

# 形状特征的编码描述研究综述<sup>\*</sup>)

段立娟

(北京工业大学计算机学院 北京 100022)

**摘要** 形状特征的提取、编码与描述是图像处理中的重要研究方向。常用的形状编码描述主要分为两类:基于轮廓和基于区域的形状描述方法。本文描述和分析了常用的形状编码描述方案。

**关键词** 形状, 编码描述, 轮廓, 区域

## A Survey of Shape Feature

DUAN Li-Juan

(The College of Computer Science, Beijing University of Technology, Beijing 100022)

**Abstract** Shape feature extraction, description and matching are important research fields in image processing. The normal shape description schemes include contour-based shape description and region-base shape description. The paper introduces and analyzse the shape description schemes.

**Keywords** Shape, Coding and description, Contour, Region

形状特征是一种十分重要的视觉信息。和颜色、纹理特征相比,形状的语义信息非常丰富。形状特征的提取、编码与描述是图像处理中的一个重要研究方向。

提取图像形状特征面临的首要问题是如何从图像中分离出有意义的目标。人工手动提取形状是一种非常简单、直观,但却很费时的方法。为此,很多研究机构对形状特征的自动提取开展了研究。总体来讲,自动形状提取方法可分为两类:一类是对图像进行分割,得到一系列的区域,用这些区域来表示目标的形状;另一类是先提取图像的边缘点,然后连接边缘点,得到一系列的曲线,用这些曲线来表示所提取的形状。

在提取形状特征以后,需要对形状特征进行编码与描述。常用的形状描述方法有基于轮廓的形状描述方法和基于区域的形状描述。基于轮廓的描述方案有曲率旋转角、傅里叶描述子、链码等;基于轮廓的描述方案通常只用于描述一个单一的轮廓,不适合描述多个区域构成的形状。基于区域的描述子不仅能够描述轮廓上的点,而且能够描述构成整个形状的所有点。基于区域的形状描述方案有多层次特征向量形状描述子和矩描述子等。本文主要介绍常用的形状描述方法。

## 1 基于轮廓的形状描述

基于轮廓的形状描述包括边缘框、链码、傅里叶描述子、曲率尺度空间、旋转角等多种描述方案。

### 1.1 边缘框

边缘框(bounding box)是一种最简单的基于轮廓的形状描述方法,通过使用一个与形状的主轴平行的矩形来描述对象的形状,该描述子适合描述简单形状<sup>[2]</sup>。

图1给出采用边缘框进行形状描述的具体例子,(a)显示了包含一个对象的原始图像,(b)是提取对象的边缘框后的结果。

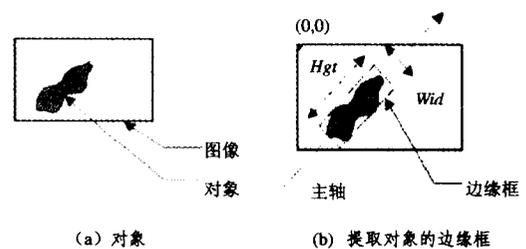


图1 采用边缘框进行形状描述(摘自文[1])

### 1.2 链码

链码(Chain Code)是一种简单的基于轮廓的形状表示方法,最初是由 Freeman<sup>[2]</sup>提出的,所以也称为 Freeman 编码。编码规则比较简单,根据相邻两点位置关系,定义了八个方向,对应的编码分别为 0,1,2,3,4,5,6,7,如图 2(a)所示。编码时,在确定起点的位置后,由当前点 P,确定其下一点的编码。按照编码规则对图 2(b)所示的形状进行编码,结果为(1,7,0,7,4,5,2,3,6,3)。如果想让链码用于匹配,必须有一个较好的确定边界初始点的方法。此外,链式编码对线状和多边形的表示具有很强的数据压缩能力,且具有一定的运算功能,如面积和周长计算等,探测边界急弯和凹进部分等都比较容易<sup>[3]</sup>。

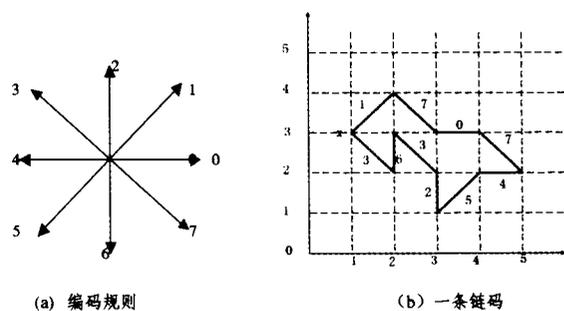


图2 链码编码(摘自文[2])

