会/征兆发现研究的一个特点，也是机会/征兆发现研究的另一个不足。

研究展望 智能信息处理领域中，机会/征兆发现是一个新兴的研究方向，目前进行的研究仅仅处于起步阶段。由于对机会/征兆的发现是心理活动的结果，认知心理和社会心理是机会/征兆发现的机制、模型构造时必须考虑的因素，同时，相关的方法研究也不能够忽视认知心理和社会心理的作用。

目前，在报纸、广播、电视、Internet 等重要的媒体形式中，文本是信息的重要载体。利用基于认知的文本机会/征兆发现方法，及时有效地发现蕴涵于文本信息中的机会/征兆，对政府部门而言，可以为对关系国计民生的决策提供依据；对商业机构和生产商而言，可以指导其商业行为；对个人而言，可以助其把握机遇，避免风险。同时，在信息科学领域，机会/征兆发现是一个新兴的方向，基于认知心理的文本机会/征兆发现方法研究所取得的进展将促进机会/征兆发现研究的成长，具有深远的理论意义和重大的现实意义。

参 考 文 献

1 Zimmerman C. The development of scientific reasoning, Developmental Review, 2000,20:99～149
2 Yukio O, Peter M, eds. Chance Discovery, Springer- Verlag, 2003
3 Ohsawa Y, Nara Y. Understanding Internet Users on Double Helical Model of Chance-Discovery Process. In: Proc. of IEEE. International Symposium on Intelligent Control, 2002. 844～849
4 Ohsawa Y, Benson NE, Yachida M. KeyGraph: Automatic Indexing by Cooccurrence Graph Based on Building Construction Metaphor. In: Proceedings of Advances in Digitial Libraries Conference (IEEE ADL's 98). 12～18
5 Ohsawa Y, Yachida M. Discovery Risky Active Faults by Indexing an Earthquake Sequence. In: Proc. International Conference on Discovery Science, 1999. 208～219
6 Ohsawa Y. Chance Discovery for Making Decisions in Complex Real World. New Generaion Computing, 2002, 20(2):143～163
7 Takama Y, Hirota K. Discovery of Topic Distribution through WWW Information Retrieval Process. In: Proc. of IEEE(2000). pp1644～1647
8 Goldberg DE. The Design of Innovation: Lessons from and for Competent Genetic Algorithms, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2002
9 McBurney P, Parsons S. Chance Discovery Using Dialectical Argumentation. In: JSAI 2001 Workshops, LNAI, 2253. 414～424
10 诸世卓，陈小平. Agent 机会发现的一种相关性描述. 计算机工程与应用，2004，5：45～48
11 诸世卓，陈小平，皮亮. Agent 机会发现的一种刻画：溯因推理及其扩展. 计算机工程，2004，30(12)：40～42
12 高俊波. 基于认知的征兆发现理论和方法研究：[博士学位论文]. 中国科学技术大学档案馆，2005
13 张振亚. 从数据挖掘到机会/征兆发现：[博士后研究报告]. 中国科学技术大学联想实验室资料室，2006
14 地球科学. http://www.nju.edu.cn/njuc/dikexi/earthscience/chp1/3-2-9.htm
15 Fayyad U M, Piatetsky-Shapiro G, Smyth. From data mining to knowledge discovery. In: Fayyad. U. M Piatetsky-Shapiro G., Smyth P, Uthurusamy R, eds. Advances in knowledge discovery, data mining, AAAI Press/MIT Press, CA, 1996. 1～31
16 Yutaka M, Yukio O, Mitsuru I. KeyWorld. In: Extracting Keywords from a Document as a Small World, Proceedings the Fourth International Conference on Discovery Science, 2001. 271～281
17 孟昭兰主编. 普通心理学. 北京大学出版社，2003
18 Zimbardo P. Psychology and Life. Illionis: Scottand Forseman and Company, 198519) Catherine M A, Thomas H C, Andrew R M, et al. Neural mechanisms of visual attention: Object-based selection of a region in space. Journal of Cognitive Neuroscience, 2000, 12(Suppl. 2):106～117
20 Treisman A, Gelade G. A feature-integration theory of attention. Cognitive Psychology, 1980, 12(1):97～136
21 王健，朱祖祥. 视觉注意选择性的认知心理学理论研究进展. 应用心理学，1997，3(1)：58～64
22 Posner M I, Synder C R, Davidson B J. Attention and the detection of signals. Journal of Experimental Psychology: General, 1980, 109(2):160～174
23 Tsal Y. Movement of attention across the visual field. Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 1983, 9(4):523～530
24 杨华海，赵晨，张侃. 外源性视觉选择性注意的时空特征。心理学报，1998，30(2)：136～141
25 Eriksen C W, Murphy T. Movement of attentional focus across the visual field: Acritical look at the evidence. Perception and Psychophysics, 1987, 42(3):299～305
26 Larberge D, Brown V. Theory of attentional operation in shape identification. Psychological Review, 1989, 96(2):101～124
27 Egly R, Driver J, Rafal R D. Shifting visual attention between objects and location: Evidence from normal and parietal lesion subjects. Journal of Experimental Psychology: General, 1994, 123(2):161～177
28 傅世敏，陈霖. 对"物体内注意转移"优势效应之机制的进一步检验. 心理学报，1999，31(2)：142～147
29 Driver J, Baylis G C. Movement and visual attention: The spotlight metaphor breaks down. Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 1998, 15(3):448～456
30 Tsal Y, Lavie N. Location dominance in attending to color and shape. Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 1993, 19(1):131～139
31 刘志华，陈彩琦，金志成. 选择性注意的理论及其发展趋势—认知神经研究. 心理科学，2003，26(4)：709～712

