

一种对 IMM 真实误差二阶距的估计方法

曲彦文 杨静宇

(南京理工大学计算机科学与技术学院 南京 210094)

摘要 交互式多模型 IMM 被认为是对混合系统估计的一种性价比最好的算法之一。考虑到各个模型之间的相关性,在假设已知真实模式序列的情况下,本文提出了一种对 IMM 真实误差均值、协方差以及二阶距的估计方法。在 Monte-Carlo 仿真实验下用真实误差二阶距的均值平方根来评估 IMM 的性能,并与 RMSE 进行了比较。另外对该方法在跟踪门设计中的应用前景进行了展望。

关键词 混合系统,交互式多模型,卡尔曼滤波器,误差二阶距

An Approach to Estimate the True Error Second-order Moment of IMM

QU Yan-Wen YANG Jing-Yu

(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract The interacting multiple model method IMM has been shown to be one of the most cost-effective algorithm for the estimation of hybrid system. Here the dependence relation between models is taken into account, and an approach which estimates the true errors' mean, covariance, and second-order moment is proposed under the assumption that the true mode sequence is known. The root mean of the true error second-order moment is used to estimate the performance of IMM and compared with RMSE via Monte-Carlo simulations. The future application of this approach to tracking gate design is also prospected.

Keywords Hybrid system, IMM, Kalman filter, Error second-order moment.

交互式多模型^[1] (Interacting Multiple Model IMM) 自 Blom 提出以来,受到了广泛的研究与应用,并被认为是解决混合系统^[2]的一种性价比最好的方法之一^[3]。

通常采用 Monte-Carlo 仿真得到的 RMSE(或 MSE)^[4] 来评估 IMM 的性能, Li 提出了一种非仿真下的性能评估方法^[3]。在无偏估计时误差协方差也是评估 IMM 性能的一个重要参考量,然而真实模式序列未知的情况下,由 IMM 计算得到的误差协方差 (Error Covariance calculated via IMM, ECI) 通常与真实误差协方差 (True Error Covariance TEC) 不同,并且真实误差均值 (True Error Mean TEM) 可能不为零。本文在假设真实模式序列已知条件下对真实误差二阶距 (True Error Second-order Moment TESM) 进行估计,并用 Monte-Carlo 仿真实验下 TESM 的均值 (Mean of the True Error Second-order Moment MTESM) 平方根 (root MTESM) 对 IMM 性能进行评估。

本文第 1 节介绍本文采用的混合系统,第 2 节介绍如何估计 IMM 的 TESM,第 3 节仿真实验,最后是总结。

1 混合系统介绍

本文参考文献[3]中介绍的混合系统 (hybrid system)。为一致性起见,这里采用其中的部分符号。设 x 表示基础状态向量; z 为测量向量; m_k 表示第 k 次采样周期中起作用的模式; $v(k, m_k), w(k, m_k)$ 为系统噪声与测量噪声; π_{ij} 表示从模式 i 转移到模式 j 的转移概率; M 为模型集合; 0 表示零向量或矩阵;并且假设所有向量与矩阵的维数都合适。

系统状态转移方程和测量方程为:

$$x(k+1) = F(k, m_k)x(k) + \Gamma(k, m)v(k, m) \quad (1)$$

$$z(k) = H(k, m_k)x(k) + w(k, m_k) \quad (2)$$

相关假设:1, 真实模式序列已知;2, 式(1)和(2)为线性方程;3, 每一个基于单独模型的滤波器为卡尔曼滤波器;4, $v(k, m_k)$ 与 $w(k, m_k)$ 均为相互独立的高斯白噪声, 概率分布分别为 $v(k, m_k) \sim N(0, Q(m_k))$, $w(k, m_k) \sim N(0, R(m_k))$;5, 模式概率转移服从时齐马尔科夫过程。

2 对真实误差二阶距的估计方法

下面讨论在已知到时刻 k 的真实模式序列 $m^k = \{m_1, \dots, m_k\}$ 以及测量序列 $z^k = \{z(1), \dots, z(k)\}$ 情况下对 TESM 的估计。由于各个模型的估计值之间存在着交互,因此各个模型之间存在着相关性,与以往的方法^[3,5]不同之处在于,下面介绍的估计方法是基于这种相关性提出的。

