一类 $K_{1,3}$-free Hamiltonian 图 *)

赵克文[1] 陈德钦[2]
(琼州大学信息科学与数学研究所 海南五指山市 572200)[1] (琼州大学数学系 海南三亚市 572022)[2]

摘 要 1988 年在美国 Kalamazoo 召开的"第六届国际图论、组合及其应用会议"上提出无爪图猜想:若 3 连通 $n\geqslant 3$ 阶 $K_{1,3}$-free 图 G 的不相邻的任两点 x、y 均有 $|N(x)\cup(N(y)|\geqslant(2n-6)/3$,则 G 是哈密顿图。这里证明更深刻的结果:若 3 连通 $n\geqslant 3$ 阶 $K_{1,3}$-free 图 G 的满足 $1\leqslant|N(x)\cap(N(y)|\leqslant\alpha-1$ 的不相邻的任两点 x、y 均有 $|N(x)\cup(N(y)|\geqslant(2n-6)/3$,则 G 是哈密顿图。

关键词 $K_{1,3}$-free 图,邻域并,广义邻域并,哈密顿图

A $K_{1,3}$-free Hamiltonian Graphs

ZHAO Ke-Wen[1] CHEN De-Qin[2]
(Institute of Information Science and Mathematics, Qiongzhou Uniersity, Wuzhishan 572200)[1]
(Department of Mathematics, Qiongzhou University, Sanya 572200)[2]

Abstract In 1998 a conjecture was suggested for the conference of Graph theory, combinatorics, and applications at Kalamazooin USA as follows: let G be a 3-connected $K_{1,3}$-free graph of order n, if $|N(x)\cup N(y)|\geqslant(2n-6)/3$ for each pair of nonadjacent vertices x,y, then G is Hamiltonian. In this note we obtain the further result: let G be a 3-connected $K_{1,3}$-free grah of order n, if $|N(x)\cup N(y)|\geqslant(2n-6)/3$ for each pair of nonadjacent vertices x,y with $1\leqslant|N(x)\cap N(y)|\leqslant\alpha-1$, then G is Hamiltonian.

Keywords $K_{1,3}$-free graphs, Neighborhood unions, Generalizing neighborhood unions, Hamiltonian

本文研究的图 $G=(V,E)$ 均是通常所说的无向、无重边、无环点的图,α 是图 G 的独立数。记 u 是图 G 的一点,G_1、G_2 是图 G 的两个子图或点集,点 u 在子图或点集 G_1 的邻点集记为 $N_{G1}(u)=\{v\in V(G_1):uv\in E(G)\}$,则记 $N_{G1}(V(G_2))=_{u\in V(G2)}N_{G1}(u)$。图 G 长为 m 的圈 C_m 表示为 $x_1x_2\cdots x_mx_1$,$N^+_{Cm}(u)=\{x_{i+1}:x_i\in N_{Cm}(u)\}$,$N^-_{Cm}(u)=\{x_{i-1}:x_i\in N_{Cm}(u)\}$,$N^{\pm}_{Cm}(u)=N^+_{Cm}(u)\cup N^-_{Cm}(u)$。邻域并 $NC=\min\{|N(u)\cup(N(v)|:u,v\in(G),uv\notin E(G)\}$,广义邻域并 $NC^*=\min\{|N(u)\cup(N(v)|:u,v\in(G),uv\notin E(G)$ 且 $1\leqslant|N(x)\cap(N(y)|\leqslant\alpha-1\}$。$K_{1,3}$-free 图常称为无爪图,它就是不存在 $K_{1,3}$ 为导出子图的图。本文其余记号、概念见文[1]。

迄今为止,人们已发现许多具备良好的互连网络性能的特殊哈密顿图。如陈冠涛教授等在文[4]发表的是一类哈密顿坚韧图;赖虹建教授等在文[5]发表的是一类哈密顿 hoeycomb 图;徐力行教授等在文[6]发表的是一类哈密顿 Arrangement 图等。