<sup>\*</sup>北京市优秀人才培养专项经费资助项目(20042D0501504)、北京教委面上项目(KM200610005012)、国家自然科学基金(60673091)、国家高技术计划项目(2006AA01Z122)和北京市自然科学基金(4072023)。段立娟 博士,副教授,主要研究方向为图像处理、数据挖掘。

### 1.3 傅里叶描述子

傅里叶描述子(Fourier descriptor)比较适合描述封闭的曲线,主要思想是将经过离散傅里叶变换后的边界作为形状特征。图3显示了复平面上一条封闭曲线,其傅里叶描述子的提取过程如下<sup>[1]</sup>。

假设形状由离散的  $N$  点  $(x(n), y(n))$  组成  $(n=1, 2, \dots, N-1)$ , 则它可以由一个周期为  $N$  的离散的复变函数来表示:  $u(n) \equiv x(n) + jy(n) (n=0, 1, 2, \dots, N-1)$ 。  $u(n)$  被离散 Fourier 变换为

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right), (0 \leq k \leq N-1) \quad (1)$$

复数序列  $\{f(k)\}$  称为所考察形状的 Fourier 描述子<sup>[4]</sup>, 一般仅选取低阶 Fourier 系数。上述 Fourier 描述子是针对闭曲线而言的。为了用类似的方法描述开曲线, 提出了 UNL Fourier 特征<sup>[5]</sup>, 它是对闭曲线的 Fourier 描述子的扩充, Yong Rui<sup>[6]</sup>等提出了一种改进的傅里叶算法, 这种算法不仅对噪音具有很好的鲁棒性, 而且对几何变换具有不变性。

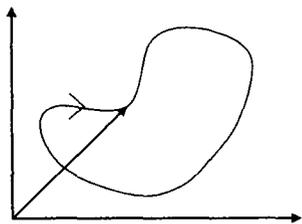


图3 复平面上的一条封闭曲线

### 1.4 曲率尺度空间形状描述子

曲线的曲率计算有多种方法。通常的方法是将曲线表示成弧长的函数, 然后求取曲率。曲率尺度空间(Curvature Scale Space)用曲线进化的方法来研究形状的特点, 这种进化方法主要是用高斯平滑来计算不同等级下的曲率, 具体思路如下<sup>[7]</sup>:

假定  $\Gamma$  是一条封闭的平面曲线,  $u$  是归一化后的弧长, 则曲线可表示成弧长的函数:

$$\Gamma = \{(x(u), y(u)) | u \in [0, 1]\} \quad (2)$$

如果用一维 Gaussian 核函数  $g(u, \sigma)$  进行曲线进化, 则得到

$$\begin{aligned} X(u, \delta) &= x(u) * g(u, \delta) \\ Y(u, \delta) &= y(u) * g(u, \delta) \end{aligned} \quad (3)$$

根据卷积的性质, 可以得到

$$\begin{aligned} X_u(u, \delta) &= x(u) * g_u(u, \delta) \\ X_{uu}(u, \delta) &= x(u) * g_{uu}(u, \delta) \end{aligned} \quad (4)$$

同理, 可以得到  $Y_u(u, \delta)$  和  $Y_{uu}(u, \delta)$ , 进化曲线的曲率就可以计算出来:

$$k(u, \delta) = \frac{X_u(u, \delta)Y_{uu}(u, \delta) - X_{uu}(u, \delta)Y_u(u, \delta)}{(X_u(u, \delta)^2 + Y_u(u, \delta)^2)^{3/2}} \quad (5)$$

随着  $\delta$  的变化,  $\Gamma_\delta$  也在变化, 因此将产生一系列的进化曲线。而且随着  $\delta$  的增长,  $\Gamma_\delta$  越来越光滑, 曲率极值点越来越少。最终, 当  $\delta$  足够大的时候, 曲率极值点消失。

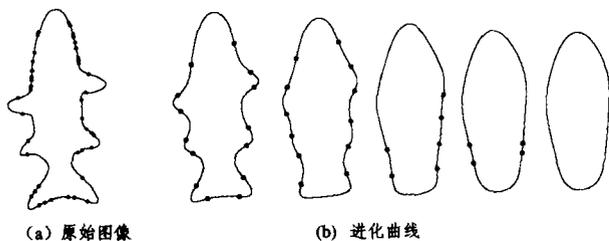


图4 提取 CSS 过程(摘自文[7])