(上接第 176 页)

目前，我们仍在深入研究 NT 算法和皇冠分解在实际中的应用，期望能够通过二者的有机结合改进特定情况下参数化点覆盖问题的时间复杂度下界。

参 考 文 献

1 Garey M, Johnson D. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman, San Francisco, 1979
2 Downey R G, Fellows M R. Parameterized Complexity. New York: Springer, 1999
3 Buss J F, Goldsmith J. Nondeterminism within P. SIAM Journal on Computing, 1993, 22(4): 560～572
4 Downey R G, Fellows M R. Parameterized computational feasibility. In: Clote P, Remmel J, eds. Feaible mathematics II, Boston, Birkhauser, 1995. 219～244
5 Balasubramanian R, Fellows M R, Raman V. An improved fixed parameter algorithm for vertex cover. Information Processing Letters, 1998, 65(3): 163～168
6 Stege U, Fellows M. An improved fixed-parameter- tractable algorithm for vertex cover: [Technical Report]. Department of Computer Science, ETH Zurich, 318, 1999
7 Niedermeier R, Rossmanith P. Upper bounds for vertex cover further improved. Lecture Notes in Computer Science, 1999, 1563: 561～570
8 Chen J, Kanj I A, Jia W. Vertex cover: Further observations and further improvements. Journal of Algorithms, 2001, 41(2): 280～301
9 Abu-Khzam F N, Collins R L, Fellows M R, et al. Kernelization algorithms for the vertex cover problem: theory and experiments. In: Proceedings, Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX), 2004
10 Fellows M. Blow-Ups, Win/Win's, and Crown Rules: Some New Directions in FPT. Lecture Notes in LNCS, 2003, 2880: 1～12,
11 Chor B, Fellows M, Juedes D. An efficient FPT algorithm for saving k colors. Manuscript, 2003. 7
12 Chlebik M, Chlebikova J. Crown reductions for the Minimun Weighted Vertex Cover problem. Electronic Colloquium on Computational Complexity, Report No, 2004
13 Nemhauser G L, Trotter L E. Vertex Packings: Structural properties and algorithms. Math Programming, 1975, 8: 232～248
14 Chen J. Parameterized Computation and Complexity: A New Approach Dealing with NP-Hardness. Journal of Computer Science and Technology, 2005, 20: 18～37