

# 平面有界闭区域图形的拓扑分类识别<sup>\*</sup>)

倪劲松

(苏州大学数学科学学院 苏州 215006)

**摘要** 本文首先将具有简单封闭曲线特征的闭主曲线学习算法应用于平面有界闭区域图形的边界提取,给出相应的算法。结合拓扑度理论,本文还定义了有界闭区域的边界关联矩阵,引入了平面中图像的F-同胚概念,运用边界关联矩阵是F-同胚下的完全不变量原理,将F-同胚和边界关联矩阵概念有机结合起来,对平面有界区域图形进行拓扑粗分类,以达到缩小搜索范围、提高搜索速度的目的。最后,本文给出了平面有界闭区域图形的计算机拓扑识别的算法及其实现。

**关键词** 闭主曲线,有界闭区域,边界关联矩阵,F-同胚

## Closed Principle Curves Learning and Algorithm for Topological Recognition of Bounded Domains in Plane

NI Jin-Song

(School of Mathematics Science, Soochow University, Suzhou 215006)

**Abstract** By applying closed principal curve learning algorithm, we can obtain a simple polydragon as an approach for every simple closed curve in plane. So we can extract the boundary of every connect closed domain  $\bar{D}$  in plane by simple polydragons. Thus we only need to consider the case of all domain which boundaries are simple polydragons. In this case, by topological degree theory, we can define conjunction index  $I_{i,j} = \text{ind}(P_i, P_j)$  for two un-joint simple closed curves  $P_i, P_j$  in plane, and conjunction matrix  $K(\bar{D}) = (I_{i,j})$  for every bounded closed domain  $\bar{D}$  in lane. Then we introduce the conception of F-homeomorphism for any two pictures in plane, and apply this conception to image recognition. In [5], combining the algebraic topology method, we have proven that conjunction matrix is complete topological invariant of bounded closed domain  $\bar{D}$  in plane under F-homeomorphism. so, for any two bounded closed domain in plane  $\bar{D}_1$  and  $\bar{D}_2$ , we design several algorithms to pick-up their boundaries, computer their conjunction matrixes, and compare their conjunction matrixes when they will be the same. after all, we have satisfactorily resolved the problem of topological recognition of bounded closed domain in plane under F-homeomorphism.

**Keywords** Closed principle curves, Bounded closed domain, Conjunction matrix, F-homeomorphism

从数学方法上看,现有图形识别方法多半是采用分析和概率相结合的方法,而描述图形本质特征的拓扑不变量却难以有效应用。主要原因在于拓扑不变量通常比较难算,没有比较实用的方法来恰当地提取图形的拓扑不变量,尤其是对较复杂的图形而言更是困难重重。在文[7]中,作者与人合作给出了提取平面一般简单闭曲线的闭主曲线算法,为拓扑方法应用于图形识别提供了可用的一种计算工具。本文将利用闭主曲线算法,借用拓扑度的想法引入有界闭区域的完全拓扑不变量——由图边界分支之间的拓扑关联指标组成的关联矩阵,此矩阵的计算比较简单并且便于应用,进而给出平面有界闭区域拓扑分类识别问题的圆满解决。

## 1 基本知识

### 1.1 平面向量的幅角

设  $\vec{r} = (x, y) \in R^2$ , 定义  $\vec{r}$  的有向幅度为  $\theta_1(\vec{r})$ , 即  $x$  轴逆时针旋转到  $\vec{r}$  的角度。当  $|\vec{r}| = 1$  即  $x^2 + y^2 = 1$  时,  $\theta_1(\vec{r})$  为  $\vec{r}$  与  $x$  轴正向的有向角。而对于一般的  $\vec{r} = (x, y) \in R^2$ ,  $\theta_2(\vec{r})$  定义如下:

$$\theta_2(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \vec{r} = 0 \\ \theta_1(\vec{r}/|\vec{r}|) & \vec{r} \neq 0 \end{cases}$$

当  $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in R^2$  时, 定义  $\vec{r}_1$  与  $\vec{r}_2$  之间的有向夹角  $\theta(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  为  $\theta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \theta_2(\vec{r}_2) - \theta_2(\vec{r}_1) \pmod{2\pi}$