众所周知,没有各方面性能都最优的互连网络。每一互连网络,通常是其某方面最优,则其它方面可能就存在某些缺陷。最近,本文作者和赖虹建教授等在文[7]发表一类哈密顿图。本文作者也和 Ronald J. Gould 教授在文[8]发表另一类哈密顿图。本文中,我们接着研究无爪图。已知此类图若兼具某些特定条件,其互连网络也具备某些改进的性能,这方面尚有待更多的深入研究。

1988 年在美国的 Kalamazoo 召开的"第六届图论、组合及其应用国际会议"上,美国 Memphis 大学校长 Ralph Faudree 等提出下面猜想[2]:

1991 年 Ronald J. Gould 在其文[2]中再次列出此猜想供研究。

猜想[2,3] 若 3 连通 $n\geqslant 3$ 阶 $K_{1,3}$-free 图 G 的不相邻的任两点 x、y 均有 $|N(x)\cup(N(y)|\geqslant(2n-6)/3$,则 G 是哈密顿图。

至今,不相邻的两点的情况,已有很多研究。距离是 2 的情况,我们在文[3]证明距离是 2 的情况:

定理 1[3] 若 3 连通 $n\geqslant 3$ 阶 $K_{1,3}$-free 图 G 的距离是 2 的任两点 x,y 均有 $|N(x)\cup N(y)|\geqslant(2n-6)/3$,则 G 是哈密顿图。

但满足 $1\leqslant|N(x)\cap(N(y)|\leqslant\alpha-1$ 的不相邻的任两点的情况,迄今为止,还没有见任何研究的报道。本文中,我们参考文[3],引入 $1\leqslant|N(x)\cap(N(y)|\leqslant\alpha-1$ 的不相邻的任两点的情况,提供理论上的知识。本文中,我们将证明比上面猜想和定理 1 深刻的定理 2。

定理 2 若 3 连通 $n\geqslant 3$ 阶 $K_{1,3}$-free 图 G 的满足 $1\leqslant|N(x)\cap(N(y)|\leqslant\alpha-1$ 的不相邻的任两点 x、y 均有 $|N(x)\cap(N(y)|\geqslant(2n-6)/3$,则 G 是哈密顿图。

为证明定理,下面先证明如下的引理:

引理 1 对 2 连通 n 阶图 G,记 C_m 为图 G 的一个最长圈,G_1 为 $G-C_m$ 的一分支,$x_i,x_j\in N_{C_m}(G_1)$ 且 $\{x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{j-1}\}\cap(N_{C_m}(G_1)=\varnothing$,不妨认为 $x\in V(G_1)$,$x_{i+1}\in N^+_{Cm}(x)$,则有 $1\leqslant|N(x_{i+1})\cap(N(x)|\leqslant\alpha-1$ 及 $|N(x_{i+1})\cap(N(x_{j+1})|\leqslant\alpha-1$。

证明:(1)显然 $1\leqslant|N(x_{i+1})\cap(N(x)|$,若有 $|N(x_{i+1})\cap(N(x)|\geqslant\alpha$。此时,因 C_m 是图 G 的一个最长圈,知 x 和 x_{i+1}

