

求 Halin 图中给定两点之间最优 Hamilton 路的有效算法^{*}

温雪莲 娄定俊 陆芸婷 梁华金

(中山大学计算机科学系 广州 510275)

摘要 在赋权图中,求任意给定两点之间的最优(边权值之和最小)Hamilton 路问题,简称 OHP 问题,是计算机领域的一个经典算法问题,它在网络路由选择和计算机的许多领域都有广泛应用。该问题是 NP 完全的。Halin 图是对树和环网络的非平凡概括,因此求赋权 Halin 图的 OHP 问题是非常有意义的。但当前仍没找到该问题的有效算法。本文通过递归压缩 Halin 图中的扇,设计了一个求解赋权 Halin 图 OHP 的有效算法,并给出算法的正确性证明和复杂度分析。

关键词 Hamilton 路, NP 完全, Halin 图, 扇

Optimal Hamilton Path between Two Vertices in Halin Graph

WEN Xue-Lian LOU Ding-Jun LU Yun-Ting LIANG Hua-Jin

(Department of Computer Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275)

Abstract Finding the Hamilton path with minimum cost between two arbitrary given distinct vertices in a weighted graph, OHP for short, is a well known algorithm problem and has wide application in network routing and many aspects of computer science. OHP is NP complete. Halin graph is a nontrivial generalization of tree and ring network. Effective algorithm to solve OHP in Halin graph is not found until now. This paper presents an effective algorithm to solve OHP problem in Halin graph by recursively shrinking fan structure. What's more, the proof of correctness and the analysis of the complexity of the algorithm are also given.

Keywords Hamiltonian path, NP complete, Halin graph, Fan

1 引言

在赋权图中,求任意给定两点之间的最优(边权值之和最小)Hamilton 路问题,简称 OHP 问题,是 NP 完全问题,它是计算机领域的一个经典算法问题,在网络路由和计算机的许多领域都有广泛应用。Halin 图是对树和环形网络拓扑结构的非平凡概括^[1],文[2]证明 Halin 图中任意两点之间都存在一条 Hamilton 路,但至今仍然没有求赋权 Halin 图 OHP 的有效算法。本文通过递归压缩 Halin 图中的扇,设计了一个求解 Halin 图 OHP 的多项式算法,并给出算法的正确性证明和复杂度分析。

2 基本概念与符号

下面我们引入本文使用的主要概念和符号。

在平面图上嵌入一棵树 T , T 的每个内部结点的度数至少为 3 并且 T 内部至少有一个结点,作一个圈 C 连接 T 的所有叶结点, T 的所有叶结点组成 C 上的所有结点,这样得到的平面图 H 称为 Halin 图^[6](见图 1),记为 $H=TC$ 。树 T 称为 H 的特征树,圈 C 称为 H 的伴随圈。只有一个内部结点的 Halin 图称为轮。在非轮 Halin 图中,由一个其相邻结点除一个之外其它全为叶结点的内部结点和它的所有相邻的叶子结点所组成的结点的导出子图称为扇,该内部结点称为扇的中心(如图 1,虚线圈内部为扇,黑色的点为各扇的中心)。

$P(G, a, b)$ 表示图 G 中结点 a 与 b 之间所有 Hamilton 路

的集合。若 $k \geq 1$ 而且对所有 $1 \leq i \leq k$, 有 G_i 是边赋权 Halin 图, $a \in V(G_i)$ 和 $b \in V(G_i)$, 则 $OP(\{G_1, G_2, \dots, G_k\}, a, b)$ 表示 $\bigcup_{1 \leq i \leq k} P(G_i, a, b)$ 中所有最优路径的集合。Height(t) 表示树 t 的高度。 Δ 是对称差运算符。 H 表示一个边赋权的 Halin 图并且 $H=TC$ 。 $c(e)$ 和 $C(P)$ 分别表示 H 中边 e 的权值和路径 P 的花费。未定义的符号和术语均引自文[8]。

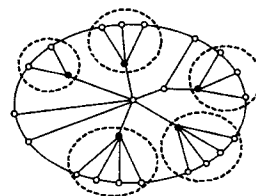


图 1 Halin 图

3 算法的主要思想

3.1 几个引理

引理 1^[3] 非轮 Halin 图至少有两个扇。

引理 2 任选 $x \in V(H)$, $y \in V(H)$ 。若 F 为 H 的扇且 $y \notin V(F)$ 。设 w 是 F 的中心; F 在圈 C 上的点按逆时针排列为 u_0, u_1, \dots, u_r ($r \geq 1$); e_i, e_j 和 e_k 为 F 与 $H-F$ 之间的边并且 $e_i = v_i u_r$, $e_j = v_j u_0$ 和 $e_k = v w$ (见图 2)。任取 $P \in OP(\{H\}, x, y)$, 则以下结论成立:

(1) 若 $x \notin V(F)$, 则 P 包含路径: $v_j u_0 u_1 \dots u_r w v, v u, u_{r-1} \dots u_0 w v$ 或 $v_j u_0 \dots u_t w u_{t+1} \dots u_r v_i$, 其中 $0 \leq t \leq r-1$ 并且 $C(u_0$

^{*} 基金项目:广东省科技厅工业攻关资助项目(A10103)。温雪莲 博士研究生,研究方向:图论与算法。

$$\dots u_r w u_{t+1} \dots u_r) = \min\{C(u_0 \dots u_t w u_{t+1} \dots u_r); 0 \leq t \leq r-1\}.$$

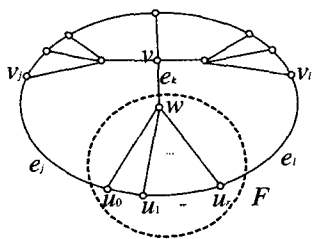


图2 H和扇F

(2)若 $x=u_s, 0 \leq s < r$, 则 P 中包含下列四种路径之一:

(i) $xu_{s-1}u_{s-2} \dots u_0 w u_{s+1}u_{s+2} \dots u_r v_l$; (ii) $xu_{s-1}u_{s-2} \dots u_0 - v_j$ 和 $w u_{s+1}u_{s+2} \dots u_r v_l$; (iii) $xu_{s+1}u_{s+2} \dots u_r w u_{s-1}u_{s-2} \dots u_0 - v_j$; (iv) $xu_{s+1}u_{s+2} \dots u_r v_l$ 和 $w u_{s-1}u_{s-2} \dots u_0 v_j$.

(3)若 $x=u_0$, 则 P 包含以下三种路径之一: (i) $x \dots u_t - w u_{t+1} \dots u_r v_l$, 其中 $0 \leq t \leq r-1$ 并且 $C(x \dots u_t w u_{t+1} \dots u_r) = \min\{C(x \dots u_t w u_{t+1} \dots u_r); 0 \leq t \leq r-1\}$; (ii) $xu_1 u_2 \dots u_r w v$; (iii) xv_j 和 $w u_1 u_2 \dots u_r v_l$.