图4显示了提取 CSS 过程。(a)是原始图像,(b)是进化曲线,在(b)中从左至右  $\delta$  依此为 1, 4, 7, 10, 12, 14。

### 1.5 旋转角

旋转角(Turning Angle)适合描述比较简单的对象,且这些对象的轮廓是一条封闭的曲线。在采用旋转角描述形状以前,要先取出对象的轮廓,然后按照图5所示三个步骤描述形状<sup>[8]</sup>。

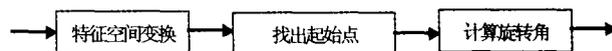


图5 采用旋转角进行形状的描述的步骤

#### (1) 特征空间变换

把轮廓上的各点  $(x_i, y_i)$  作为原变量, 对该变量进行主成分分析, 得到相互正交的第一主轴和第二主轴, 并将轮廓上各点  $(x_i, y_i)$  映射到新的空间上, 得到  $(x'_i, y'_i)$ 。

主成分分析的具体方法是先求原变量的协方差矩阵(如式(2)所示), 再求协方差矩阵的特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , 以及对应的特征向量:

$$V = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{xy} & V_{yy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} V_{xx} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m_x)(x_i - m_x) \\ V_{xy} &= V_{yx} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m_x)(y_i - m_y) \\ V_{yy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - m_y)(y_i - m_y) \end{aligned}$$

这里  $N$  表示所提取的轮廓特征点的个数,  $(x_i, y_i)$  是  $i$  个点的坐标,  $(m_x, m_y)$  是这些点的均值,  $m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$ ,  $m_y = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i$ 。

#### (2) 找出起始点

对象的轮廓与主成分分析得到的第一主轴  $s_1$  和第二主轴  $s_2$  分别有两个交点, 这些点被称为起始点。

#### (3) 求旋转角

在对象的轮廓上选择  $M$  个代表点(MPEG-7 中  $M=64$ ), 然后计算每个代表点的旋转角。

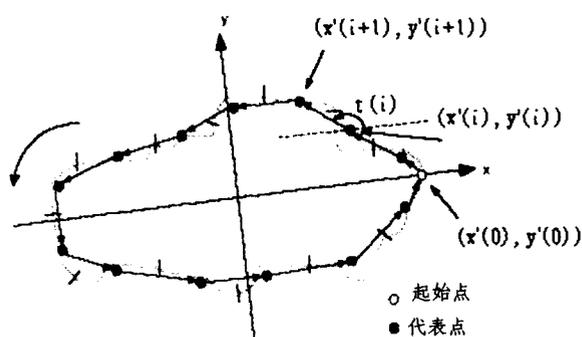


图6 提取旋转角(摘自文[8])

原先在轮廓上有  $N$  个特征点, 当  $M \geq N$  时, 为得到  $M$  个代表点, 需要进行插值; 当  $M \leq N$  时, 为得到  $M$  个代表点, 需要进行归并, 具体方法是求每  $M/N$  个点的均值, 并将其作为一个代表点。

从一个起始点开始, 沿逆时针方向计算每个代表点  $(x'_i, y'_i)$  的旋转角  $t(i)$ , 如图6所示。

$$t(i) = \arctg \frac{(y'(i+1) - y'(i))}{(x'(i+1) - x'(i))} \quad (7)$$

因为一共有四个起始点,所以每个代表点可以得到相应的四个旋转角。实质上,旋转角是相邻的两个代表点的连线与主轴(两主轴交点与起始点连线)的夹角。

## 2 基于区域的形状描述

基于轮廓的描述方案,像曲率旋转角、傅里叶描述子、链码等方法不适合描述多个区域构成的形状,它们通常只用于描述一个单一的轮廓。也就是说,基于轮廓的描述子不适合描述像商标(trademarks)、标记(logos)、徽章( emblems)、艺术图片(clipart)、字符(characters)、自然风景图像(natural scenes)等这些由几个不连接的区域组成的比较复杂的形状<sup>[9]</sup>,且当图像中的相邻对象稍微有点接触或者刚好没有接触的时候,得到的结果是截然不同的。例如图7中,(a)对象和(c)对象在形状上很相似,但是相应的轮廓却差别很大。

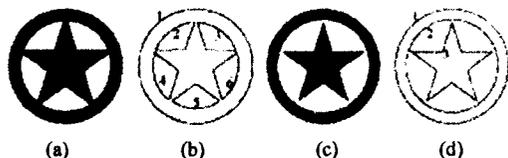


图7 复杂形状的边缘提取结果比较(摘自文[9])

基于区域的描述子不仅能够描述轮廓上的点,而且能够描述构成整个形状的所有点。基于区域的形状描述方案包括:多层次特征向量形状描述子、矩描述子和 Zernike 矩形状描述子。