*)本课题是海南省自然科学基金资助项目(批准号 10501)。赵克文 教授,主要研究兴趣是图论网络,互连网络等。

在 $G-C_m$ 中没有公共邻点(若 x 和 x_{i+1} 在 $G-Cm$ 中有公共邻点 v，则有圈 $C^*: x_i x x_v x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_i$ 比 C_m 长，矛盾。另外，还要注意下面定理证明要用的且 C^* 含 C_m 的所有点)，所以 x 和 x_{i+1} 的公共邻点全在 C_m 中，即 $|N_{G_m}^{+}(x)| \geqslant \alpha$。因 C_m 是最长圈，则易知 $N_{G_m}^{+}(x) \cup \{x\}$ 是独立点集且点数多于 α(否则，若 $x_{i+1}, x_{j+1} \in N_{G_m}^{+}(G_1)$，使 $x_{i+1} x_{j+1} \in E(G)$，则圈 C^*: $x_i x x_j x_{j-1} \cdots x_{i+1} x_{j+1} x_{j+2} \cdots x_i$ 比 C_m 长，矛盾，且 C^* 含 C_m 的所有点)，即独立数 $\geqslant \alpha+1$，和独立数是 α 矛盾。所以有 $|N(x_{i+1}) \cap N(x)| \leqslant \alpha-1$。

(2)若 $|N(x_{i+1}) \cap (N(x_{j+1})| \geqslant \alpha$。此时，因 C_m 是最长圈，显然，$N(x_{i+1}) \cap (N(x_{j+1})$ 没有点在 $G-C_m$ 中(若 $G-C_m$ 中点 $u \in N(x_{i+1}) \cap (N(x_{j+1})$，则记 P 为 G_1 中一条两端点和 x_i、x_j 分别相邻的路，则有圈 $C^*: x_i P x_j x_{j-1} \cdots x_{i+1} u x_{j+1} x_{j+2} \cdots x_i$ 比 C_m 长，矛盾，且 C^* 含 C_m 的所有点)，所以 $N(x_{i+1}) \cap N(x_{j+1})$ 中点全在 C_m 中，即 $|N(x_{i+1}) \cap N(x_{j+1})| = |N_{G_m}(x_{i+1}) \cap N_{G_m}(x_{j+1})| = |N_{G_m}^{-}(x_{i+1}) \cap N_{G_m}^{-}(x_{j+1})|$，又 C_m 是最长圈，所以 $N_{G_m}^{-}(x_{i+1}) \cap N_{G_m}^{-}(x_{j+1})$ 的全部点和 G_1 中任取一点组成的点集中没有相邻的两点(比如，若 $x_{k-1}, x_{h-1} \in N_{G_m}^{-}(x_{i+1}) \cap N_{G_m}^{-}(x_{j+1})$，使 $x_{k-1} x_{h-1} \in E(G)$。(a)当 $x_{k-1} \in \{x_{i+2}, x_{i+3}, \cdots, x_{j-1}\}$，$x_{h-1} \in \{x_{j+2}, x_{i+3}, \cdots, x_{i-1}\}$ 时，记 P 为 G_1 中一条两端点和 x_i、x_j 分别相邻的路，则有圈 C^*: $x_i P x_j x_{j-1} \cdots x_k x_{j+1} x_{j+2} \cdots x_{h-1} x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_{i+1} x_h x_{h+1} \cdots x_i$ 比 C_m 长，矛盾，且 C^* 含 C_m 的所有点；(b)当 $x_{k-1}, x_{h-1} \in \{x_{j+2}, x_{i+3}, \cdots, x_i\}$ 时，不妨认为 $h \geqslant k+1$，则有圈 $C^*: x_i P x_j x_{j-1} \cdots x_{i+1} x_k x_{k+1} \cdots x_{h-1} x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_{j+1} x_h x_{h+1} \cdots x_i$ 比 C_m 长，矛盾，且 C^* 含 C_m 的所有点)，即这样的互不相邻点一共不少于 $\alpha+1$，和独立数是 α 矛盾。所以 $|N(x_{i+1}) \cap N(x_{j+1})| \leqslant \alpha-1$。

