基于设施选址的 Steiner 问题的算法*)

王继强[1,2] 李国君[1]

(山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)[1] (山东财政学院统计与数理学院 济南 250014)[2]

摘 要 在设施选址问题的基础上给出了广义 Steiner 树-星问题的两个近似比分别为 3.55 和 3.582 的近似算法，并在问题转化的基础上研究了其他若干特殊情形的 Steiner 树问题的近似算法。

关键词 Steiner 树-星，设施选址，近似算法，问题转化

Algorithms Based on Facility Location for Steiner Problems

WANG Ji-Qiang[1,2] LI Guo-Jun[1]

(School of Math. and System Science, Shandong University, Jinan 250100)[1]

(College of Statistics and Math., Shandong Finance Institute, Jinan 250014)[2]

Abstract As one kind of NP-hard optimization problem, the Steiner tree problem intents to find a minimum cost tree that satisfies some special requirement in an edge or vertex-weighted graph. Two approximation algorithms, based on the facility location problems, with approximation ratio 3.55 and 3.582, respectively, for the generalized Steiner tree-star problem are presented. Additionally, approximation algorithms for some special cases of the Steiner tree problem are studied based on problems transformation.

Keywords Steiner tree-star, Facility location, Approximation algorithm, Problem transformation

1 引言

先介绍一个网络设计问题—Steiner 树问题(STP)。设完全图 $G=(V,E)$ 中，边 (i,j) 的权为 $w_{ij}\geqslant 0$，且满足对称性和三角形不等式。$X\subseteq V$，$V\backslash X$ 中的顶点分别称为终端点和 Steiner 点。包含所有终端点(也可能包含若干 Steiner 点)的树称为 G 的 Steiner 树，其费用定义为树的所有边的权之和。问题是：找图的一个费用最小的 Steiner 树。

Steiner 树问题在超大规模集成电路(VLSI)设计、生物学上基因树的重构、通信网络设计等领域都有着非常重要的应用。遗憾的是，此问题是 NP-困难的[1]，即它不存在多项式时间的精确算法，除非 $P=NP$。近似算法是解决此类问题的重要方法之一。目前已知的最好算法是 Robins 和 Zelikovsky 给出的一个 1.55-近似算法[2]。

再介绍与 STP 密切相关的广义 Steiner 树-星问题(*STSP*)：在 *STP* 的基础上，赋予顶点 i 以权 $w_i\geqslant 0$。取 $Y\subseteq V$ 为 Steiner 点集，不要求 $X\cap Y=\Phi$。Steiner 树的费用定义为其边权与所有分枝点(除叶外的其余顶点)的权之和。问题是：找图 G 的一个费用最小的 Steiner 树 T，使得 T 的分枝点仅能来自 Y。

显然，*STSP* 也是 NP-困难的。Khuller 和 Zhu 给出了近似比分别为 12 和 5.16 的近似算法[3]。下面介绍我们在其基础上设计的改进算法。

2 基于 *CFLP* 的算法

为保持论述的完整性，先介绍设施选址问题(*FLP*)：设 N 是一些地址的集合，$F,C\subseteq N$ 分别为设施的地址集和顾客集，$|F|=n$，可从 F 中择址建造某种设施以便为顾客 C 提供服务。在地址 $i\in F$ 处建造设施的费用(称为开设费用)为 $f_i\geqslant 0$，为顾客 $j\in C$ 提供服务的费用(称为连结费用，可视为 i 与 j 之间的最短路的长度)为 $c_{ij}\geqslant 0$，且满足对称性和三角形不等式。问：应如何开设设施并连结设施与顾客，才能使得每一顾客都恰与一个设施相连结，且开设费用与连结费用之和最小?

在 *FLP* 的基础上，若要求用一个 Steiner 树来连通各个已开设的设施，并使得开设费用+连结费用+$M\cdot$Steiner 树的费用之和最小，其中 $M\geqslant 1$ 是一个参数。这就是连通的设施选址问题(*CFLP*)。*CFLP* 是 NP-困难的，目前已知的最好算法是 Gupta, Kumar 和 Roughgarden 给出的一个 3.55-近似算法[4]。

若令 $G=(V,E)$ 是一个以 $V=N$ 为顶点集的完全图，$X=C$，$Y=F$，$w_{ij}=c_{ij}$，$w_i=f_i$，$M=1$，则 *STSP* 即可等价地转化为 *CFLP*，故 *CFLP* 的 3.55-近似算法对 *STSP* 也是适用的。

