

基于曲率带的超分辨率图像复原参数估计^{*})

解 凯

(北京印刷学院信息与机电工程学院 北京 102600)

摘 要 在很多超分辨率复原应用中,正则化参数是未知的。然而通过 L-曲线估计正则化参数的计算代价十分昂贵。本文提出在超分辨率复原中使用基于 Lanczos 算法和 Gauss 积分的方法来高效计算正则化参数。该方法用 Gauss 积分来计算矩阵矩,通过部分 Lanczos 算法来计算 L 曲线的曲率带。该方法可减少正则化参数的计算代价和确定 Lanczos 算法的恰当迭代次数。

关键词 曲率带,正则化参数,超分辨率图像

Curvature Bounds-based Parameter Estimation in Super-Resolution Image Restoration

XIE Kai

(College of Information & Mechanical Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600)

Abstract In many super-resolution image restoration applications, the regular parameters are not known. However, the computation for the estimation of the unknown parameters is quite costly though L-curve. The paper proposes an efficient method based on the Lanczos algorithm and Gauss quadrature rules in super-resolution image restorations. The method can compute matrix moments though Gauss quadrature rules. L-curvature ribbon is yielded with partial Lanczos algorithm. The method can reduce the computational complexity of the regular parameters and determine the suitable iterative times for the Lanczos algorithm.

Keywords Curvature bounds, Regular parameter, Super-resolution image

1 引言

超分辨率图像复原就是用一组低质量、低分辨率图像来产生高质量、高分率图像。早期的工作是由 Tsai 和 Huang^[1] 及许多研究者主要从工程角度把超分辨率问题看作重建和识别问题。然而,正如文^[2]所报道,很少有工作致力于相关参数估计的研究。Molina^[3] 提出基于频率域多渠道信号处理通用框架来处理高分辨率问题中的参数估计问题。他们使用最大似然概率来估计参数,但该方法并不是高效率的。超分辨率图像复原是一个大型稀疏方程组求解问题,因此常用 L-曲线来确定正则化参数^[9],但该方法计算代价昂贵。本文提出使用 Lanczos 算法和高斯积分理论方法来估计 L-曲线的曲率带,使用曲率带来确定正则化参数。

2 问题描述

假设大小为 $N=L_1N_1 \times L_2N_2$ 的超分辨率图像,它以字典排列方式形成向量 $x=[x_1, x_2, \dots, x_N]$, x 是理想的图像。令 L_1 和 L_2 表示水平和垂直方向的整数制内插因子,低分辨率图像大小为 $M=N_1 \times N_2$ 。令第 k 帧图像 $y_k=[y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,M}]$, 其中 $k=[1, 2, \dots, p]$ 。假设低分辨率图像被施加叠加性噪声,有如下观测模型^[4]:

$$y_k = DB_k M_k x + n_k \quad 1 \leq k \leq p \quad (1)$$

$$y_k = W_k x + n_k \quad (2)$$

M_k 是 $L_1N_1L_2N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 变形矩阵,这个矩阵涉及运动场矢量和插值等内容。 B_k 表示 $L_1N_1L_2N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 模糊矩阵, D 是 $N_1N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 亚采样矩阵。 n_k 表示按字典顺序排列的噪声向量。不失一般性,我们将模

型表达为(2)式。 W_k 是大小为 $N_1N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 的系统矩阵。将所有帧排列成一个向量,得到:

$$Y = Wx + n \quad (3)$$

其中 Y 为 p 幅图像叠加在一起的 $pN_1N_2 \times 1$ 向量 $[y_1^T, y_2^T, \dots, y_p^T]^T$; n 为 $pN_1N_2 \times 1$ 噪声向量; W 为 $pN_1N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 系统矩阵,它的大小依赖低分辨率图像的数量。该系统矩阵是结构的、典型病态且非常庞大。为了求解(3)式,需定义代价函数,它最小化残余向量范式:

$$\arg \min_x \|Y - Wx\|^2 \quad (4)$$

求该问题逆的困难是不能放大已测数据中的噪音效果,因此对于超分辨率复原问题,需要加入正则项到代价函数,以约束解空间。正则化方法中,通用正则项可表示如下:

$$E(x) = \arg \min_x (\|Y - Wx\|^2 + \mu x^T R x) \quad (5)$$

μ 为正则化参数,控制解的光滑度。 R 为正则化矩阵,是对称正定的,一般来说 $R = C^T C$, 其中 C 矩阵表示高通滤波器。为了简化,假定 R 是单位矩阵(注:这个假设不失一般性,通过重定义变量 x ,任何对称正定矩阵都能简化成标准型 $R = I$)。最小化(5)式的解表示如下:

$$x_\mu = (W^T W + \mu I)^{-1} W^T Y \quad (6)$$

3 L-曲线和曲率

选择恰当正则化参数的一种方法是基于下述曲线:

$$P(\mu) = (\log \|x_\mu\|, \log \|Wx_\mu - Y\|) \text{ for } \mu > 0$$

该曲线定义为 L-曲线(L-curve)。选择恰当正则化参数对应于 L-曲线的“拐点”,该点被定义为该曲线的最大曲率点。令 $\mu > 0$ 是正则化参数的一个值,由(6)式得

$$\|x_\mu\|^2 = x_\mu^T x_\mu = Y^T W (W^T W + \mu I)^{-2} W^T Y \quad (7)$$

^{*}) 黑龙江省教育厅科学基金(10551115)和北京印刷学院院选人才引进基金项目。解 凯 博士,教授。

$$\|Wx_\mu - Y\|^2 = \mu^2 Y^T (WW^T + \mu I)^{-2} Y \quad (8)$$

引入函数

$$\phi(t) := (t + \mu)^{-2} \quad (9)$$

并定义矩阵函数

$$p_\mu := (W^T Y)^T \phi(W^T W) W^T Y$$

$$q_\mu := \mu^2 Y^T \phi(WW^T) Y \quad (10)$$

那么

$$\|x_\mu\| = p_\mu^{1/2}, \|Wx_\mu - Y\| = q_\mu^{1/2} \quad (11)$$

L-curve 上的坐标点 $P(\mu) = (\log p_\mu, \log q_\mu)/2$ 。令

$$\hat{p}_\mu := \log p_\mu, \hat{q}_\mu := \log q_\mu$$

那么 L-curve 在点 $P(\mu)$ 处的曲率可表示如下:

$$k_\mu = 2 \frac{\hat{p}_\mu' \hat{q}_\mu'' - \hat{p}_\mu'' \hat{q}_\mu'}{((\hat{p}_\mu')^2 + (\hat{q}_\mu')^2)^{3/2}} \quad (12)$$

上式中的微分是对正则化参数 μ 的。由(11)式得

$$\hat{p}_\mu' = 2x_\mu; \hat{q}_\mu' = 2W^T(Wx_\mu - Y)$$

从(6)式得出

$$W^T(Wx_\mu - Y) = -\mu x_\mu$$

因此

$$\hat{p}_\mu' = -\mu q_\mu'$$

将上式代入(12)式,整理后有

$$k_\mu = 2 \frac{p_\mu q_\mu \mu \hat{p}_\mu' q_\mu' + p_\mu q_\mu + \mu^2 p_\mu \hat{p}_\mu'}{p_\mu (\mu^2 p_\mu^2 + q_\mu^2)^{3/2}} \quad (13)$$

引入函数

$$\Psi(t) := \frac{d\phi(t)}{d\mu} = -2(t + \mu)^{-3}$$

那么 p_μ 的导数能表达:

$$p_\mu' = (W^T Y)^T \psi(W^T W) (W^T Y) \quad (14)$$

上述问题的关键是计算 p_μ 、 q_μ 和 p_μ 的导数。当矩阵 W 维数大时,对于不同参数 μ ,它们的计算量是相当大的。然而,我们可以通过 Gauss 和 Gauss-Radau 积分来确定它们的上下界。有大量的文献关于将 Gauss 型积分应用于矩阵函数的计算^[5~8]。

现在把 p_μ 、 q_μ 和 p_μ 的导数用 Stieltjes 积分表示。根据特征值分解性质,有

$$WW^T = D\Lambda D^T$$

$$\Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in R^{m \times m}, D^T D = I_m, D \in R^{m \times m}$$