定理的证明：用反证法，假设图 G 不是哈密顿图。记 C_m 为图 G 的最长圈，G_1 为 $G-C_m$ 的一分支，因图 G 是 3 连通，所以依顺时针记 $x_i, x_j, x_k \in N_{G_m}(V(G_1))$ 且 $\{x_{i+1}, x_{i+2} \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2} \cdots, x_{k-1}\} \cap N_{G_m}(V(G_1)) = \Phi$。因 C_m 为图 G 的最长圈，不妨记 $u \in V(G_1)$，$x_i \in N_{G_m}(u)$，则 $u x_{i-1}, u x_{i+1} \notin E(G)$。又因 G 是无爪图，所以 $x_{i-1} x_{i+1} \in E(G)$(否则，若 $x_{i-1} x_{i+1} \notin E(G)$，又已有 $u x_{i-1}, u x_{i+1} \notin E(G)$，则和 G 是无爪图矛盾)；同理有 $x_{j-1} x_{j+1}, x_{k-1} x_{k+1} \in E(G)$。其后，

断言(a)：x_{i+1} 和 $x_j, x_{j+2}, x_k, x_{k+2}$ 均不相邻。

证明：若 x_{i+1} 和 x_j 相邻，记 P 为 G_1 中一条两端点和 x_i、x_j 分别相邻的路，则有圈 $x_i P x_j x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_{j-1} x_{j+1} x_{j+2} \cdots x_i$ 是比 C_m 长的圈，矛盾。若 x_{i+1} 和 x_{j+2} 相邻，则有圈 $x_i P x_j x_{j+1} x_{j-1} x_{j-2} \cdots x_{i+1} x_{j+2} x_{j+3} \cdots x_i$ 是比 C_m 长的圈，矛盾。可类似说明其它情况。

类似地，我们有

断言(b)：x_{j+1} 和 $x_i, x_{i+2}, x_k, x_{k+2}$ 均不相邻；x_{k+1} 和 x_i，x_{i+2}, x_j, x_{j+2} 均不相邻。

其后，我们分情况讨论如下：

情况 1：G_1 有一点 x 使 $d(x) \leqslant (n-7)/3$。

此时由 $|N(x_{k+1}) \cup N(x)| \geqslant (2n-6)/3$，得 $|N(x_{k+1})| \geqslant (2n-6)/3 - d(x) + |\{x\}| \geqslant (n+4)/3$。其后，当 $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_j\}$ 中有点 x_h 和 x_{k+1} 相邻时，则 x_{h-1} 和 x_{j+1}, x 均不相邻(否则，若 x_{h-1} 和 x_{j+1} 相邻，则记 P^* 为 G_1 中一条两端点和 x_j, x_k 分别相邻的路，则有圈 $x_j P^* x_k x_{k-1} \cdots x_{j+1} x_{h-1} x_{h-2} \cdots x_{j+1} x_h x_{h+1} \cdots x_j$ 是比 C_m 长的圈，矛盾。当 x_{h-1} 和 x 相邻时，类似有矛盾)。当 $\{x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{k-2}\}$ 中有点 x_h 和 x_{k+1} 相邻时，x_{h+1} 和 x_{j+1}, x 均不相邻。及 x_{i+2} 和 x_{k+1} 不相邻时，x_{i+1} 和 x_{j+1}, x 均不相邻，从而有 $|N(x_{j+1}) \cup N(x)| \leqslant |V(G)| - |N(x_{k+1}) \backslash \{x_k, x_{k-1}\}| - |\{x_{j+1}, x, x_{i+1}\}| \leqslant (2n-7)/3$，矛盾。

情况 2：G_1 中有点 x 使 $d(x) \geqslant (n-2)/3$。

此时，则类似上面的讨论有 $N_{G_m}^{+}(x)$ 及 $\{x_k, x_{k+2}, V(G_1)\}$ 中点和 x_{i+1}, x_{j+1} 均不相邻，所以 $|N(x_{i+1}) \cup N(x_{j+1})| \leqslant |V(G)| - |N_{G_m}^{+}(x)| - |\{x_k, x_{k+2}, V(G_1)\}| \leqslant (2n-7)/3$，矛盾。