(4)若 $x=u_r$, 则 P 包含以下三种路径之一: (i) $x \dots u_{t+1} w u_t \dots u_0 v_j$ 其中 $0 \leq t \leq r-1$ 并且 $C(x \dots u_{t+1} w u_t \dots u_0) = \min\{C(x \dots u_{t+1} w u_t \dots u_0); 0 \leq t \leq r-1\}$; (ii) $xu_{r-1}u_{r-2} \dots u_0 w v$; (iii) xv_l 和 $w u_{r-1}u_{r-2} \dots u_0 v_j$.

(5)若 $x=w$ 并且 $y \neq v$, 则 P 包含以下三种路径之一: (i) $xu_0 u_1 \dots u_r v_l$; (ii) $xu_r u_{r-1} \dots u_0 v_j$; (iii) xv 和 $v_j u_0 - u_1 \dots u_r v_l$.

(6)若 $x=w$ 并且 $y=v$, 则 P 包含路径 $xu_0 u_1 \dots u_r v_l$ 或 $xu_r u_{r-1} \dots u_0 v_j$.

证明:由 P 必须覆盖 F 中所有结点易得. \square

3.2 扇压缩操作的定义

对 H 中任意给定的两个结点 x 和 y . 下面定义一种与结点 x 和 y 在图中位置相关的扇压缩操作, 记为 $\times_{x,y}$. $H \times_{x,y} F$ 表示将压缩操作 $\times_{x,y}$ 作用于 H 中的扇 F , 简称 $\times_{x,y}$ 压缩扇 F , 其结果是若干个 Hain 图的集合. 设 w 是 F 的中心, F 在圈 C 上的点按逆时针排列为 $u_0, u_1, \dots, u_r (r \geq 1)$, e_l, e_j 和 e_k 为 F 与 $H-F$ 之间的边并且 $e_l = v_l u_r, e_j = v_j u_0$ 和 $e_k = v w$ (见图 2). 令正整数 S 满足 $S > \sum_{e \in E(H)} |c(e)|$. 下面根据 x 和 y 的不同位置给出 $H \times_{x,y} F$ 的定义.

Case 1: $x \notin V(F)$ 且 $y \notin V(F)$

定义 $H \times_{x,y} F = \{H_1\}$ (见图 3). 图 H_1 是由 H 经过如下变化得到: 用一个新的结点 w' 取代扇 F ; 对 H 中只有一个端点落在 F 中的边, 其落在 F 中的端点改为结点 w' , 而 $H-F$ 中的边不变. 方法同文[3].

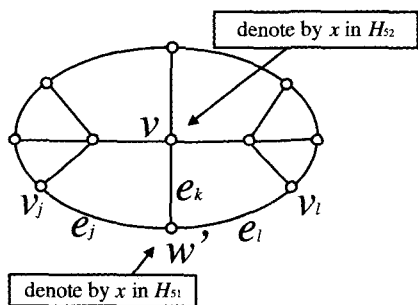


图3 $H_1(H_{51}, H_{52}, H_6)$

令 $C_{jk} = C(u_0 u_1 \dots u_r w), C_{kl} = C(u_r u_{r-1} \dots u_0 w)$ 和 $C_{ij} = C(u_0 \dots u_t w u_{t+1} \dots u_r)$, 其中 $0 \leq t \leq r-1$ 且 $C(u_0 \dots u_t w - u_{t+1} \dots$

$u_r) = \min\{C(u_0 \dots u_t w u_{t+1} \dots u_r); 0 \leq t \leq r-1\}$. H_1 的边权值函数, 记为 c_1 , 定义如下:

$$c_1(e) = \begin{cases} c(e) & \text{if } e \in E(H) - \{e_l, e_j, e_k\} \\ c(e_j) + \frac{1}{2}(C_{lj} + C_{jk} - C_{kl}) & \text{if } e = e_j \\ c(e_k) + \frac{1}{2}(C_{kl} + C_{jk} - C_{lj}) & \text{if } e = e_k \\ c(e_l) + \frac{1}{2}(C_{lj} + C_{kl} - C_{jk}) & \text{if } e = e_l \end{cases}$$

Case 2~6 给出当 x 和 y 中恰有一个结点落在 F 上时 $H \times_{x,y} F$ 的定义, 不妨设该结点为 x .

Case 2: $x = u_s, 0 \leq s < r$

定义 $H \times_{x,y} F = \{H_{21}, H_{22}\}$ (见图 4). 图 H_{21} 是由 H 经过以下变化得到: 用结点 x 和新结点 u' 取代扇 F ; 增加边 xv 和 xu' ; 将 H 中 $\{u_0\}$ 和 $V(H-F)$ 之间的边的端点 u_0 改为 x , $\{w, u_r\}$ 与 $V(H-F)$ 之间的边在 $\{w, u_r\}$ 上的端点改为结点 u' , $H-F$ 中所有边不变. 图 H_{22} 的生成过程与 H_{21} 的生成过程类似, 只是, 将 H_{21} 中 x 和 u' 的位置交换.

令 $C_l = C(xu_{s-1}u_{s-2} \dots u_0 w u_{s+1}u_{s+2} \dots u_r)$, $C_j = C(xu_{s+1} - u_{s+2} \dots u_r w u_{s-1}u_{s-2} \dots u_0)$, $C_k = C(xu_{s-1}u_{s-2} \dots u_0) + C(w - u_{s+1}u_{s+2} \dots u_r)$ 和 $C_{jk} = C(xu_{s+1}u_{s+2} \dots u_r) + C(w u_{s-1} - u_{s-2} \dots u_0)$.

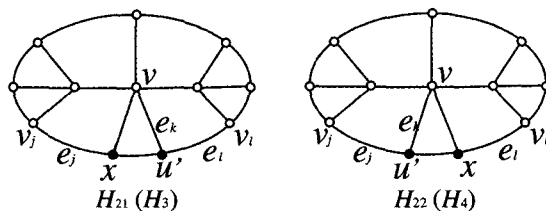


图4 $H_{21}(H_3)$ 和 $H_{22}(H_4)$

H_{21} 和 H_{22} 边权值函数 c_{21} 和 c_{22} , 定义如下:

$$c_{21}(e) = \begin{cases} c(e) & \text{if } e \in E(H) - \{e_l, e_j, e_k\} \\ c(e_j) + \frac{1}{2}C_k & \text{if } e = e_j \\ c(e_l) - S & \text{if } e = e_l \\ c(e_k) + \frac{1}{2}C_k + S & \text{if } e = e_k \\ C_l + S & \text{if } e = u'x \\ S & \text{if } e = xv \end{cases}$$

$$c_{22}(e) = \begin{cases} c(e) & \text{if } e \in E(H) - \{e_l, e_j, e_k\} \\ c(e_l) + \frac{1}{2}C_k & \text{if } e = e_j \\ c(e_j) - S & \text{if } e = e_l \\ c(e_k) + \frac{1}{2}C_k + S & \text{if } e = e_k \\ C_l + S & \text{if } e = u'x \\ S & \text{if } e = xv \end{cases}$$