### 2.1 多层次特征向量形状描述子

多层次特征向量形状描述子(Multi-layer eigenvector shape descriptor),简称 MLEV<sup>[10]</sup>。该描述子是对形状边缘框描述子的扩展和改进。MLEV 具有旋转、平移、尺度不变性。下面首先介绍该描述子的提取过程,然后介绍支持旋转、平移、尺度不变性的四个参数,最后介绍该描述子的匹配准则。

#### 2.1.1 多层次特征向量形状描述子的提取过程

第一步:获得特征向量,把形状划分为四个区域。

给定一个形状,形状内的每一个像素可以看作是二维空间中的随机变量。计算形状所包含的像素的均值和协方差矩阵,并得到特征向量。假定特征向量的主轴分别为  $s_1$  和  $s_2$ ,如图8所示主轴把形状划分为四个区域  $R_1, R_2, R_3, R_4$ <sup>[10]</sup>。

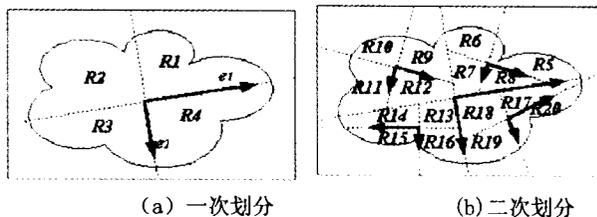


图8 形状划分过程(摘自文[10])

第二步:二次划分。

对于每一个子区域  $R_1, R_2, R_3, R_4$ ,分别计算它们的特征向量和主轴,并分别划分为四个区域。图8(b)具体显示了图8(a)  $R_1, R_2, R_3, R_4$  的二次划分结果。

经过上述两个步骤,形成了一种多层次的特征向量,如图9所示。

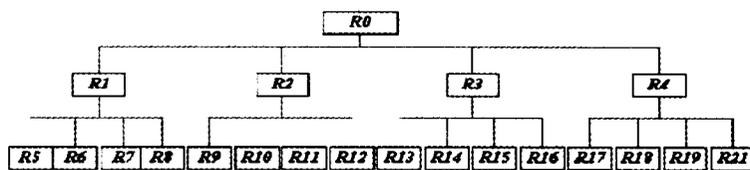


图9 多层次特征向量(摘自文[10])

#### 2.1.2 支持旋转、尺度、平移不变性的四个参数

多层次特征向量形状描述子具有旋转、尺度、平移不变性,并采用如下四个参数支持这些不变性<sup>[10]</sup>。

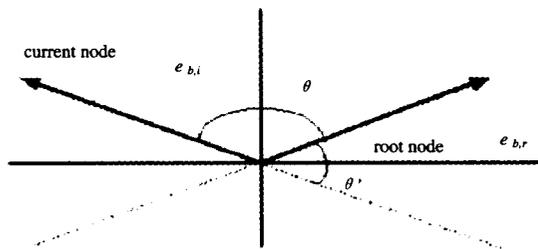


图10 获得 normal\_angle(摘自文[10])

① eigen\_ratio:是次特征向量的特征值与主特征向量的

特征值的比值,即

$$eigen\_ratio(i) = \frac{\lambda_{s,i}}{\lambda_{b,i}} \quad (8)$$

② normal\_angle:是结点  $i$  的主特征向量与根结点的主特征向量的夹角。

实际上,这两个向量的夹角有两个,如图10<sup>[10]</sup>所示,较小的那个角作为 normal\_angle。

③ center:是结点  $i$  的中心和根结点的中心的距离与该结点的主特征向量特征值的比值,即:

$$center(i) = \frac{|c_i - c_r|}{\lambda_{b,r}} \quad (9)$$

④ compactness:是结点  $i$  的区域面积与该区域的边缘框面积之比。图11<sup>[10]</sup>显示区域面积与边框面积的对应关系,具体定义为

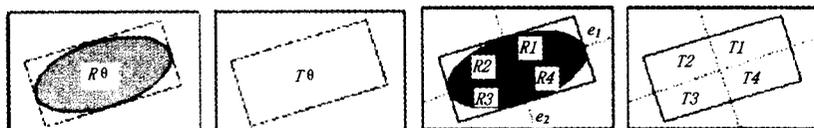


图11 区域面积与边框面积的对应关系(摘自文[10])

$$compactness(i) = \frac{R_i}{T_i} \quad (10)$$

经过上述划分,一个形状可以用 21 个区域( $R_1 \dots R_{21}$ )描述,每个区域包括四个参数,这样一个形状可以用 84 个参数来表征。

### 2.1.3 形状匹配准则

假定有两个对象,其 MLEV 描述分别为  $q, s$ , 则其匹配方法为

$$d(q, s) = \sum_{i=0}^{K-1} |q_i - s_i| \quad (11)$$

### 2.2 矩描述子

矩(Moments descriptor)特征用二维随机变量的概率分布来表示归一化后的灰度图像,它与所描述形状的尺度、位置、角度以及灰度变换有关<sup>[11]</sup>。