情况 3：$G-G_m$ 的任一点 x 均 $(n-6)/3 \leqslant d(x) \leqslant (n-3)/3$。

此时分情况讨论如下：

子情况 3.1：$G-G_m$ 有一分支 G_1 使 $|N_{G_m}(V(G_1))| \geqslant 4$。

此时依顺时针记 $x_k, x_i, x_j, x_h \in N_{G_m}(V(G_1))$，且 $\{x_{k+1}, x_{k+2} \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{h-1}\} \cap N_{G_m}(V(G_1)) = \Phi$，由 $|N(x_{k+1}) \cup N(x)| \geqslant (2n-6)/3$，有 $|N(x_{k+1})| \geqslant (2n-6)/3 - d(x) + |\{x_k\}| \geqslant n/3$。同样有 $|N(x_{i+1})| \geqslant n/3$，$|N(x_{j+1}| \geqslant n/3$，$|N(x_{h+1})| \geqslant n/3$。这样 $\{x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{h-1}\}$ 或 $\{x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}\}$ 中和 x_{k+1} 相邻的点数 $\leqslant |N(x_{k+1}) \backslash \{x_{k-1}, x_k, x_{k+2}\}|/2$，不妨认为 $\{x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}\}$ 中和 x_{k+1} 相邻的点数 $\leqslant |N(x_{k+1}) \backslash \{x_{k-1}, x_k, x_{k+2}\}|/2$。当 $\{x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{k-1}\}$ 中有点 x_r 和 x_{k+1} 相邻时，则 x_{r+1} 和 x_{i+1}, x_{j+1} 均不相邻(否则，类似有比 C_m 长的圈，矛盾)。当 $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_i\}$ 中有点 x_r 和 x_{k+1} 相邻时，x_{r-1} 和 x_{i+1}, x_{j+1} 均不相邻。且由断言(a)知 x_{k+1} 和 G_1 中的点的公共邻点至多是 x_k，所以，上面的 x_{r+1} 和 x_{r-1} 均不在 $N_{G_m}^{+}(x)$ 中，又 x_{h+1} 和 x_{k+1} 不相邻时，x_{h+2} 和 x_{i+1}, x_{j+1} 均不相邻。记 $H = \{x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}\}$，从而有

$$|N(x_{i+1}) \cup N(x_{j+1})| \leqslant |V(G)| - |N_{G_m}^{+}(x)| - |V(G_1)| - |(N(x_{k+1}) \backslash \{x_k\}) - N_H(x_{k+1})| - |\{x_{h+2}\}| \leqslant n - d(x) - |\{x\}| - (|N(x_{k+1})| - 1) + (|N(x_{k+1})| - 3)/2 - 1 \leqslant (2n-7)/3$$，矛盾。

子情况 3.2：$G-G_m$ 的任一分支 G_1 均 $|N_{G_m}(V(G_1))| = 3$。

此时若 G_1 有不相邻两点 u, v，则 $|N(x_{i+1}) \cup N(x_{j+1})| \leqslant |V(G)| - |N(u) \cup N(v)| - |\{u, v\}| \leqslant (2n-7)/3$ 矛盾。即知 $G-G_m$ 的每一分支均是完全子图。其后，若 G_1 有点 u 和 x_i 或 x_j 或 x_k 不相邻(不妨认为 u 和 x_i 不相邻)，则 $|N(x_{j+1}) \cup N(x_{k+1})| \leqslant |V(G)| - |N_{G_m}^{+}(u)| - |V(G_1)| - |\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}| = n - d(u) - 4$。当 $d(u) \geqslant (n-5)/3$ 时，上式 $|N(x_{j+1}) \cup N(x_{k+1})| \leqslant (2n-7)/3$，矛盾。当 $d(u) = (n-6)/3$ 时，由 $|N(x_{k+1})| \geqslant NC - |N(x)| + |\{x_k\}| \geqslant (n+2)/3$，其后类似情况 1 的分析，有 $|N(x_{j+1}) \cup N(u)| \leqslant |V(G)| - |N(x_{k+1}) \backslash \{x_{k-1}, x_k\}| - |\{x, x_{j+1}, x_{i+1}, x_j\}| \leqslant (2n-7)/3$。矛盾。所以有