Case 3: $x = u_0$

定义 $H \times_{x,y} F = \{H_3\}$, 其中 H_3 的构造与 Case 2 中 H_{21} 的构造相同 (见图 4). 令 $D_k = C(xu_1 u_2 \dots u_r w), D_{kl} = C(w u_1 u_2 \dots u_r)$, $D_l = C(x \dots u_t w u_{t+1} \dots u_r)$, 其中 $0 \leq t \leq r-1$ 并且 $C(x \dots u_t w u_{t+1} \dots u_r) = \min\{C(x \dots u_t w - u_{t+1} \dots u_r); 0 \leq t \leq r-1\}$. H_3 的边权值函数 c_3 , 定义为:

$$c_3(e) = \begin{cases} c(e) & \text{if } e \in E(H) - \{e_l, e_j, e_k\} \\ c(e_j) + D_{jkl} & \text{if } e = e_j \\ c(e_l) + \frac{1}{2}(D_l - D_k) & \text{if } e = e_l \\ c(e_k) + \frac{1}{2}(D_k - D_l) & \text{if } e = e_k \\ \frac{1}{2}(D_l + D_k) & \text{if } e = xu' \\ 2S & \text{if } e = xv \end{cases}$$

Case 4: $x=u_r$

定义 $H \times_{x,y} F = \{H_4\}$, 其中 H_4 的构造与 Case 2 中 H_{22} 的构造相同(见图 4)。令 $D_k = C(xu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_0w)$, $D_{jkl} = C(wu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_0)$, $D_j = C(x \cdots u_{t+1}wu_t \cdots u_0)$, 其中 $0 \leq t \leq r-1$ 并且 $C(x \cdots u_{t+1} \cdots u_t \cdots u_0) = \min\{C(x \cdots u_{i+1}wu_i \cdots u_0); 0 \leq i \leq r-1\}$ 。 H_4 的边权值函数 c_4 定义为:

$$c_4(e) = \begin{cases} c(e) & \text{if } e \in E(H) - \{e_l, e_j, e_k\} \\ c(e_l) + D_{jkl} & \text{if } e = e_j \\ c(e_j) + \frac{1}{2}(D_j - D_k) & \text{if } e = e_l \\ c(e_k) + \frac{1}{2}(D_k - D_j) & \text{if } e = e_k \\ \frac{1}{2}(D_j + D_k) & \text{if } e = xu' \\ 2S & \text{if } e = xv \end{cases}$$

Case 5: $x=w$ 且 $y \neq v$

$H \times_{x,y} F = \{H_{51}, H_{52}\}$ 。 H_{51} 和 H_{52} 的构造与 Case 1 中的 H_1 相同, 除了在 H_{51} 中, 将 H_1 中的结点 w' 记为 x 和在 H_{52} 中, 将 H_1 中结点 v 记为 x (见图 3)。令 $F_l = C(xu_0u_1 \cdots u_r)$, $F_j = C(xu_ru_{r-1} \cdots u_0)$ 和 $F_{jkl} = C(u_0 - u_1 \cdots u_r)$ 。 H_{51} 和 H_{52} 的边权值函数 c_{51} 和 c_{52} 定义为:

$$c_{51}(e) = \begin{cases} c(e) & \text{if } e \in E(H) - \{e_l, e_j, e_k\} \\ c(e_l) + F_l & \text{if } e = e_l \\ c(e_j) + F_j & \text{if } e = e_j \\ 2S & \text{if } e = e_k \end{cases}$$

$$c_{52}(e) = \begin{cases} c(e) & \text{if } e \in E(H) - \{e_l, e_j, e_k\} \\ c(e_l) + \frac{1}{2}(F_{jkl} + c(e_k)) & \text{if } e = e_l \\ c(e_j) + \frac{1}{2}(F_{jkl} + c(e_k)) & \text{if } e = e_j \\ 2S & \text{if } e = e_k \end{cases}$$

Case 6: $x=w$ 且 $y=v$

定义 $H \times_{x,y} F = \{H_6\}$, 其中 H_6 的构造与 Case 5 中 H_{51} 的构造相同(见图 3)。 H_6 的边权值函数 c_6 的定义与 H_{51} 的边权值函数 c_{51} 定义相同。

由 $H \times_{x,y} F$ 的定义可知: 若 $G \in H \times_{x,y} F$, 则 G 是 Halin 图。为描述方便, 我们用 $C_1(P')$, $C_{21}(P')$, $C_{22}(P')$, $C_3(P')$, $C_4(P')$, $C_{31}(P')$, $C_{52}(P')$ 和 $C_6(P')$ 分别表示上面定义的图 $H_1, H_{21}, H_{22}, H_3, H_4, H_{51}, H_{52}$ 和 H_6 中路径 P' 的花费; 把压缩扇时用于取代扇的结点称为压缩结点。

定理 1 (1) 任选 $P' \in OP(\{H_1\}, x, y)$, 则 P' 包含路径 $P'_1 = v_jw'v$, $P'_2 = v_lw'v$ 或 $P'_3 = v_jw'v_l$, 而且,

(1.1) 若 P' 包含路径 P'_1 , 则用路径 $P_1 = v_ju_0u_1 \cdots u_rwv$ 代替 P' 中的 P'_1 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 并且 $C(P) = C_1(P')$ 。

(1.2) 若 P' 包含路径 P'_2 , 则用路径 $P_2 = v_lu_ru_{r-1} \cdots u_0wv$ 代替 P' 中的 P'_2 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 并

且 $C(P) = C_1(P')$ 。

(1.3) 若 P' 包含路径 P'_3 , 令路径 $P_3 = v_ju_0 \cdots u_lwu_{l+1} \cdots u_rv_l$, 其中 $0 \leq l \leq r-1$ 且 $C(u_0 \cdots u_lwu_{l+1} \cdots u_r) = \min\{C(u_0 \cdots u_lwu_{i+1} \cdots u_r); 0 \leq i \leq r-1\}$, 则用路径 P_3 代替 P' 中的路径 P'_3 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 并且 $C(P) = C_1(P')$ 。

(2) 任选 $P' \in OP(\{H_{21}, H_{22}\}, x, y)$,

(2.1) 若 P' 是 H_{21} 中的一条路径, 则 P' 包含路径 $P'_1 = xu'v_l$ 或者 $P'_{21} = xv_j$ 与 $P'_{22} = vu'v_l$, 而且,

(2.1.1) 若 P' 包含 P'_1 , 则用路径 $P_1 = xu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_0wu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_rv_l$ 代替 P' 中路径 P'_1 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_{21}(P')$ 。

(2.1.2) 若 P' 包含 P'_{21} 和 P'_{22} , 则用路径 $P_{21} = xu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_0v_j$ 和 $P_{22} = vu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_rv_l$ 分别代替 P' 中的 P'_{21} 和 P'_{22} 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_{21}(P')$ 。

(2.2) 若 P' 是 H_{22} 中的一条路径, 则 P' 包含路径 $P'_1 = xu'v_j$ 或者 $P'_{21} = xv_l$ 和 $P'_{22} = vu'v_j$, 而且,

(2.2.1) 若 P' 包含 P'_1 , 则用路径 $P_1 = xu_{r+1}u_{r+2} \cdots u_rwu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_0v_j$ 代替 P' 中路径 P'_1 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_{22}(P')$ 。