显然, 当  $\vec{r} = (x, y)$  用复数  $Z = x + iy$  来表示时, 那么有如下形式

$$\vec{r} = |\vec{r}| \exp(i\theta_2(\vec{r}))$$

当  $Z_1, Z_2$  是两个复数, 并且  $Z_1 \neq 0$  时,

$$Z_2 / Z_1 = |Z_2| / |Z_1| \exp(\theta(Z_1, Z_2))$$

### 1.2 平面有界闭区域

现设  $D$  为平面中的点集, 如果  $D$  中每个点都有一个邻域包含在  $D$  中, 则称  $D$  为平面中的一个开区域, 并称  $D$  的闭包为平面中的闭区域  $\bar{D}$ 。如果闭区域  $\bar{D}$  还是有界的, 则称  $\bar{D}$  为有界闭区域。

对于有界闭区域  $\bar{D}$  而言, 我们可以基于作者在文[7]中给出的闭主曲线拟合算法, 提出一种提取图形边界的有效方法:

**算法 A**(有界闭区域边界图形提取)

step 1: 分离有界闭区域  $\bar{D}$  的图形边界;

step 2: 优化处理分离后的边界点集;

step 2-1: 合并边界线判断: 如果两条取出的分离边界线能够首尾相距不超过预先设定的阈值, 则合并该两条边界线;

<sup>\*</sup> 本课题获得国家自然科学基金(10571129)资助。倪劲松 博士, 研究方向: 代数拓扑同伦论、数据集几何特征提取。

step 2-2: 删除边界线判断: 如果两条取出的分离边界线的距离小于预先设定的阈值, 则视较短的一条边界线为分离中产生的虚线段(即伴生在闭边界线边缘的线段), 并予以删除;

step 2-3: 检查新的边界图形点集的闭合性;

step 2-4: 检查新的边界图形点集的互不相交性;

step 3: 转换边界点集为坐标点集;

step 4: 利用文[7]中闭主曲线拟合算法分别拟合分离后的  $N_0$  条闭合且不相交的边界图形集合, 获得边界图形的闭主曲线集合  $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_{N_0}\}$ 。

step 5: 显示该  $N_0$  条拟合好的闭主曲线集合:  $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_{N_0}\}$ 。

由于闭主曲线算法拟合出来的边界线是简单多边形, 这样就可以按如下方式引入拓扑工具对图形进行拓扑分类, 并最终给出有界闭区域图形的计算机拓扑分类识别算法及其实现。

## 2 关联矩阵

### 2.1 边界关联指标与关联矩阵

设  $\Gamma_1, \Gamma_2$  是平面有界闭区域  $\bar{D}$  的两个孤立边界,  $P_1, P_2$  分别为  $\Gamma_1, \Gamma_2$  的闭主曲线逼近,  $P_i = \{p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,k(i)}\}, i = 1, 2$ 。由于  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ , 因此可以利用代数拓扑学中的拓扑旋转变理论来定义  $P_1$  与  $P_2$  的关联指标  $\text{ind}(P_1, P_2)$

$$\text{ind}(P_1, P_2) = (1/2\pi) \sum_{i=1}^{\#P_2} \theta(\overrightarrow{p_{11} p_{2j}}, \overrightarrow{p_{11} p_{2j+1}})$$

$P_1$  与  $P_2$  均为互不相交的闭合曲线, 则关联指标与  $P_1$  中顶点的选取无关。

设有界闭区域  $\bar{D}$  的边界闭主曲线集  $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_{N_0}\}$ ,  $P_N$  为  $R^2$  中其内部包含  $\bar{D}$  的矩形。置  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{P_N\}$ ,  $N_0 = \#\Gamma, N = N_0 + 1 = \#\bar{\Gamma}$ , 则对于  $1 \leq i, j \leq N$ , 定义

$$I_{i,j} = \text{ind}(P_i, P_j)$$

通过约定  $\text{ind}(P_i, P_i) = 1$ , 可得到对应于闭主曲线集  $\Gamma$  的关联矩阵  $I(\bar{D}) = I(\Gamma) = (I_{i,j})$ 。

可以证明, 当  $P_i$  包含  $P_j$  时,  $I_{i,j} = 0$ , 反之  $I_{i,j} = 1$ 。关联矩阵元素实际上是由 0 和 1 组成。易知, 当  $i \leq N-1 = N_0$  时,  $I_{i,N} = 1, I_{N,i} = 0$ , 并且对于一般的  $i \neq j$ , 总有: 如果  $I_{i,j} = 1$ , 则  $I_{j,i} = 0$ 。而当  $I_{i,j} = 0 = I_{j,i}$  时, 则  $P_i$  与  $P_j$  所围的两个有界闭区域是互不相交的, 同时也是互相分离的。