λ_j 为特征值($j=1, 2, \dots, m$)。令

$$h = [h_1, h_2, \dots, h_m, 0, \dots, 0]^T = \mu D^T Y \in R^{m \times m}, \text{得到}$$

$$q_\mu = h^T \phi(\Lambda) h \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) d\omega(t) \quad (15)$$

$$p_\mu = \hat{h}^T \phi(\hat{\Lambda}) \hat{h} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) d\hat{\omega}(t) \quad (16)$$

$$p_\mu' = \hat{h}^T \Psi(\hat{\Lambda}) \hat{h} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) d\hat{\omega}(t) \quad (17)$$

离散测度 $\omega(t)$ 和 $\hat{\omega}(t)$ 是非递减的阶跃函数,它们在特征值 λ_i 和原点产生跳跃。对于高斯型积分,权 h_i 和节点 λ_i 是未知的。

4 Lanczos 双对角线化和曲率带算法

使用 l 步的 Lanczos 双对角线化算法^[9] 作用于带有初始向量 Y 、矩阵 W ,将产生如下的分解:

$$WV_l = U_l C_l + \delta_{l+1} u_{l+1} e_l^T,$$

$$W^T U_l = V_l C_l^T, Y = \delta_l U_l e_l \quad (18)$$

其中,矩阵 $U_l = [u_1, u_2, \dots, u_l]$ 和 $V_l = [v_1, v_2, \dots, v_l]$ 具有列正交, $C_l \in R^{l \times l}$ 是下双对角矩阵。 δ_j 是非负标量, e_j 是第 j 个坐标轴的单位向量。

令 $C_{l+1,l} \in R^{(l+1) \times l}$ 是一个下双对角矩阵,其上 $l \times l$ 子矩

阵为 C_l 且最后一行为 $\delta_{l+1} e_l$,它们都为(18)方程递推产生。取 $C_{l,l+1}$ 的 QR-分解,将产生一个正交矩阵和一个上三角 $l \times l$ 矩阵一记为 $\tilde{C}_l$ 。给定 $C_{l,l+1}$ 矩阵,QR-分解计算可通过 l 个 Given 旋转变换计算(见文[6])。因此 $\tilde{C}_l$ 计算的时间复杂性为 $O(l)$ 。取 $\tilde{C}_{l,l-1}$ 为 $\tilde{C}_l$ 的上 $l \times (l-1)$ 子矩阵。

定理 1 对于(15)式,由基于测度 $\omega(t)$ 的 l 点 Gauss 积分计算:

$$g_l(\phi) = \mu^2 \|Y\|^2 e_l^T \phi(C_l C_l^T) e_l$$

$$= \mu^2 \|Y\|^2 e_l^T (C_l C_l^T + \mu I_l)^{-2} e_l \quad (19)$$

定理 2 对于(15)式,由基于测度 $\omega(t)$ 的 l 点的 Gauss-Radau 积分计算,且有一个指定节点在原点,则

$$R_l(\phi) = \mu^2 \|Y\|^2 e_l^T \phi(C_{l+1,l} C_{l+1,l}^T) e_l$$

$$= \mu^2 \|Y\|^2 e_l^T (C_{l+1,l} C_{l+1,l}^T + \mu I_{l+1})^{-2} e_l \quad (20)$$

I_l 表示单位矩阵。上述两个定理的证明请参考文[6]。

下面我们讨论(15)式积分的上下界。令 ϕ 是 $2l$ 阶可微函数。由文[7]引入积分误差

$$E_g(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) d\omega(t) - g_l(\phi)$$

$$= \frac{\phi^{(2l)}(\theta_g)}{(2l)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^l (t - \theta_i)^2 d\omega(t) \quad (21)$$

$\phi^{(j)}$ 为函数 ϕ 的 j 阶导数。存在 $\theta_g (\lambda_1 \leq \theta_g \leq \lambda_m)$ 。同理,存在 $\theta_R (\lambda_1 \leq \theta_R \leq \lambda_n)$ 则

$$E_R(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) d\omega(t) - R_l(\phi)$$

$$= \frac{\phi^{(2l-1)}(\theta_R)}{(2l-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t \prod_{i=1}^l (t - \bar{\theta}_i)^2 d\omega(t) \quad (22)$$