3 基于 *FLP* 的算法

若令 0-1 变量 $y_i=1\Leftrightarrow$ 在地址 i 处开设设施，$x_{ij}=1\Leftrightarrow$ 顾客 j 与设施 i 相连结，则可如下建立 *FLP* 的整数规划模型

$$(IP):\begin{cases}\min & \sum\limits_{i\in F}f_iy_i+\sum\limits_{i\in F}\sum\limits_{j\in C}c_{ij}x_{ij}\\ \text{s.t.} & \sum\limits_{i\in F}x_{ij}\geqslant 1,\ \forall j\in C\\ & x_{ij}\leqslant y_i,\ \forall i\in F,j\in C\\ & y_i=0,1,\ \forall i\in F\\ & x_{ij}=0,1,\ \forall i\in F,j\in C\end{cases}$$

将(*IP*)的最后两个约束条件改为"$y_i\geqslant 0$, $\forall i\in F$; $x_{ij}\geqslant$

*) 国家自然科学基金(10271065)资助。**王继强** 博士生，讲师，研究方向为 NP-困难问题的算法分析与设计；**李国君** 教授，博导，研究方向为组合最优化与理论计算机科学。

$0,\forall i\in F,j\in C$”，即得其线性规划松弛问题(LP)。

Sviridenko 通过解(LP)并对其最优解进行取整得到了FLP的一个1.582-近似解[5]。如同 Khuller 和 Zhu 的做法，可先将$STSP$转化为一个FLP，利用上述1.582-近似算法解之，再用一个最小费用支撑树来连通各个已开设的设施即可。不难看出，只需令$N=V,F=Y,C=X,c_{ij}=w_{ij},f_i=w_i$，即可将$STSP$转化为$FLP$；但需另外要求各个已开设的设施相互连通。

设利用线性规划算法解(LP)得最优解$\{y_i,x_{ij}\}$。$\forall j\in C$，将$c_{ij}(i\in F)$按不减的顺序排列：$c_{i_1j},c_{i_2j},\cdots,c_{i_nj}$，并按相同的顺序将$x_{ij}(i\in F)$排列：$x_{i_1j},x_{i_2j},\cdots,x_{i_nj}$。取$\alpha\in[0,1]$，$i^*=\min\{i_k\mid\sum_{i=i_1}^{i_k}x_{ij}\geqslant\alpha\}$，令$N_j(\alpha)=\{i_1,\cdots,i^*\}$，称之为$j$的领域，定义其半径为$\tau_j(\alpha)=c_{i^*j}$[3,5]。

在上述讨论的基础上，设计$STSP$的算法如下：

1)令$D:=\Phi,S:=\Phi$。

2)利用线性规划算法解(LP)得最优解$\{y_i,x_{ij}\}$。

3)若所有顾客都已与某一设施相连通，则转4；否则，令$j'=\arg\min_{j\in C}\{\tau_j(\alpha)\mid j$未与任一设施相连通$\}$，$c_{i^*j'}=\tau_{j'}(\alpha)$，在$i^*$处开设设施；$D:=D\cup\{j'\},S:=s\cup\{i^*\}$。当$\exists j\in C$，使$N_j(\alpha)\cap N_{j'}(\alpha)\neq\Phi$，将$j$与$i^*$连通。

4)找以S为顶点集的最小支撑树以连通S。

4 算法的分析

先来分析算法的时间复杂性：在算法中，步2和4都有多项式时间的精确算法，而步3显然也可在有限次运算内结束，故该算法总可在多项式时间内完成。

再来分析算法的近似性：设 STSP 的某一最优解为T，T在FLP中对应的设施开设费用为OPT_f，设施与顾客的连结费用为OPT_s，设施的连通费用为OPT_c，则其最优值为$OPT=OPT_f+OPT_s+OPT_c$；类似地，设对$STSP$使用算法得到的近似解对应的费用可作如下分解：$C=C_f+C_s+C_c$；再设(IP)，(LP)的最优解对应的最优值分别为OPT_{IP}，OPT_{LP}，则由二者可行域的关系知，$OPT_{LP}\leqslant OPT_{IP}=OPT_f+OPT_s\leqslant OPT$。

引理1[3] (1)$C_f\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum_{i\in F}f_iy_i$；(2)$C_s\leqslant\sum_{j\in D}\tau_j(\alpha)+3\sum_{j\notin D}\tau_j(\alpha)$；(3)$C_c\leqslant 2(OPT_s+OPT_c+OPT_c+\sum_{j\in D}\tau_j(\alpha))$。

引理2 $C\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum_{i\in F}f_iy_i+3\sum_{j\in C}\tau_j(\alpha)+2(OPT_s+OPT_c)$。