(2.2.2) 若 P' 包含 P'_{21} 和 P'_{22} , 则用路径 $P_{21} = xu_{r+1}u_{r+2} \cdots u_rv_l$ 和 $P_{22} = vu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_0v_j$ 分别代替 P' 中的 P'_{21} 和 P'_{22} 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_{22}(P')$ 。

(3) 任选 $P' \in OP(\{H_3\}, x, y)$, 则 P' 包含路径 $P'_1 = xu'v_l$, $P'_2 = xu'v$ 或 $P'_3 = vu'v_l$, 而且,

(3.1) 若 P' 包含 P'_1 , 令路径 $P_1 = x \cdots u_lwu_{l+1} \cdots u_rv_l$, 其中 $0 \leq l \leq r-1$ 且 $C(x \cdots u_lwu_{l+1} \cdots u_r) = \min\{C(x \cdots u_lwu_{i+1} \cdots u_r); 0 \leq i \leq r-1\}$, 则用 P_1 代替 P' 中的路径 P'_1 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_3(P')$ 。

(3.2) 若 P' 包含 P'_2 , 则用路径 $xu_lu_2 \cdots u_rwv$ 代替 P' 中的路径 P'_2 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_3(P')$ 。

(3.3) 若 P' 包含 P'_3 , 则用路径 $wu_lu_2 \cdots u_rv_l$ 代替 P' 中路径 P'_3 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_3(P')$ 。

(4) 任选 $P' \in OP(\{H_4\}, x, y)$, 则 P' 包含路径 $P'_1 = xu'v_j$, $P'_2 = xu'v$ 或 $P'_3 = vu'v_j$, 而且,

(4.1) 若 P' 包含 P'_1 , 令路径 $P_1 = x \cdots u_{t+1}wu_t \cdots u_0v_j$, 其中 $0 \leq t \leq r-1$ 且 $C(x \cdots u_{t+1}wu_t \cdots u_0) = \min\{C(x \cdots u_{i+1}wu_i \cdots u_0); 0 \leq i \leq r-1\}$, 则用路径 P_1 代替 P' 中的路径 P'_1 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_4(P')$ 。

(4.2) 若 P' 包含 P'_2 , 则用路径 $xu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_0wv$ 代替 P' 中的路径 P'_2 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_4(P')$ 。

(4.3) 若 P' 包含 P'_3 , 则用路径 $wu_{r-1}u_{r-2} \cdots u_0v_j$ 代替 P' 中路径 P'_3 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_4(P')$ 。

(5) 任选 $P' \in OP(\{H_{51}, H_{52}\}, x, y)$,

(5.1) 若 P' 是 H_{51} 中的一条路径, 则 P' 包含路径 $P'_1 = xv_l$ 或者 $P'_2 = xv_j$, 并且

(5.1.1) 若 P' 包含 P'_1 , 则用路径 $xu_0u_1 \cdots u_rv_l$ 代替 P' 中路径 P'_1 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P)$

$=C_{51}(P')$ 。

(5.1.2)若 P' 包含 P'_2 , 则用路径 $xu, u_{r-1} \dots u_0 v_j$ 代替 P' 中的路径 P'_2 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_{51}(P')$ 。

(5.2)若 P' 是 H_{52} 中的一条路径, 则 P' 包含路径 $P_3 = v_j w' v_l$, 而且, 用路径 xv 和 $v_j u_0 u_1 \dots u_r v_l$ 分别代替 P' 中的结点 x 和 P'_3 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_{52}(P')$ 。

(6)任选 $P' \in OP(\{H_6\}, x, y)$, 则 P' 包含路径 xv_l 或者 xv_j , 而且

(6.1)若 P' 包含路径 xv_l , 则用 H 中的路径 $xu_0 u_1 \dots u_r v_l$ 代替 P' 中路径 xv_l 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_6(P')$ 。

(6.2)若 P' 包含路径 xv_j , 则用 H 中的路径 $xu, u_{r-1} \dots u_0 v_j$ 代替 P' 中的路径 xv_j 所得到的路径 P 满足: $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 和 $C(P) = C_6(P')$ 。

证明: 我们只证明(1)和(2), (3)~(6)的证明同(2)。

(1)由 H_1 的定义可知, $w' \notin \{x, y\}$ 。进而, 由 P' 覆盖结点 w' 可得: P' 包含路径 $P'_k, 1 \leq k \leq 3$ 。令 P 为用 P_k 代替 P' 中的路径 P'_k 所得到的路径。由 P', P'_k 和 P_k 的定义可知: $V(P' \in P'_k) \cup V(P_k) = V(H)$ 和 $V(P' - P'_k) \cap V(P_k) = \phi$, 因此 $P \in P(H, x, y)$ 。

又由 c_1 的定义可知: $C(P_1) = C_{jk} + c(e_j) + c(e_k) = c_1(e_j) + c_1(e_k) = C_1(P'_1), C(P_2) = C_{kl} + c(e_l) + c(e_k) = c_1(e_l) + c_1(e_k) = C_1(P'_2), C(P_3) = C_{lj} + c(e_j) + c(e_l) = c_1(e_j) + c_1(e_l) = C_1(P'_3)$ 。而且, 对任意 $e \in E(P') \setminus E(P'_k)$, 有: $e \in E(H) \setminus \{e_l, e_j, e_k\}$ 。进而由 c_1 的定义可得: $c_1(e) = c(e)$, 因此 $C(P) = C_1(P')$ 。

下面用反证法证明 P 是 $P(H, x, y)$ 中最优的。

假设 P 不是 $P(H, x, y)$ 中最优的。任取 $Q \in OP(\{H\}, x, y)$, 则 $C(P) > C(Q)$ 。

由引理 2(1)可知: Q 包含路径 $P_i, 1 \leq i \leq 3$ 。

令 Q' 为用路径 P'_i 代替 Q 中路径 P_i 所得路径。

与上面证明 $P \in P(H, x, y)$ 和 $C(P) = C_1(P')$ 类似, 可得: $Q' \in P(H_1, x, y)$ 和 $C_1(Q') = C(Q)$ 。

由 $C_1(P') = C(P)$ 和 $C(P) > C(Q)$ 可得: $C_1(P') > C(Q) = C_1(Q')$, 这与条件 $P' \in OP(\{H_1\}, x, y)$ 矛盾, 因此 P 是 $P(H, x, y)$ 中最优的。(1)得证。

(2)我们首先证明引理 1' 和 2'。

引理 1' 任选 $Q' \in P(H_{21}, x, y)$, Q' 包含以下四种路径之一: (i) $P'_1 = xu'v_l$, (ii) $P'_{21} = xv_j$ 和 $P'_{22} = vu'v_l$, (iii) $P'_3 = xu'v$, (iv) $P'_4 = xv'u'v_l$, 而且,

(a)若 Q' 包含 P'_1 , 则用路径 $P_1 = xu_{s-1} u_{s-2} \dots u_0 wu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r v_l$ 代替 Q' 中的路径 P'_1 所得到的路径 Q 满足: $Q \in P(H, x, y)$ 和 $C(Q) = C_{21}(Q')$ 。