### 2.2 边界集元素的不同排序对关联矩阵的影响

在计算边界闭主曲线点集的关联矩阵时, 还必须考虑到点集的排序对关联矩阵是否产生影响。运用合同矩阵概念可以解决这个问题。

设  $S_N$  为  $N$  个符号的置换群,  $\pi \in S_N, E(\pi) = (E_{ij}^\pi)$  为由置换  $\pi$  所决定的置换矩阵, 其中  $E_{ij}^\pi = \begin{cases} 1 & j = \pi(i) \\ 0 & j \neq \pi(i) \end{cases}$

并且满足  $E(\pi)' = E(\pi)^{-1}$ 。

那么, 当边界集  $\Gamma$  经过置换  $\pi$  作用变成  $\Gamma(\pi)$  之后, 对应的边界关联矩阵由  $I(\Gamma)$  变成  $I(\Gamma(\pi))$ 。通过矩阵计算可知

$$I(\Gamma(\pi)) = E(\pi) I(\Gamma) E(\pi)'$$

即:  $I(\Gamma)$  与  $I(\Gamma(\pi))$  是合同矩阵。

因为  $E(\pi)' = E(\pi)^{-1}$ , 所以这样的矩阵合同关系也是相似关系。对关联矩阵而言, 我们关心的是其关联指标及其之和, 故从某种意义上来说, 边界集元素的不同排序对关联矩阵并不产生本质影响。

## 3 有界闭区域的 F-同胚

设平面  $R^2$  中两个有界闭区域  $\bar{D}, \bar{D}'$  的边界闭主曲线集分别为  $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_{N_0}\}, \Gamma' = \{P'_1, \dots, P'_{N'_0}\}, P_N$  为  $R^2$  中其内部包含  $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$  的矩形边界  $M$ 。置  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{P_N\}, N_0 = \#\Gamma, N = N_0 + 1 = \#\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}' = \Gamma' \cup \{P'_N\}, N'_0 = \#\Gamma', N' = N'_0 + 1 = \#\bar{\Gamma}'$ 。

定义 称平面  $R^2$  中两个有界闭区域  $\bar{D}, \bar{D}'$  是 F-同胚的, 如果存在  $R^2$  中矩形  $M$  使得其内部包含  $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$ , 并且存在同胚  $f: R^2 \rightarrow R^2$  使得  $f: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ 。  $f$  限制在  $R^2$ -inM 上也是同胚。

如  $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$  F-同胚, 则记为  $\bar{D} \xrightarrow{F} \bar{D}'$ , 否则记为  $\bar{D} \not\xrightarrow{F} \bar{D}'$ 。

由拓扑学知识(可参见文[4,8])可知:  $f: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$  也是同胚, 并且  $f$  把边界点映到边界点, 并保持包含关系, 从而导出  $\bar{\Gamma}$  到  $\bar{\Gamma}'$  的保序的一一对应, 而且  $f(P_N) = P'_N, f: P_i \rightarrow P'_i$  为保定向的同胚。故此, 如果  $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$  是 F-同胚的, 其 F-同胚是由映射  $f: R^2 \rightarrow R^2$  确定, 则  $N = N'$ , 并且存在  $1, \dots, N$  的一个置换  $\pi$ , 使得  $\pi(N) = N, \bar{D}'$  的边界集  $\bar{\Gamma}' = \Gamma' \cup \{P'_N\}$  按顺序  $\bar{\Gamma}'(\pi) = \{P'_{\pi(1)}, \dots, P'_{\pi(N)}\}$  排列, 且  $f: P_i \rightarrow P'_{\pi(i)}$  使得此时的边界关联矩阵  $I(\bar{\Gamma}'(\pi)) = I(\bar{\Gamma})$ 。

F-同胚关系确定了平面上所有有限截图之间的一个等价关系, 只有两个有限截图具有 F-同胚关系, 才有可能完全相同的图形。通过计算图形的边界关联矩阵可以对图形进行拓扑“粗”分类。

## 4 F-同胚与关联矩阵的关系

如何知道两个图形是 F-同胚? 是否 F-同胚的两个图形其关联矩阵一定相等? 为此, 我们有

定理 形如平面  $R^2$  中两个有界闭区域的图形  $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$  是 F-同胚的充分必要条件是:

(1)  $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$  边界集  $\#\bar{\Gamma} = \#\bar{\Gamma}' = N$ ;

(2) 存在  $\bar{D}'$  边界集  $\bar{\Gamma}'$  的一个置换  $\pi \in S_N$  使得  $I(\bar{\Gamma}) = I(\bar{\Gamma}'(\pi))$

证明: 必要性已证, 充分性的证明可参见文[5]。

两个图形的关联矩阵在不考虑边界点集的不同排序下相等是其 F-同胚的充分必要条件。而且由上文可知, 关联矩阵是可以计算的, 故通过计算图形的边界关联矩阵, 可以确定两个边界图形的 F-同胚关系, 从而达到对图形进行拓扑“粗”分类, 以达到缩小搜索范围提高搜索速度的目的。尤其在诸如商标等数据库很大的情形检索时, 起初的粗分类将使检索速度得到大大提高。

## 5 图形拓扑分类识别的算法

### 5.1 判别两个图形是否 F-同胚

算法 B(判别两个图形是否 F-同胚)

输入分别由算法 A 生成的两个平面有界闭区域图形  $\bar{D}, \bar{D}'$  边界集  $\Gamma$  和  $\Gamma'$

step 1: 计算  $N_0 = \#\Gamma$  和  $N'_0 = \#\Gamma'$ , 如  $N_0 = N'_0$ , 则进入 step2, 否则输出  $\bar{D} \not\xrightarrow{F} \bar{D}'$ , 并进入 Step5;

step 2: 计算边界集  $\Gamma$  和  $\Gamma'$  的关联矩阵

$I(\Gamma) = (I_{i,j}), I(\Gamma') = (I'_{i,j})$  其中:

$I_{i,j} = \text{ind}(P_i, P_j), I'_{i,j} = \text{ind}(P'_i, P'_j)$

step 3: 计算

$I_{\Gamma, \Gamma'} = \min\{\|I(\Gamma) - E(\pi)I(\Gamma')E(\pi)'\| \mid \pi \in S_N\}$

step 4: 如果  $I_{r,r'}=0$ , 则输出  $\bar{D} \xleftrightarrow{F} \bar{D}'$ , 否则输出  $\bar{D} \not\xleftrightarrow{F} \bar{D}'$ ;

step 5: 如果  $\bar{D} \xleftrightarrow{F} \bar{D}'$ , 则输出“ $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$  是  $F$ -同胚的”;

如果  $\bar{D} \not\xleftrightarrow{F} \bar{D}'$ , 则输出“ $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$  不是  $F$ -同胚的”。

由于 step3 对于较复杂的图形而言计算量比较大, 可以换成如下弱一些的方法判断:

step 3': 定义关联矩阵的指标之和为:

$$i_r = \sum_{i,j=1}^N I(\Gamma)(i,j) = \sum_{i,j=1}^N I_{i,j}$$

如果  $i_r \neq i_{r'}$ , 则一定有  $\bar{D} \not\xleftrightarrow{F} \bar{D}'$ , 但由条件  $i_r = i_{r'}$  并不能推出  $\bar{D} \xleftrightarrow{F} \bar{D}'$ , 此时还需进一步判断, 不过此方法计算简单便捷, 我们在下面算法演示中将主要用此方法进行断。

### 5.2 有界闭区域图形的拓扑识别分类算法

由上所述可得到有界闭区域的拓扑分类识别算法

算法 C(有界闭区域的拓扑分类识别算法)

输入平面有界闭区域  $\bar{D}, \bar{D}'$

step1: 由算法 A 输出平面有界闭区域  $\bar{D}, \bar{D}'$  的边界集  $\hat{\Gamma}$  和  $\hat{\Gamma}'$ ;

step2: 通过算法 B 判断  $\bar{D}$  与  $\bar{D}'$  是否  $F$ -同胚。

### 5.3 算法实现与结果分析

下面给出拓扑识别算法 A 和算法 B 的实现结果。

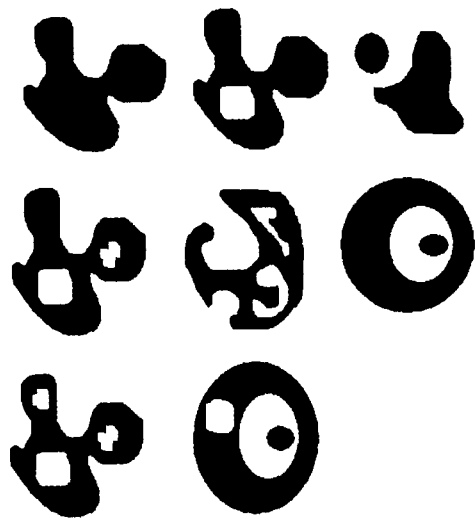


图 1 实验采用的一组原始图形

为了便于分析和说明, 我们采用了一组图形进行实验(图 1), 经过算法 A 的处理, 提取的边界图形对应于图 2。

通过实现算法 B, 我们生成如下关联矩阵( $I_1 \sim I_8$ ):