结论 1 若对随机量 x 有 r 个估计 $x_i, i=1, \dots, r$, 且每一个估计 x_i 的误差 e_i 的均值 m_i , 任意 e_i, e_j 之间的协方差 P_{ij} 已知, 则估计:

$$x^j = \sum_{i=1}^r x_i \mu_i^j \quad \text{其中} \sum_{i=1}^r \mu_i^j = 1 \text{ 且} \forall i, \mu_i^j \geq 0 \quad (3)$$

的误差 e^j 的均值 m^j 为:

$$m^j = \sum_{i=1}^r \mu_i^j m_i \quad (4)$$

任意符合式(3)的两个估计 x^1, x^2 的误差 e^1, e^2 之间的协方差 P 为:

$$P = \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \mu_i^1 \mu_l^2 P_{il} \quad (5)$$

证明:

$$m^j = E[x - x^j] = E\left[\sum_{i=1}^r \mu_i^j (x - x_i)\right] = \sum_{i=1}^r \mu_i^j m_i$$

$$P = E[(e^1 - m^1)(e^2 - m^2)^T]$$

$$\begin{aligned} &= E[(x-x^{j1}-\sum_{l=1}^n \mu_{lj}^1 m_l)(x-x^{j2}-\sum_{n=1}^n \mu_{jn}^2 m_n)^T] \\ &= E[(\sum_{l=1}^n \mu_{lj}^1 (x-x_l-m_l))(\sum_{n=1}^n \mu_{jn}^2 (x-x_n-m_n))^T] \\ &= E[\sum_{l=1}^n \sum_{n=1}^n \mu_{lj}^1 \mu_{jn}^2 (e_l-m_l)(e_n-m_n)^T] \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{n=1}^n \mu_{lj}^1 \mu_{jn}^2 P_{ln} \quad \square \end{aligned}$$

设 $x_j(k-1|k-1)$, $P_j(k-1|k-1)$, $\mu_j(k-1|k-1)$ 分别为 $k-1$ 时刻计算得到的模型 j 的状态估计, ECI, 以及后验概率, 并且知道:

每个模型 j 的估计误差 $e_{jt}(k-1|k-1)$ 的 TEM $m_{jt}(k-1|k-1)$ 。任意二个模型 i, j 估计误差 $e_{it}(k-1|k-1)$, $e_{jt}(k-1|k-1)$ 之间的 TEC $P_{ijt}(k-1|k-1)$ 。

符号带下标 t 的表示真实值估计量, 上标 T 表示转置。为简化起见, 下面结合 IMM 基本步骤给出本文提出的计算方法, IMM 中的具体计算方法与相关结论请参见文[1~3]。

步骤 1 相互作用

通过 IMM 计算得到对于任意一个模型 j 的先验概率 $\mu_j(k|k-1)$ 、混合概率 μ_{ij} 、混合状态估计 $x_{0j}(k-1)$ 及其 ECI $P_{0j}(k-1)$ 。

记模型 j 的混合状态估计误差为:

$$e_{0jt}(k-1) = x(k-1) - x_{0j}(k-1) \quad (6)$$

根据式(4)其均值 $m_{0jt}(k-1)$ 为:

$$m_{0jt}(k-1) = \sum_{i \in M} \mu_{ij} m_{it}(k-1|k-1) \quad (7)$$

根据式(5) $e_{0it}(k-1)$, $e_{0jt}(k-1)$ 之间的 TEC $P_{0ijt}(k-1)$ 为:

$$P_{0ijt}(k-1) = \sum_{l \in M_n} \sum_{n \in M} \mu_{li} \mu_{nj} P_{ln t}(k-1|k-1) \quad (8)$$