断言(c)：x_i, x_j, x_k 和 G_1 中每点均相邻。

其后对子情况 3.2，再分情况讨论如下：

子情况 3.2.1 $|V(G_1)| \geqslant 2$

在断言(a)和断言(b)下，因 C_m 为图 G 的最长圈，此时易有 x_{k+3} 和 x_{i+1}, x_{j+1} 均不相邻。

当 $d(x) \geqslant (n-5)/3$ 时，因 x 和 $x_{k-1}, x_{k+1}, x_{k+2}$ 均不相邻。而 x_k, x_{k+2}, x_{k+3} 和 k_{i+1}, x_{j+1} 均不相邻。从而 $|N(x_{i+1}) \cup N(x_{j+1})| \leqslant |V(G)| - |N_{G_m}^{+}(x)| - |V(G_1)| - |\{x_{k+2},$

(下转第 247 页)

图 8　中值滤波

结论　本文所提出的灰度水印镶嵌方式能够在基本不破坏原图视觉效果的情况下实现水印的嵌入，嵌入的水印具有不可见性，并能被较好地提取出来。而且对剪切、JPEG 压缩、滤波等操作有一定的抵抗能力，有一定的实用价值。

参 考 文 献

1　Van Schyndel R G, et al. A digital watermark. In: Proc. of ICIP 94, 1994, 2: 86～89

2　Tirkel A, Randkin G, Vanschyndel R, Ho W, et al. Electronics watermark. In: Proceedings DICTA 1993, December1993. 666～672

3　Bender W, Gruhl D, Morimto N. Techniques for data hiding. In: Proceedings of the SPIE, Storage and Retrieval for Image and Video Databases III, Vol. 2420, San Jose, CA, Feb. 1995Is&T, The Society for imaging Science and Technology and SPIE, The International Society for optical Engineering , SPIE

4　Koch E, Zhao J. Towards robust and hidden image copyright labeling. In: IEEE workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, Neos Marouaras, Greece. June 1995. 123～132

5　Cox L J, Killian J, Leighton F T, et al. Secure Spread Spectrum Watermarking for multimedia. IEEE Trans. On Image Processing, 1997, 6(12): 1673～1687

6　International Organization for Standardization. Information Technology-JPEG 2000 Image Coding System. ISO/IEC 15444, July 2002

7　Kundur D, Hatainakos D. A robust digital image watermarking method using wavelet-based fusion. In: Proc. of ICIP 97, 1997, I: 544～547

8　Xia X G, Boncelet C G, Arce C R. Wavelet transform based watermark for digital images. OPTICS EXPRESS, 1998, 3(12): 497～1998

9　孙兆林编著. Matlab6. x图像处理. 清华大学出版社

（上接第 218 页）

2　Freeman H. Computer processing of line-drawing images. Computing Surveys, 1974, 6(1): 57～97

3　http://202.119.109.14/jpkc/jiaoan/Chinese/kjsjjg.htm

4　Zahn C T, Roskies R Z. Fourier Descriptors for Plane Closed Curves. IEEE Trans on Computers, 1972, 21(3): 269～281

5　Rauber T W. Two-dimension Shape Description: [Tech Rep]. Gruninova-RT-10-94. Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal, 1994

6　Rui Y, She A C, Huang T S. A Modified Fourier Descriptor for Shape Matching in MARS. In: Chang S K, ed. Image Databases and Multimedia Search , Series on Software Engineering and Knowledge Engineering, World Scientific Publishing House in Singapore, 1998, 8: 165～180

7　Mokhtarian F, Abbasi S, Kittler J. Robust and Efficient Shape Indexing through Curvature Scale Space. In: Proc. British Machine Vision Conference, 1996. 53～62