定理 3 设 $\mu > 0$ 和 $l \geq 1$, 则

$$E_g(\phi) > 0, E_R(\phi) < 0 \quad (23)$$

证明: $\because \phi^{(j)}(t) = (-1)^j (j+1)! (t+\mu)^{-j-2}$

$\therefore t > 0$ 时, $\phi^{(2l-1)} < 0, \phi^{2l} > 0$

将上述不等式代入(21)和(22)式,且测度 $\omega(t)$ 大于 0,有(23)式成立。证毕。

由(23)式得出

$$g_l(\phi) \leq q_\mu \leq R_{l+1}(\phi) \quad (24)$$

同理,我们有关于测度 $\hat{\omega}(t)$, 计算 p_μ 的 l 次的 Gauss 积分和 Gauss-Radau 积分(16):

$$\hat{g}_l(\phi) = \|W^T Y\|^2 e_l^T \phi(\tilde{C}_l \tilde{C}_l^T) e_l$$

$$\hat{R}_l(\phi) = \|W^T Y\|^2 e_l^T \phi(\tilde{C}_{l,l-1} \tilde{C}_{l,l-1}^T) e_l \quad (25)$$

$$\hat{g}_l(\phi) \leq p_\mu \leq \hat{R}_l(\phi) \quad (26)$$

对于 p_μ 的导数:

$$\hat{g}_l(\psi) \leq p_\mu' \leq \hat{R}_l(\psi) \quad (27)$$

$$\hat{g}_l(\psi) = 2 \|W^T Y\|^2 e_l^T \psi(\tilde{C}_{l,l-1} \tilde{C}_{l,l-1}^T) e_l$$

$$\hat{R}_l(\psi) = 2 \|W^T Y\|^2 e_l^T \psi(\tilde{C}_l \tilde{C}_l^T) e_l \quad (28)$$

计算 Gauss 积分须先计算向量

$$y := (C_l C_l^T + \mu I_l)^{-1} e_l$$

该向量的计算可通过下列最小二乘问题的解求:

$$\min_{y \in R^l} \left\| \begin{bmatrix} C_l^T \\ \mu^{1/2} I_l \end{bmatrix} y - \mu^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ e_l \end{bmatrix} \right\|^2, \bar{0} \in R^l$$

Elden^[10] 描述了如何借助 Given 旋转变换来高效计算上述最小二乘问题,其计算时间复杂性是 $O(l)$ 级浮点乘法运算。我们注意到,矩阵 C_l 独立于正则化参数 μ 。因此给定该矩阵,对于每个正则化参数 μ , Gauss 积分的计算时间复杂性是 $O(l)$ 级浮点乘法运算。根据文[11],计算一个正则化参数时间复杂性是 $O(N^2)$ 级浮点乘法运算,而 l 远远小于 N 。因此,基于 Gauss 积分方法的计算代价是相当低的。

引入下列量:

$$\begin{aligned} q_{\mu}^{-} &:=(g_l(\phi))^{1/2}, q_{\mu}^{+}:=(R_{l+1}(\phi))^{1/2}, \\ p_{\mu}^{-} &:=(\hat{g}_l(\phi))^{1/2}, p_{\mu}^{+}:=(\hat{R}_l(\phi))^{1/2}, \\ (p'_{\mu})^{-} &=\hat{R}(\psi), (p'_{\mu})^{+}:=\hat{g}_l(\psi) \end{aligned} \quad (29)$$

可确定 L-curve 的曲率界。引入两个辅助量:

$$\tau_{\mu}:=2 \frac{p_{\mu} q_{\mu}}{(\mu^2 q_{\mu}^2 + p_{\mu}^2)^{3/2}}, \xi_{\mu}=\mu q_{\mu} + \mu^2 p_{\mu} + q_{\mu} \frac{p_{\mu}}{p'_{\mu}}$$