步骤 2 预测

通过 IMM 计算得到对于任意一个模型 j 的预测状态 $x_j(k|k-1)$ 及其 ECI $P_j(k|k-1)$ 。

记模型 j 的预测状态误差为:

$$\begin{aligned} e_{jt}(k|k-1) &= x(k) - x_j(k|k-1) \\ &= F_t(k-1)x(k-1) - F_j(k-1)x_{0j}(k-1) + \Gamma_t(k-1)v_t(k-1) \\ &= F_t(k-1)x(k-1) - F_t(k-1)x_{0j}(k-1) + F_t(k-1)x_{0j}(k-1) - F_j(k-1)x_{0j}(k-1) + \Gamma_t(k-1)v_t(k-1) \\ &= F_t(k-1)e_{0jt}(k-1) + F_{ij}(k-1)x_{0j}(k-1) + \Gamma_t(k-1)v_t(k-1) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $F_{ij}(k-1) = F_t(k-1) - F_j(k-1)$

$e_{jt}(k|k-1)$ 均值 $m_{jt}(k|k-1)$ 为:

$$m_{jt}(k|k-1) = F_t(k-1)m_{0jt}(k-1) + F_{ij}(k-1)x_{0j}(k-1) \quad (10)$$

步骤 3 更新

通过 IMM 计算得到对于任意一个模型 j 的新息 $v_j(k)$ 、新息协方差 $S_j(k)$ 、卡尔曼增益 K_j 、后验概率 $\mu_j(k|k)$ 、状态估计 $x_j(k|k)$ 及其 ECI $P_j(k|k)$ 。

记模型 j 的状态估计误差为:

$$\begin{aligned} e_{jt}(k|k) &= x(k) - x_j(k|k) \\ &= (I - K_j H_j(k))e_{jt}(k|k-1) - K_j w_t(k) \\ &= A_j e_{0jt}(k-1) + B_j v_t(k-1) - K_j w_t(k) + C_j x_{0j}(k-1) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $A_j = (I - K_j H_j(k))F_t(k-1)$, $B_j = (I - K_j H_j(k))\Gamma_t(k-1)$, $C_j = (I - K_j H_j(k))F_{ij}(k-1)$ 。 $e_{jt}(k|k)$ 的均值 $m_{jt}(k|k)$

$k)$ 为:

$$m_{jt}(k|k) = A_j m_{0jt}(k-1) + C_j x_{0j}(k-1) \quad (12)$$

根据假设 $4e_{it}(k|k)$, $e_{jt}(k|k)$ 之间的 TEC $P_{ijt}(k|k)$ 为:

$$\begin{aligned} P_{ijt}(k|k) &= E[(e_{it}(k|k) - m_{it}(k|k))(e_{jt}(k|k) - m_{jt}(k|k))^T] \\ &= E[(A_i(e_{0it}(k-1) - m_{0it}(k-1)) + B_i v_i(k-1) - K_i w_i(k))(A_j(e_{0jt}(k-1) - m_{0jt}(k-1)) + B_j v_j(k-1) - K_j w_j(k))^T] \\ &= A_i P_{0ijt}(k-1) A_j^T + B_i Q_i(k-1) B_j^T + K_i R_i(k) K_j^T \end{aligned} \quad (13)$$

步骤 4 联合

通过 IMM 计算得到联合状态估计 $x(k|k)$ 及其 ECI $P(k|k)$ 。

记联合状态估计误差为:

$$\begin{aligned} e_t(k|k) &= x(k) - x(k|k) \\ &= \sum_{j \in M} \mu_j(k|k) e_{jt}(k|k) \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(4)其 TEM $m_t(k|k)$ 为:

$$m_t(k|k) = \sum_{j \in M} \mu_j(k|k) m_{jt}(k|k) \quad (15)$$

根据式(5)其 TEC $P_t(k|k)$ 为:

$$P_t(k|k) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in M} \mu_i(k|k) \mu_j(k|k) P_{ijt}(k|k) \quad (16)$$

其 TESM $S^m(k)$ 为:

$$S^m(k) = P_t(k|k) + m_t(k|k) m_t(k|k)^T \quad (17)$$

上述方法得到的 TESM 是在条件 z^k 和 m^k 下获得的。由于 z^k 本身是在条件 m^k 下的一个随机量, 因此通过一次仿真实验获得的 TESM 只是 m^k 下的一种可能。如果需要估计条件 m^k 下的 TESM, 则用多次仿真实验得到 MTESM。