(b)若 Q' 包含 P'_{21} 和 P'_{22} , 则用路径 $P_{21} = xu_{s-1} - u_{s-2} \dots u_0 v_j$ 和 $P_{22} = vu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r v_l$ 分别代替 Q' 中的路径 P'_{21} 和 P'_{22} 所得到的路径 Q 满足: $Q \in P(H, x, y)$ 和 $C(Q) = C_{21}(Q')$ 。

(c)若 Q' 包含 P'_3 或 P'_4 , 则任取 $Q \in P(H, x, y)$, 有: $C_{21}(Q') > C(Q)$ 。

引理 1' 证明: 由 $Q' \in P(H_{21}, x, y)$ 易知, 为覆盖结点 u' 和 x, Q' 包含引理中给出的四种路径之一。

(a)假设 Q' 包含 P'_1 。令 Q 为用 P_1 代替 Q' 中的路径 P'_1 所得到的路径。由 Q, P'_1 和 P_1 的定义可知: $V(Q' - P'_1) \cup V$

$(P_1) = V(H)$ 且 $V(Q' - P'_1) \cap V(P_1) = \phi$, 因此 $Q \in P(H, x, y)$ 。又由 c_{21} 的定义可知: $C_{21}(P'_1) = c_{21}(xu') + c_{21}(e_l) = C_l + c(e_l) = C(P_1)$, 而且, 对任意 $e \in E(Q') \setminus E(P'_1)$, 有: $c_{21}(e) = c(e)$, 因此 $C(Q) = C_{21}(Q')$, (a)得证。(b)同(a)。

(c)任选 $Q \in P(H, x, y)$ 。

令 $A = E(Q') \setminus E(P'_3), B = E(Q)$, 则 $A \subseteq E(H) \setminus (\{e_l, e_j, e_k\} \cup E(F))$ 。由定义, 易得: $C_{21}(Q') = C_{21}(P'_3) + \sum_{a \in A} c(a)$ 且 $C(Q) = \sum_{b \in B} c(b)$ 。而 $C_{21}(P'_3) = c_{21}(xu') + c_{21}(e_k) = C_l + 1/2C_k + c(e_k) + 2S$, 因此, $C_{21}(Q') - C(Q) = 2S + C_l + \sum_{a \in A} c(a) + 1/2C_k + c(e_k) - \sum_{b \in B} c(b)$ 。

令 D 为路径 $xu_{s-1} u_{s-2} \dots u_0 wu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r$ 包含的所有边的集合, 显然 $D \subseteq E(F)$ 。由 C_l 的定义可知: $C(xu_{s-1} u_{s-2} \dots u_0 wu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r) = C_l$ 。令 $U = (D \cup A \cup \{e_k\}) \Delta B$, 则 $U \subseteq E(H)$ 。显然, $D \cap A = \phi, D \cap \{e_k\} = \phi, A \cap \{e_k\} = \phi$, 因此, $S + C_l + \sum_{a \in A} c(a) + c(e_k) - \sum_{b \in B} c(b) = S + \sum_{e \in U \text{ 且 } e \notin B} c(e) - \sum_{e \in U \text{ 且 } e \in B} c(e) \geq S - \sum_{e \in U} |c(e)| > 0$ 。

由 S 的定义可得: $S + 1/2C_k > S - |C_k| > 0$, 因此, 有: $2S + C_l + \sum_{a \in A} c(a) + 1/2C_k + c(e_k) - \sum_{b \in B} c(b) = (S + C_l + \sum_{a \in A} c(a) + c(e_k) - \sum_{b \in B} c(b)) + (S + 1/2C_k) > 0$ 。

即 $C_{21}(Q') - C(Q) > 0$ 。同理可证, 当 Q' 包含 P'_4 时, $C_{21}(Q') - C(Q) > 0$, 因此(c)得证。□

引理 2' 若 $H \times_{x,y} F = \{H_{21}, H_{22}\}$ 。任取 $Q \in OP(H, x, y)$, 则 Q 包含下面四种路径中的一种: (i) $R_1 = xu_{s-1} u_{s-2} \dots u_0 wu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r v_l$, (ii) $R_{21} = xu_{s-1} - u_{s-2} \dots u_0 v_j$ 和 $R_{22} = vu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r v_l$, (iii) $R_3 = xu_{s+1} - u_{s+2} \dots u_r wu_{s-1} u_{s-2} \dots u_0 v_j$, (iv) $R_{41} = xu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r v_l$ 和 $R_{42} = vu_{s-1} u_{s-2} \dots u_0 v_j$, 而且,

(a)若 Q 包含 R_1 , 则用路径 $xu'v_l$ 代替 Q 中路径 R_1 所得到的路径 Q' 满足: $Q' \in P(H_{21}, x, y)$ 和 $C_{21}(Q') = C(Q)$ 。

(b)若 Q 包含 R_{21} 和 R_{22} , 则用路径 xv_j 和 $vu'v_l$ 分别代替 Q 中路径 R_{21} 和 R_{22} 所得到的路径 Q' 满足: $Q' \in P(H_{21}, x, y)$ 和 $C_{21}(Q') = C(Q)$ 。

(c)若 Q 包含 R_3 , 则用路径 $xu'v_j$ 代替 Q 中路径 R_3 所得到的路径 Q' 满足: $Q' \in P(H_{22}, x, y)$ 和 $C_{22}(Q') = C(Q)$ 。

(d)若 Q 包含 R_{41} 和 R_{42} , 则用路径 xv_l 和 $vu'v_j$ 分别代替 Q 中路径 R_{41} 和 R_{42} 所得到的路径 Q' 满足: $Q' \in P(H_{22}, x, y)$ 和 $C_{22}(Q') = C(Q)$ 。

引理 2' 证明: 与引理 1'(a)的证明类似。□

下面证明(2)。任选 $P' \in OP(\{H_{21}, H_{22}\}, x, y)$ 。假设 P' 是 H_{21} 中的一条路径。任取 $R \in OP(\{H\}, x, y)$ 。由引理 2', 存在一条路径 $R' \in P(H_{21}, x, y) \cup P(H_{22}, x, y)$, 满足 $C(R) = C_2(R')$ 。($C_2(R')$ 表示路径 R' 的花费, 即: 若 $R' \in P(H_{21}, x, y)$, 则 $C_2(R') = C_{21}(R')$; 若 $R' \in P(H_{22}, x, y)$, 则 $C_2(R') = C_{22}(R')$) 显然, $C_{21}(P') \leq C_2(R')$, 进而 $C_{21}(P') \leq C(R)$ 。因此, 由引理 1' 可知: P' 包含路径 P'_1 或 P'_{21} 和 P'_{22} 。