8　Zibreira C, Pereira F. A study of similarity measures for a turning angles-based shape descriptor. In: Proc. Conf. on Telecommunications - ConfTele, Figueira da Foz-Portugal, April 2001

9　Kim W Y, Kim Y S. A region-based shape descriptor using Zernike moments. Signal Processing: Image Communication, 2000, 16(1-2): 95～102

10　Kim H K, Kim J D. Region-based shape descriptor invariant to rotation, scale and translation. Signal Processing: Image Communication, 2000, 16(1-2): 87～93

11　Hu M K. Visual pattern recognition by moment invariants. IRE Transactions on information theory, 1962, IT-8: 179～187

12　Khotanzad A, Hong Y H. Invariant Image Recognition by Zernike Moments. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(5): 489～497

13　Chang S-F, Sikon T, Puri A. Overview of MPEG-7 standard. IEEE Trans Circuits and System for Video Technology, 2001, 11(6): 688～695

（上接第 228 页）

$x_{k+3}, x_k\}|\leqslant(2n-7)/3$，矛盾。

当 $d(x)=(n-6)/3$ 时，$|N(x_{k+1})|\geqslant(2n-6)/3-|N(x)|+|\{x_k\}|\geqslant(n+2)/3$，其后 $|N(x_{j+1})\cup N(x)|\leqslant|V(G)|-|N(x_{k+1})\setminus\{x_{k-1},x_k\}|-|\{x,x_{j+1},x_{i+1},x_{i+2}\}|\leqslant(2n-7)/3$，矛盾。

子情况 3.2.2：$V(G_1)=\{x\}$

此时，综合上面所有情况有 $(n-6)/3\leqslant d(x)=3\leqslant(n-3)/3$，有 $12\leqslant d(x)\leqslant15$。则 $\min\{|j-i|,|k-i|,|i-k|\}\leqslant4$，不妨认为 $|j-i|\leqslant4$。当 $|j-i|\leqslant3$ 时，则易有更长圈，矛盾。当 $|j-i|=4$ 时，x_{i+2} 至多和 x_{i+1}, x_{k-1} 相邻，从而 $|N(x)\cup N(x_{i+2})|\leqslant|\{x_i,x_j,x_k,x_{i+1},x_{k-1}\}|=5\leqslant(2n-7)/3$，矛盾。

至此，完成定理的证明。

参 考 文 献

1　Swamy M N S, Thulasiraman K. 图论、网络与算法[M]. 北京：高等教育出版社，1988

2　Gould R J. Updating the Hamiltonian problem-A survey[J]. J. Graph Theory, 1991, 15(2): 121～157

3　赵克文，柳柏濂. A neighborhood condition for ertives at distance two implying hamiltonicity[J]. Soochow Journal of Mathematics, 2006, 32(1): 171～177

4　Chen Guantao, Jacobson M S, Kézdy A E, et al. Tough enough chordal graphs are Hamiltonian[J]. Networks, 1998, 31(1): 29～38

5　Lai Hongjian, Yang Xiaofan, Evans D J, et al. Generalized honeycomb torus is Hamiltonian[J]. Inform. Process. Lett., 2004, 92(1): 31～37

6　Hsu H C, Li T K, Hsu L H, et al. Fault Hamiltonicity and Fault Hamiltonian Connectivity of the Arrangement Graphs[J]. IEEE Trans. on Computers, 2004, 53(1): 39～53

7　赵克文，Lai Hongjian, Shao Yehong. New sufficient condition for hamiltonian graphs[J]. Applied Mathematics Letters，（已接受，见杂志网上的本文 http://dx. doi. org/10.1016/j. aml. 2005.10.024）

8　赵克文，Gould R J. A new sufficient condition for hamiltonian graphs[J]. Arkiv for matematik, 2006, 42(2): 299～308