3 仿真实验

本文用 3 个模型组成 IMM。模型 1 与模型 3 为固定转向模型(Constant Turn CT)^[6], 固定转率分别为 $-9^\circ/s$, $9^\circ/s$ 。模型 2 为近似匀速直线运动模型(nearly Constant Velocity CV)^[6], CV 模型可以认为是固定转率为 $0^\circ/s$ 的 CT 模型。获得的测量数据为带噪 X, Y 位置。3 个模型的系统噪声与测量噪声的方差分别为 $Q=2^2 I_{2 \times 2}$, $R=1^2 I_{2 \times 2}$ 。基础状态向量为 $x(k) = [x^c(k), x^v(k), y^c(k), y^v(k)]^T$, $x^c(k)$, $y^c(k)$ 表示 X, Y 轴上的位置, $x^v(k)$, $y^v(k)$ 表示 X, Y 轴上的速度。式(1)和(2)中的 F , Γ , H 别为:

$$F_{j=2} = \text{diag}(F_{CV}, F_{CV}) \quad F_{CV} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$F_{j=1,3} = F_{CT}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 & -\frac{1 - \cos \omega T}{\omega} \\ 0 & \cos \omega T & 0 & -\sin \omega T \\ 0 & \frac{1 - \cos \omega T}{\omega} & 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} \\ 0 & \sin \omega T & 0 & \cos \omega T \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

T 为采样周期间隔, 这里设 $T=1s$ 。模型初始概率为 $\mu_1(0|0)=0.3$, $\mu_2(0|0)=0.4$, $\mu_3(0|0)=0.3$, 初始基础状态均为 $[30 \ 10 \ 20 \ 3]^T$ 。各模型平均逗留时间为 10s, 概率转移矩

阵根据^[7]设为:

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}$$

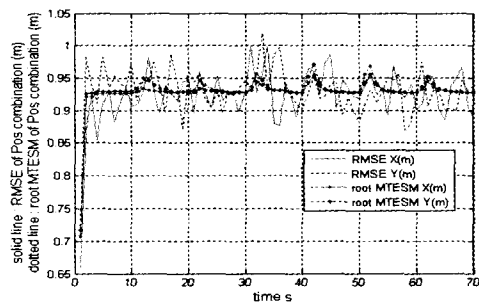
每一个模型 j 的 $P_j(0|0)$, 以及任意两个模型 i, j 之间的 $P_{ij}(0|0)$ 均为零矩阵。每一个模型 j 的 $m_{ji}(0|0)$ 为零向量。本文对两个场景下的情况进行仿真。场景 1 和场景 2 的说明见表 1, 它们区别在于真实转率序列不同。

场景 1 是真实模式序列中的所有模式属于 M 时的情况, 场景 2 是当真实模式序列中的模式不属于 M 时的情况。

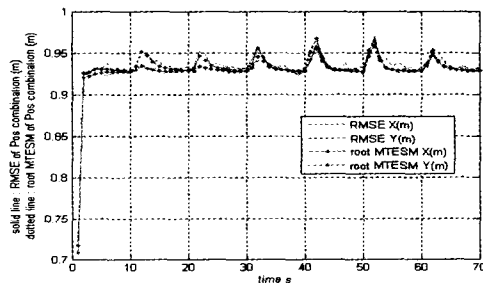
表 1 场景 1 与场景 2 下的转率 $\omega(^{\circ}/s)$ 序列

时刻 k	场景 1: $\omega(k-1)$	场景 2: $\omega(k-1)$
1-10	0	0.5
10-20	-9	-5
20-30	0	0.5
30-40	9	5
40-50	-9	-5
50-60	9	5
60-70	0	0.5