假设 P' 包含路径 P'_1 。令 P 为用路径 $P_1 = xu_{s-1} u_{s-2} \dots u_0 wu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r v_l$ 代替 P' 中路径 P'_1 所得到的路径。由引理 1'(a)可得: $P \in P(H, x, y)$ 而且 $C(P) = C_{21}(P')$ 。进而, 由 $C_{21}(P') \leq C(R)$ 可知, $C(P) \leq C(R)$ 。又由 $R \in OP(\{H\}, x, y)$ 可知: $C(P) = C(R)$, 即 $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 。因此(2.1.1)得证。同理可证(2.1.2)。由 H_{21} 与 H_{22} 的对称性, (2.2)成立。□

定理 2 假设 H 不是轮并且 H 中存在一个扇 K , 满足: $x \in V(K)$ 和 $y \in V(K)$ 。若将操作 $\times_{x,y}$ 作用于不包含 x 和 y 的扇直到不存在不包含 x 和 y 的扇, 则作用后得到的图是一个

仍然包含扇 K 的轮。

证明: 设将操作 $\times_{x,y}$ 作用于不包含 x 和 y 的扇直到不存在这样的扇时得到的图为 H' 。

由定义 $\times_{x,y}$ 的定义可知: H' 包含 K 。

下面用反证法证明 H' 是轮。假设 H' 不是轮。由引理 1 可知: H' 中存在一个扇 K' 满足 $K' \neq K$, 因此, $x \notin V(K')$ 且 $y \notin V(K')$, 与 H' 的定义矛盾。 \square

定理 3 若 H 不是轮, $x \in V(H)$, $y \in V(H)$, $x \neq y$ 并且 H 中所有扇都包含 x 或 y , 则 H 中存在一个扇 K 满足: $x \in V(K)$ 且 $y \notin V(K)$ 。任取 $H' \in H \times_{x,y} K$, 以下结论成立:

(1) H' 中所有扇都包含 x 或 y 。

(2) $\text{Height}(T') = \text{Height}(T) - 1$, 其中 T' 和 T 分别为 H' 和 H 的特征树, 并且都以结点 y 为树根。

(3) 若 y 为叶结点并且 $\text{Height}(T') = 2$ 或者 y 为内部结点并且 $\text{Height}(T') = 1$ 时, H' 为轮。

证明: 由 H 不是轮和引理 1, H 中至少包含两个扇。

又由 H 中所有扇都包含 x 或 y , 因此, x 和 y 分别落在 H 的不同的扇中。进而, H 中存在一个扇 K 满足: $x \in V(K)$ 且 $y \notin V(K)$ 。任取 $H' \in H \times_{x,y} K$ 。由 $\times_{x,y}$ 的定义可知, $x \in V(H')$ 且 $y \in V(H')$ (为区分 H' 中的结点 x, y 与 H 中的结点 x, y , 下面我们用 x' 和 y' 表示 H' 中的结点 x 和 y)。

(1) 下面用反证法证明。假设 (1) 不成立, 则 H' 中存在一个扇 K' , 满足 $x' \notin V(K')$ 且 $y' \notin V(K')$ 。由 $\times_{x,y}$ 的定义易知, K' 不包含压缩结点, 即 K' 也是 H 中的一个扇。显然, $x \notin V(K')$ 且 $y \notin V(K')$, 这与前提 H 中所有扇都包含 x 或 y 矛盾。

(2) 由 $\times_{x,y}$ 定义可知: T' 比 T 少一个内部结点。

因此, $\text{Height}(T') = \text{Height}(T)$ 或 $\text{Height}(T') = \text{Height}(T) - 1$ 。假设 $\text{Height}(T') = \text{Height}(T)$, 则 T' 中存在叶结点 a_0 , 满足 $d'_{T'}(y', a_0) = \text{Height}(T')$ 。 ($d'_{T'}(y', a_0)$ 表示 T' 中 y' 与 a_0 的距离)。不失一般性, 假设 a_0 在 T' 中的父亲结点为 a , a 的所有孩子结点为 a_0, a_1, \dots, a_r 。显然 a_0, a_1, \dots, a_r 都是 T' 中的叶结点, 否则 $\text{Height}(T') > d'_{T'}(y', a_0)$, 与假设矛盾。

令 $K' = H'[\{a, a_0, a_1, \dots, a_r\}]$, 显然, K' 是 H' 的扇。

假设 $x' \in V(K')$, 则由 $\times_{x,y}$ 定义, $\text{Height}(T) > d'_{T'}(y', a_0)$, 与假设矛盾。因此, $x' \notin V(K')$ 。进而, 由 $\times_{x,y}$ 定义可知: K' 是 H 中的扇, 且 $x \notin V(K')$ 。

假设 $y' \in V(K')$, 则 $\text{Height}(T') = 1$, 即 H' 为轮, 进而 $\text{Height}(T') < \text{Height}(T)$, 与假设矛盾。

因此 $y' \notin V(K')$, 进而由 $\times_{x,y}$ 定义可知 $y \notin V(K')$ 。

即 K' 是 H 中不包含 x 和 y 的扇, 这与 H 的定义矛盾。

(2) 得证。(3) 由轮的定义易得。 \square

定理 4 若 H 为轮, $x \in V(H)$, $y \in V(H)$ 。设 w 是 T 的内部结点, $C = u_0 u_1 \dots u_r u_0$ 且圈 C 的花费为 M 。则:

(1) 若 $\{x, y\} = \{w, u_t\}$, $0 \leq t \leq r$, 则 $P(H, x, y) = \{P_1, P_2\}$, 其中 $P_1 = w u_{t-1} u_{t-2} \dots u_0 u_{t-1} \dots u_{t+1} u_t$ 和 $P_2 = w u_{t+1} u_{t+2} \dots u_0 u_1 \dots u_{t-1} u_t$ 。即任取 $P \in OP(\{H\}, x, y)$, $C(P) = \min\{M + c(u_{t-1} x) - c(u_{t-1} u_t), M + c(u_{t+1} x) - c(u_t u_{t+1})\}$ 。

(2) 若 $\{x, y\} = \{u_s, u_t\}$ 并且 $xy \notin E(C)$, $0 \leq s, t \leq r$, 则 $P(H, x, y) = \{P_1, P_2\}$, 其中, $P_1 = u_s u_{s-1} u_{s-2} \dots u_{s+1} w u_{s+1} u_{s+2} \dots u_{t-1} u_t$ 和 $P_2 = u_s u_{s+1} u_{s+2} \dots u_{t-1} w u_{t-1} u_{t-2} \dots u_{t+1} u_t$ 。即任取 $P \in OP(\{H\}, x, y)$, $C(P) = \min\{M + c(u_{s+1} w) + c(u_{t+1} w) - c(u_{s+1} u_t) - c(u_{t+1} u_t), M + c(u_{s-1} w) + c(u_{t-1} w) - c(u_s u_{s-1}) - c(u_t u_{t-1})\}$ 。

(3) 若 $\{x, y\} = \{u_s, u_{s+1}\}$, 其中 $0 \leq s < r$, 则 $P(H, x, y) =$

$\{u_s u_{s-1} \dots u_s w u_{s-1} u_{s-2} \dots u_s u_{s+2} u_{s+1}; 0 \leq i \leq r$ 且 $i \neq s+1\}$ 。即任取 $P \in OP(\{H\}, x, y)$, $C(P) = \min\{M + c(u_s w) + c(u_{s+1} w) - c(u_s u_{s-1}) - c(u_s u_{s+1}); 0 \leq i \leq r$ 且 $i \neq s+1\}$