带入(13)式,产生

$$k_{\mu}=\tau_{\mu} \xi_{\mu}$$

令

$$\tau_{\mu}^{-}:=2 \frac{p_{\mu}^{-} q_{\mu}^{-}}{(\mu^2 (q_{\mu}^{-})^2 + (p_{\mu}^{-})^2)^{3/2}}$$

$$\tau_{\mu}^{+}:=2 \frac{p_{\mu}^{+} q_{\mu}^{+}}{(\mu^2 (q_{\mu}^{+})^2 + (p_{\mu}^{+})^2)^{3/2}}$$

$$\xi_{\mu}^{-}=\mu q_{\mu}^{-} + \mu^2 p_{\mu}^{-} + q_{\mu}^{-} \frac{p_{\mu}^{-}}{(p'_{\mu})^{-}}$$

$$\xi_{\mu}^{+}=\mu q_{\mu}^{+} + \mu^2 p_{\mu}^{+} + q_{\mu}^{+} \frac{p_{\mu}^{+}}{(p'_{\mu})^{+}}$$

有

$$k_{\mu}^{-}=\begin{cases} \tau_{\mu}^{-} \xi_{\mu}^{-}, & \text{if } \xi_{\mu}^{-} \geq 0, \\ \tau_{\mu}^{+} \xi_{\mu}^{-}, & \text{if } \xi_{\mu}^{-} < 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$k_{\mu}^{+}=\begin{cases} \tau_{\mu}^{+} \xi_{\mu}^{+}, & \text{if } \xi_{\mu}^{+} \geq 0, \\ \tau_{\mu}^{-} \xi_{\mu}^{+}, & \text{if } \xi_{\mu}^{+} < 0 \end{cases} \quad (31)$$

得出曲率界为

$$k_{\mu}^{-} \leq k_{\mu} \leq k_{\mu}^{+} \quad (32)$$

由(12)式定义 L-curve 上点的曲率是负值,因此我们这里考虑 $-k_{\mu}$ 。我们给出曲率带的定义,即图 $\{(\mu, -k_{\mu}); \mu > 0\}$,由(32)式的端点所定义:

$$\bigcup_{\mu>0} \{(\mu, -k) : -k_{\mu}^{+} \leq k \leq k_{\mu}^{+}\} \quad (33)$$

下列算法决定由参数 $\mu_j (1 \leq j \leq N)$ 确定的曲率带。

算法 1 (Curvature-Ribbon Algorithm)

Step1 由 Lanczos 双对角化算法计算双对角矩阵 $C_{l+1,l}$ 。

Step2 对 $C_{l+1,l}$ 进行 QR 分解计算 $\hat{C}_l$ 。

Step3 for $j=1, 2, \dots, N$;

do 计算

$$g_l(\phi), \hat{g}_l(\phi), \hat{g}_l(\phi), R_{l+1}(\phi), \hat{R}_l(\phi), \hat{R}_l(\psi);$$

计算曲率界 $k_{\mu}^{\pm}$ (由公式 (30)、(31))。

end;

5 实验

下面采用一个实际拍摄的低分辨率图像序列进行实验,共 4 帧图像,取自于实验室。取第一帧为参考帧,内插因子取 2。运动模型采用平移+旋转模型,采用基于光流的方法进行运动估计。图 1(a)表示采样所得 4 帧 80×60 像素的一低分辨率图像。用双线性插值生成的放大图像显示在图 1(b)。