$$I_1 = 1 \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由上面关联矩阵可以看出: 对  $I_2$  和  $I_3$  而言, 虽然所含的边界图形数量相同, 但其所对应的  $i_r$  分别为 3 和 2, 所以它们不是  $F$ -同胚的; 而对  $I_4$  和  $I_5$  而言, 因为其  $i_r$  相等( $i_r=5$ ), 所以是  $F$ -同胚的, 但与  $I_6$ ( $i_r=6$ ) 却不  $F$ -同胚;  $I_7$  和  $I_8$  亦不  $F$ -同胚。这一分析可以从图 2 或图 1 上得到直观验证: 从拓扑意义上来看, 图 4 和图 5 的外部 and 内部结构均相同, 可以粗分为一类; 但是子图 6 虽与子图 4、子图 5 有相同的边界线个数, 但内部结构却有本质的差别(有嵌套), 所以不可以分为一类。其他图形亦可以做出类似验证。

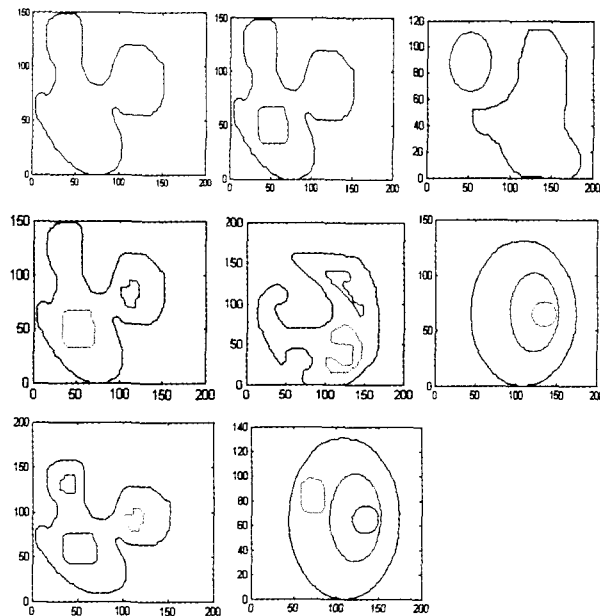


图 2 算法 A 生成的边界图形

至此有界闭区域图形的拓扑识别问题就完全解决了, 至于更一般的图形的拓扑识别问题是否也能用此方法给出较好的解决方案将是我们以后努力的目标。有关此结果在商标检索和机器人机械几何构件识别上的应用我们将另文加以发表。

### 参考文献

- 1 de Berg M, van Kreverden M, Overmars M, Schwarzkopf O. Computational Geometry-Algorithm and Applications. Translated to Chinese(计算几何—算法与应用(第二版)[M]. 北京:清华大学出版社, 2005
- 2 Graham R L. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set [J]. Inform. Process. Lett., 1972, 1: 132~133
- 3 Kegl B, Krzyzak A, et al. A polygonal line algorithm for constructing Principal curves. In: proceedings of Neural Information Processing Systems [J], Dever Colorado, USA, 1999. 501~507
- 4 Massey W S. A Basic Course in Algebraic Topology [M]. Springer-Verlag, New York, Inc. 1991
- 5 NI Jin-Song. Complete Invariant of Bounded Closed Domain in Plane Under  $F$ -homeomorphism, to appear. (in Chinese)(倪劲松. 平面中有界闭区域在  $F$ -同胚下的完全不变量, 将发表)
- 6 倪劲松, 李玉珍, 王宜怀. 自组织拓扑映射与主曲线学习[J]. 计算机科学, 2006(3)
- 7 倪劲松, 王宜怀. 始于凸包络线的闭主曲线学习算法研究. 计算机科学, 2007(4)
- 8 Novikov S P, Topology I. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996