图 1 和图 2 分别给出了场景 1 和场景 2 各自在仿真次数 500 次, 50000 次下的实验结果。

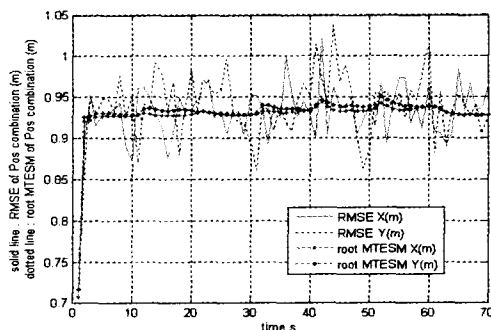


(a)500 次仿真下 X, Y 轴位置联合估计 RMSE 与 root MTESM

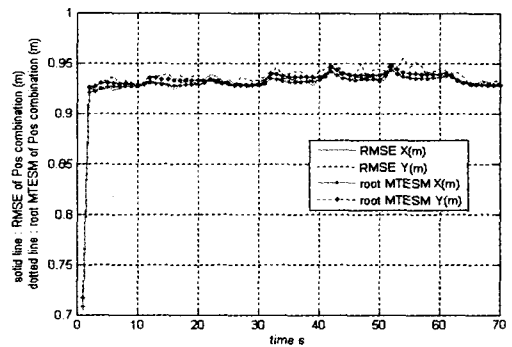


(b)50000 次仿真下 X, Y 轴位置联合估计 RMSE 与 root MTESM

图 1 场景 1 仿真实验结果



(a)500 次仿真下 X, Y 轴位置联合估计 RMSE 与 root MTESM



(b)50000 次仿真下 X, Y 轴位置联合估计 RMSE 与 root MTESM

图 2 场景 2 仿真实验结果

从实验中可以看出, root MTESM 在仿真次数 500 次与 50000 次下得到的结果图基本一致。当仿真次数少的时候(如 500 次), RMSE 结果图波动很大, 随着仿真次数增加 RMSE 结果图变的平滑, 并且有趋向 root MTESM 结果图的趋势。虽然使用 root MTESM 评估的计算复杂度增加, 当仅用少量的仿真实验便可以很好地反映 IMM 的性能。

结论 本文提出了一种在已知真实模式序列的情况下, 基于模型之间的相关性利用迭代的方式对 IMM 真实误差二阶距进行估计, 该方法稍加改变可以应用到其他多模型算法中。两组场景下 Monte-Carlo 仿真实验表明 root MTESM 可以很好地反映出 IMM 的性能。

此外真实模式序列未知的情况下的误差二阶距估计可被用来改进多目标跟踪算法, 特别是用在改进跟踪门的估计上^[5]。Li 讨论了在模式空间是连续区域的情况下使用期望模型(Expected-Mode)来逼近真实模式的方法^[8], 如何将本文提出的方法与之结合应用到对跟踪门的改进中将是以后可以研究的问题。

参考文献

- Blom H A P, Bar-Shalom Y. The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients [J]. IEEE trans on Automatic Control (S0018-9286), 1988, 33(8): 780~783
- Li X R, Jilkov V P. Survey of Maneuvering Target Tracking. Part V: Multiple-Model Methods [J]. IEEE trans on Aerospace and Electronic Systems (s0018-9251), 2005, 43(4): 1255~1321
- Li X R, Bar-Shalom Y. Performance Prediction of the Interacting Multiple Model Algorithm [J]. IEEE trans on Aerospace and Electronic Systems (s0018-9251), 1993, 39(3): 775~771
- Li X R. Measures of performance for evaluation of estimators and filters [C]. In: Proceedings of SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets. San Diego, CA, USA, July-August 2001
- Wang X Z, Challa S, Evans R. Gating Techniques for Maneuvering Target Tracking in Clutter [J]. IEEE trans on Aerospace and electronic systems (s0018-9251), 2002, 38(3): 1087~1097
- Li X R. A Survey of maneuvering target tracking. Part I Dynamic models [J]. IEEE trans on Aerospace and Electronic Systems (s0018-9251), 2003, 39(4): 1333~1364
- Kirubarajan T, Bar-Shalom Y. Kalman Filter Versus IMM Estimator; When Do We Need the Latter? [J]. IEEE trans on Aerospace and electronic systems (s0018-9251), 2003, 39(4): 1452~1457
- Li X R, Jilkov V P. Expected-Mode Augmentation for Multiple-Model Estimation [C]. In: Proceeding of the 2001 International Conference on Information Fusion, Montreal, Canada, Aug. 2001 Web1.3-Web1.10