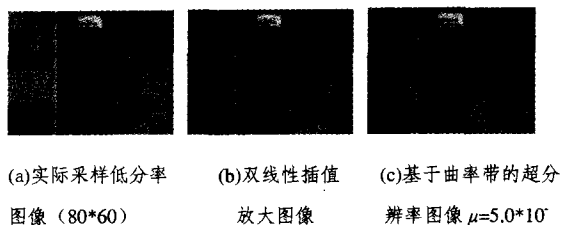


图 1 基于曲率带的超分辨率图像复原

为了确定超分辨图像复原算法中的正则化参数,我们使用曲率带方法并确定 Lanczos 双对角化算法的运行次数。正则

化参数取值在在区间 $[10^{-5}, 10^{-1}]$ 对数后的 40 等分。图 2 显示了 Lanczos 双对角化算法运行次数 $l=250, 300, 350, 400$ 时的曲率带。虚线表示 $-k_{\mu}^{-}$, 实线表示 $-k_{\mu}^{+}$ 。从图 2 我们得出曲率界是紧凑的。当迭代次数较少时,如 $l=200$, 曲线较平坦,无法确定曲率的最大值。随着迭代的增加,曲线变陡,如 $l=400$ 。我们即可确定曲线在 $\mu \approx 5.03 \times 10^{-4}$ 处有最大曲率值,即 L-curve 的拐点,它就是我们所要确定的正则化参数。从结果看,双线性插值生成的高分辨率图像图 1(b)明显模糊。图 1(c)是我们用梯度最速下降最优化和曲率带方法确定的正则化参数优化所得的超分辨率图像。用曲率带方法确定的正则化参数优化所重建的超分辨率图像结果明显好。

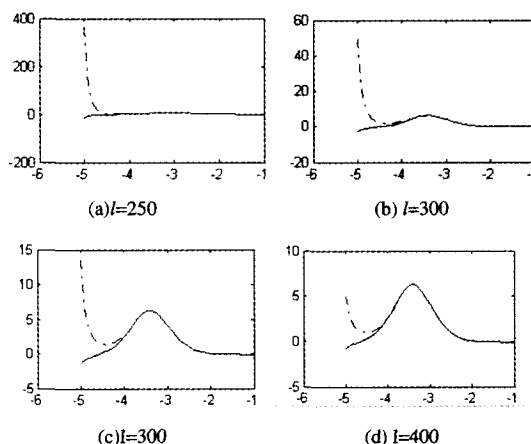


图 2 用于超分辨率图像复原的曲率带

结论 本文使用 Tikhonov 正则化方法和梯度最速下降优化方法求解超分辨率图像,我们提出基于 Curvature-Ribbon 的正则化参数快速确定方法,它只需要一次使用 Lanczos 双对角化算法,而计算每个正则化参数的上下界,只需少量的计算即可。理论和实验证明该方法计算正则化参数是快速和廉价的,对大尺度线性超分辨率图像复原问题的参数估计是有效的工具。

参考文献

- 1 Tsai R Y, Huang A K. Multi-frame image restoration and registration. In As advances in Computer Vision and Image Processing, 1984, 1:317~339
- 2 Park S C, Park M K, Kang M G. Super-resolution Image Reconstruction: A Technical Overview. IEEE Signal Processing Magazine, May 2003, 21~36
- 3 Nguyen N, Milanfar P, Golub G. Efficient Generalized Cross-Validation with Applications to Parametric Image and Resolution Enhancement. IEEE Trans on Image Processing, 2001, 10(9):1299~1308
- 4 Molina R, Vega M, Abad J, et al. Parameter Estimation in Bayesian High-Resolution Image Reconstruction with Multisensors. IEEE Trans on Image Processing, 2003, 12(12):1655~1667
- 5 Elad M, Feuer A. Restoration of a Single Super-resolution Image from Several Blurred, Noisy, and Under-sampled Measured Images. IEEE Trans IP, 1997, 6(12):1646~1658
- 6 Calvetti D, Reichel G H L. Estimation on the L-curve via Lanczos Bidiagonalization. Bit, 1999, 39(4):603~669
- 7 Bai Z, Fahey M, Golub G. Some large-scale matrix computation problems. J Computing Appl Math, 1996, 74:71~89
- 8 Golub G, Meurant G. Matrices, moments, and quadrature. 1993, In: Griffiths D F, Watson G A, eds. Numerical Analysis, Longman, Essex, U K, 1994
- 9 Golub G, von Matt U. Generalized cross-validation for large-scale problems. J Computing Graph Statist, 1997, 6:1~34
- 10 Elden L. Algorithms for the Regularization of Ill-conditioned Least Squares Problems. Bit, 1997, 17:134~145
- 11 张新明. 超分辨率图像复原的研究:[博士论文]. 北京:北京工业大学, 2002