证明：由引理1有，

$$C=C_f+C_s+C_c\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum_{i\in F}f_iy_i+3(\sum_{j\in D}\tau_j(\alpha)+3\sum_{j\notin D}\tau_j(\alpha))+2(OPT_s+OPT_c)$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{i\in F}f_iy_i+3\sum_{j\in C}\tau_j(\alpha)+2(OPT_s+OPT_c)$$

引理3[5] FLP存在一个1.582-近似算法。

据此，有$\frac{1}{\alpha}\sum_{i\in F}f_iy_i+3\sum_{j\in C}\tau_j(\alpha)\leqslant 1.582(OPT_f+OPT_s)$。

定理4 $STSP$的算法是一个3.582-近似算法。

证明：由引理2及以上讨论有，

$$C\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum_{i\in F}f_iy_i+3\sum_{j\in C}\tau_j(\alpha)+2(OPT_s+OPT_c)\leqslant 1.582(OPT_f+OPT_s)+2(OPT_s+OPT_c)\leqslant 1.582OPT_f+3.582OPT_s+2OPT_c\leqslant 3.582(OPT_f+OPT_s+OPT_c)=3.582OPT。$$

5 其它相关的 Steiner 问题

k-最小支撑树问题(k-MSTP)：在STP的基础上，对给定的$k\in Z$，找图G的一个至少包含k个顶点的费用最小的树。

Prize Collecting Steiner 树问题($PCSTP$)：在STP的基础上，赋予顶点$i\in V$以权$w_i\geqslant 0$。对给定的$Q>0$，找图G的一个费用最小的树，使得其点权之和$\geqslant Q$。

k-Steiner 树问题(k-STP)：在STP的基础上，对给定的$k\in Z,k\leqslant|X|$，找图G的一个至少包含k个终端点的费用最小的树。

目前已知的k-$MSTP$的最好算法是 Garg 给出的一个2-近似算法[6]，k-STP的最好算法是 Chudak 等给出的一个4-近似算法[7]。

三者之间有如下关系：

定理5 k-$MSTP$的一个多项式时间ρ-近似算法导出$PCSTP$的一个多项式时间ρ-近似算法。

证明：在$PCSTP$中，$\forall i\in V,w_i\geqslant 0$，令$i$对应一个度为$2nw_i$的顶点$v_i$，$v_i$关联的$2nw_i$条边的权都是0，并令$k=2nQ$即可，这里，$n=|V|$。

由此，k-$MSTP$的2-近似算法将导出$PCSTP$的一个2-近似算法。

定理6[8] k-$MSTP$的一个多项式时间ρ-近似算法导出k-STP的一个多项式时间2ρ-近似算法，由此，k-$MSTP$的2-近似算法将导出k-STP的一个4-近似算法。

定理7 $PCSTP$的一个多项式时间ρ-近似算法导出k-STP的一个多项式时间ρ-近似算法。

证明：在k-STP中，令$w_i=\begin{cases}1,i\in X\\0,I\in V\backslash X'\end{cases}$，$Q=k$即可。

由此，$PCSTP$的2-近似算法将导出k-STP的一个2-近似算法。

结束语 本文在 Khuller 和 Zhu 的算法的基础上设计了广义 Steiner 树-星问题的两个近似比更好的近似算法，并研究了其它几种特殊情形的 Steiner 问题的算法。

参考文献

1 Garey M R, Graham R L, Johnson D S. The complexity of computing Steiner minimal trees. SIAM J. Appl. Math., 1977, 32: 835~59

2 Robins G, Zelikovsky A. Improved Steiner tree approximation in graphs. In: Proceedings of the 11th annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm, 2000. 770~779

3 Khuller S, Zhu A. The general tree-star problem. Information Processing Letters, 2002, 84(4): 215~202

4 Gupta A, Kumar A, Roughgarden T. Simpler and better approximation algorithms for network design. In: Proceedings of the 35th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 2003. 365~372

5 Sviridenko M. An 1.582-approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem. In: Proceedings of the 9th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, 2002

6 Garg N. Saving an epsilon: a 2-approximation for the k-mst problem in graphs. In: Proceedings of the 37th annual ACM Symposium on Theory of Computing, 2005. 396~402

7 Chudak F A, Roughgarden T, Williamson D P. Approximate k-MSTs and k-Steiner trees via primal-dual method and lagrangean relaxation. In: Proceedings of the 8th International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, 2001. 60~70

8 Ravi R, Sundaram R, Marathe M V, Rosenkrantz D J, Ravi S S. Spanning trees short or small. In: Proceedings of the 5th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1994. 546~555