证明: 由轮的结构易得。 \square

4 算法的实现步骤

本算法求 Halin 图上的 OHP。根据定理 4, 通过枚举所有 Hamilton 路的方法求轮的 OHP。根据定理 1, 求非轮 Halin 图的 OHP 可以转化为求压缩扇后得到的图上的 OHP, 而定理 2 和 3 表明, 非轮 Halin 图执行有限次压缩扇操作后将转变成轮, 因此求非轮 Halin 图的 OHP 是一个递归的过程。

本算法由一个主函数 OHP₁ 和一个子函数 OHP₂ 构成, 其伪代码如下。

文[3]给出了对不包含 x 和 y 的扇的压缩与扩展过程的详细描述, 因此对 OHP₁ 函数中压缩扇的语句 6) 和扩展压缩结点的语句 8) 不作详细描述。由定理 1, 函数 OHP₂ 中 Case 2~5 的处理过程与 Case 1 的处理过程中类似, 因此 OHP₂ 中省略了 Case 2~5 的处理过程。

OHP₁(H, x, y)

输入: $H, x \in V(H), y \in V(H)$ 且 $x \neq y$ 。

- 1) if (H 是轮) then
- 2) { 根据定理 4 计算 $P(H, x, y)$ 中所有路的花费; return $P(H, x, y)$ 中花费最小的一条; }
- 3) else {
- 4) for (H 中每个扇 F)
- 5) if ($x \notin V(F)$ 且 $y \notin V(F)$), then
- 6) $H = \times_{x,y}$ 压缩扇 F 到压缩结点 w' 所得的图; // 压缩 F , 详见文[3]
- 7) $P = \text{OHP}_2(H, x, y)$;
- 8) 用合适的路径代替 P 中每个压缩结点直到 P 中不包含压缩结点; // 压缩的逆过程, 详见文[3]
- 9) return P ; }

function OHP₂(H, x, y)

输入: H 中所有扇包含 x 或 y , $x, y \in V(H)$ 且 $x \neq y$ 。

- 1) if (H 是轮)
- 2) 根据定理 4 计算 $P(H, x, y)$ 中所有路的花费; return $P(H, x, y)$ 中花费最小的一条;
- 3) else {
- 4) $Q =$ 以 y 为根的树 T 的后序序列; // $H = T \cup C$
- 5) $w = Q$ 中第一个内部结点; w 的所有孩子结点 (按在 Q 中的顺序排列) 设为: u_0, u_1, \dots, u_r ;
- 6) $v_l = C$ 中 u_r 的下一个结点; $v_j = C$ 中 u_0 的前一个结点; $v = w$ 的父结点;
- 7) Case 1: $x = u_s$ 且 $0 < s < r$ // $\times_{x,y}$
- 8) { 按 Case 2 中的 $\times_{x,y}$ 定义构造 $\times_{x,y}$ 压缩 $F = H[\{w, u_0, u_1, \dots, u_r\}]$ 后得到的图 H_{21} 和 H_{22} ;
- 9) $P_1 = \text{OHP}_2(H_{21}, x, y)$; // 其中 $x \in (V(H_{21}))$
- 10) $P_2 = \text{OHP}_2(H_{22}, x, y)$; // 其中 $x \in (V(H_{22}))$
- 11) $P' = \{P_1, P_2\}$ 中花费最小的一条;
- 12) if ($P' = P_1$) then // 扩展 P' 中的压缩结点
- 13) if (P' 包含路径 $xu v_l$) then
- 14) $P =$ 用 H 中路径 $xus (1u_{s-2} \dots u_0 w - u_{s+1} u_{s+2} \dots u_r$ 代替 P' 中的路径 xu' ;
- 15) else
- 16) $P =$ 用 H 中路径 $xus (1u_{s-2} \dots u_0 v_j$ 和 $wu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r v_l$ 分别代替 P' 中的路径 xv_j 和 $wu v_l$;
- 17) if ($P' = P_2$) then
- 18) if (P' 包含 $xu' v_j$) then
- 19) $P =$ 用 H 中路径 $xu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r w u_{s-1} - u_{s-2} \dots u_0$ 代替 P' 中的路径 xu' ;
- 20) else
- 21) $P =$ 用 H 中路径 $xu_{s+1} u_{s+2} \dots u_r v_j$ 和 $wu_{s-1} u_{s-2} \dots u_0 v_j$ 分别代替 P' 中路径 xv_j 和 $wu v_j$;
- 22) return P ;

// x, y 的位置满足 $\times_{x,y}$ 定义中的 Case 3~6

- 23) Case 2: $x = u_0 \{ \dots \}$
- 24) Case 3: $x = u_r \{ \dots \}$
- 25) Case 4: $x = w$ and $v \neq y \{ \dots \}$
- 26) Case 5: $x = w$ and $v = y \{ \dots \}$

5 算法的正确性证明

定理 5 若 $x \in V(H)$, $y \in V(H)$, $x \neq y$ 而且 H 中所有扇

(下转第 217 页)

良好的结果。同时具有 $\Delta\rho$ 和 $\Delta\theta$ 两个粒度搜索的算法在下一步的研究之中。本文研究的另一个意义在于:成功地将粒度计算思想应用于实践。粒度计算思想并不复杂,它只是模仿人思考问题的方式;和它相关的有:小波分析的多尺度多分辨率思想、有限精度分析的思想 and 传统测量技术的思想;然而粒度计算思想的论域要大得多,它强调对几乎所有事物的考察都要用粒度的眼光。实际上,粒度构成了无穷世界到有限空间的桥梁。

参考文献

- 1 Kalviainen H, Xu Lei. Probabilistic and non-probabilistic Hough transform: overview and comparisons[J]. Image and Vision Com-

- puting, 1995, 13(4): 239~252
- 2 唐亮,谢维信. 自适应模糊 Hough 变换[J]. 电子学报, 2004, 32(6): 946~949
- 3 Xu L., O ja E., Kultaned P. A new curve detection method; randomized Hough transform (RHT)[J]. Pattern Recognition Letters, 1990, 11(5): 331~338
- 4 孙丰荣,刘积仁. 快速霍夫变换算法[J]. 计算机学报, 2001, 24(10): 1102~1109
- 5 Zadeh L. A. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 19(1): 111~127
- 6 张钱,张铃. 问题求解理论与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 1990. 10~30
- 7 张燕平,张玲,吴涛. 不同粒度世界的描述法—商空间法[J]. 计算机学报, 2004, 27(3): 328~333
- 8 Yao Y Y. Granular Computing[J]. Computer Science, 2004, 31(22): 1~5

(上接第 180 页)

包含 x 或 y , 则函数 $OHP_2(H, x, y)$ 返回一条路 $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 。

证明:假设 $V(H) = n$ 。显然, $n \geq 4$ 。下面对 n 用归纳法证明。

(1) 当 $n = 4$ 。由 Halin 图的定义, H 是轮。进而由定理 4, $|P(H, x, y)| \leq n$ 。因此语句 2) 返回一条路 $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 。

(2) 假设对任意 $n \leq k$ 定理成立。

(3) 当 $n = k + 1$ 时。若 H 是轮, 同(1), 定理成立。若 H 不是轮。显然树 T 的后序序列 Q 中第一个内部结点及其所有孩子结点的导出子图, 即 $H[\{w, u_0, u_1, \dots, u_r\}]$, 为 H 中的一个扇。令 $F = H[\{w, u_0, u_1, \dots, u_r\}]$ 。由 y 为 T 的根结点, $y \notin V(F)$ 。又由 H 中所有扇包含 x 或 y , 因此 $x \in V(F)$ 。

OHP_2 中 Case 1~5 给出了当 x 在 F 中不同位置时的处理过程, 根据 $\times_{x,y}$ 定义, 每种处理过程类似, 下面我们只需证明在满足 Case 1 时, 定理成立。

若 Case 1 的条件满足, 则 x, y 和 F 满足第 3 部分中 $\times_{x,y}$ 定义的 Case 2。语句 8) 构造的 H_{21} 和 H_{22} 满足: $\{H_{21}, H_{22}\} = H \times_{x,y} F$ 。由定理 3 和 $\times_{x,y}$ 定义可知: H_{21} 和 H_{22} 的所有扇包含 x 或 y , $|V(H_{21})| < |V(H)| = k + 1$ 和 $|V(H_{22})| < |V(H)| = k + 1$ 。因此, 由递归假设, 语句 9) 和 10) 中 P_1 和 P_2 满足: $P_1 \in OP(\{H_{21}\}, x, y)$ 和 $P_2 \in OP(\{H_{22}\}, x, y)$ 。进而语句 11) 中 P' 满足 $P' \in OP(\{H_{21}, H_{22}\}, x, y)$ 。由定理 1(2) 可知: 语句 12)~21) 中所得到的路径 $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 。因此当满足 Case 1 条件时, 语句 22) 返回路径 $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 。□

定理 6 若 $x \in V(H), y \in V(H)$, 则函数 $OHP_1(H, x, y)$ 返回一条路 $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 。

证明:若 H 是轮。显然, 由定理 4, 语句 2) 返回一条路 $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 。

若 H 不是轮。根据文[3], 语句 4)~6) 重复 $\times_{x,y}$ 压缩不包含 x 和 y 的扇直到压缩后的图中不存在这样的扇。为了与原图 H 区分开, 我们把执行完语句 4)~6) 的循环压缩后得到的图记为 H' 。由定理 5 可知, 语句 7) 中的路径 $P \in OP(\{H'\}, x, y)$ 。进而根据文[3], 执行语句 8) 后, $P \in OP(\{H\}, x, y)$ 。□

6 算法的复杂度分析

6.1 时间复杂度

令 $n = |V(H)|$ 。

定理 7 若 $x \in V(H), y \in V(H)$ 而且 H 中所有扇包含 x 或 y , 则函数 $OHP_2(H, x, y)$ 的时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

证明:若 H 是轮。由定理 4, 易得: 计算 $P(H, x, y)$ 中所有路的花费需要的时间为 $O(n)$ 。

若 H 不是轮。显然, 语句 4)~6) 需 $O(n)$ 时间。 H_{21} 和 H_{22} 可以在遍历树 T 和 C 的同时构造并赋边权值。因此, 语句 8) 需 $O(|E(H)|)$ 时间。又由 Halin 图定义可知 $|E(H)| = O(n)$, 因此语句 8) 需 $O(n)$ 时间。显然, 语句(11)~(22) 需 $O(n)$ 时间。因此除去递归调用语句 9) 和 10), 执行 Case 1 总共需要 $O(n)$ 时间, 同理, Case 2~6 中除去递归调用语句总共需要 $O(n)$ 时间, 因此函数 $OHP_2(H, x, y)$ 除去递归调用语句总共需要花费 $O(n)$ 时间。

由定理 3, 每调用一次 OHP_2 其作用为压缩一个包含结点 x 的扇。显然 $OHP_2(H, x, y)$ 结束时, 递归调用的次数与压缩所有只包含结点 x 的扇过程中生成的 Halin 图的数目相同。而由 $\times_{x,y}$ 的定义可知, 每压缩一个扇, 至多生成两个 Halin 图。进而由定理 3, 压缩只包含结点 x 的扇过程中生成的 Halin 图至多 $1 + 2^1 + \dots + 2^{\text{Height}(T)-1}$ 个。而由 Halin 图的定义可知: $\text{Height}(T) < \log_2 n$ 。因此递归调用的总次数 $< 1 + 2^1 + \dots + 2^{\log_2 n-1} = n$ 。而由 $\times_{x,y}$ 的定义可知, 每次递归调用中输入的 Halin 图的结点数小于 n 。因此函数 $OHP_2(H, x, y)$ 的时间复杂度为 $O(n^2)$ 。□

定理 8 函数 $OHP_1(H, x, y)$ 的时间复杂度为 $O(n^2)$, 其中 $x \in V(H)$ 且 $y \in V(H)$ 。

证明:若 H 是轮。与定理 7 类似可得 $OHP_1(H, x, y)$ 的时间复杂度为 $O(n)$ 。若 H 不是轮。由文[3]可知: 语句 4)~6) 和 8) 共需 $O(n)$ 时间。而由定理 7, 语句(7) 需 $O(n^2)$ 时间, 因此, $OHP_1(H, x, y)$ 的时间复杂度为 $O(n^2)$ 。□

6.2 空间复杂度

本算法所需的主要空间: 保存函数 $OHP_2(H, x, y)$ 在递归调用的过程中生成的所有 Halin 图。由定理 7 可知, 这些的 Halin 图最多有 $O(n)$ 个, 而且每个结点数不超过 n 。保存每个 Halin 图只需要保存其特征树与伴随图, 即 $O(n)$ 空间, 因此本算法总共需要 $O(n^2)$ 空间。

参考文献

- 1 Winter P. Steiner problem in Halin networks. Discrete Applied Mathematics, 1987, 17(3): 281~294
- 2 姜定俊. Halin 图中的 Hamilton 路径, 1995, 8(2): 158~160
- 3 Cornuejols G, Naddef D, Pulleyblank W R. Halin graph and the traveling salesman problem. Bimathematical Programming, 1983, 26: 287~294
- 4 Winter P. Steiner Problem in Networks: A survey. Networks, 1987, 17(2): 129~167
- 5 Horton S B, Parker R G. On Halin subgraphs and supergraphs, Discrete Applied Mathematics, 1995, 56(1): 19~35
- 6 Halin R. Studies On minimally n -connected graphs, Combinatorial Mathematics and it's Applications. London, Academic Press, 1971. 129~136
- 7 Monnot J. Approximation algorithms for the maximum Hamilton path problem with specified endpoints. European Journal of Operational Research, 2005, 161(3): 721~735
- 8 Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications. London, Macmillan Press, 1976