通常,  $(p, q)$  阶矩定义为

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad (12)$$

其中  $f(x, y)$  表示灰度值。对于数字化图像可以采用求和形式:

$$m_{pq} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) \quad (13)$$

采用中心矩表示方式可以实现平移不变性,  $(p, q)$  阶中心距定义为

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q f(x, y) dx dy \quad (14)$$

其中,  $\bar{x} = m_{10} / m_{00}, \bar{y} = m_{01} / m_{00}$ , 即  $(\bar{x}, \bar{y})$  是  $f(x, y)$  所表示的形状的质心。对数字图像而言,积分化为求和:

$$\mu_{pq} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q f(x, y) \quad (15)$$

将中心矩正则化,得到正则化的矩:

$$\eta_{pq} = \mu_{pq} / (\mu_{00})^r \quad (16)$$

其中,  $r = \frac{1}{2}(p+q)+1$ , 当  $p=2, 3 \dots$

从二阶和三阶正则化矩出发,可以导出七个矩不变量<sup>[11]</sup>:

$$\begin{aligned} m_1 &= \eta_{20} + \eta_{02}, \\ m_2 &= (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2, \\ m_3 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{33})^2, \\ m_4 &= (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{33})^2, \\ m_5 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{33})^2] + \\ &\quad (3\eta_{21} - \eta_{33})(\eta_{21} + \eta_{33})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{33})^2], \\ m_6 &= (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{33})^2] + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \\ &\quad \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{33}), \\ m_7 &= (3\eta_{21} - \eta_{33})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{33})^2] - \\ &\quad (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{33})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \\ &\quad \eta_{33})^2] \end{aligned} \quad (17)$$

通常情况下,一个形状的矩表示为:  $f_m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ 。上述矩不变量是一种原始信息不可恢复的编码方式。

### 2.3 Zernike 矩形状描述子 (Multi-layer eigenvector shape descriptor)

Zernike 矩具有旋转不变性、对噪音不敏感、计算快、多层描述等特点,通过适当的规一化变换可以达到尺度不变性。在第 48 次 MPEG 国际会议上 Zernike 矩已经被作为一个基于区域的形状描述子纳入到 XM 平台中。另外, Zernike 矩可以看成是一种可恢复原始信息的编码。

Zernike 矩的具体提取步骤如下<sup>[9,12]</sup>:

a) 求出所给形状的最小有界矩形,假设矩形的长、宽分别为  $a, b$ 。

b) 将此矩形的中心平移到原点,再缩放  $2/\sqrt{a^2+b^2}$  倍,将该形状放到单位圆中。

c) 在这个单位圆中,计算所考虑的形状  $f(x, y)$  的 Zernike 矩,即计算数列  $\{A_m\}$ :

$$A_m = \frac{n+1}{\pi} \sum_x \sum_y f(x, y) V_m^*(x, y) \quad (18)$$

其中,  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;  $n$  是非负整数;  $m$  是非零整数,且满足约束条件:  $|m| \leq n, n - |m|$  是偶数;  $V_m^*$  是  $V_m$  的共轭复数,具体计算如下:

$$V_m(x, y) = V_m(\rho, \vartheta) = R_m(\rho) \exp(jm\vartheta) \quad (19)$$

$(\rho, \vartheta)$  是  $(x, y)$  所对应的极坐标。Zernike 半径多项式  $R_m(\rho)$  定义如下:

$$R_m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} [(-1)^s \frac{(n-s)!}{s! (\frac{n+|m|}{2}-s)! (\frac{n-|m|}{2}-s)!} \rho^{n-2s}] \quad (20)$$

可以看出,  $R_m(\rho) = R_{n-m}(\rho)$ , 即  $R_m(\rho)$  与  $m$  的符号无关。

通常情况下,一个形状的 Zernike 矩由 36 维的向量组成<sup>[9]</sup>(图 12)。

n	矩	个数	总个数
0	A <sub>00</sub>	1	
1	A <sub>11</sub>	1	
2	A <sub>20</sub> , A <sub>22</sub>	2	
3	A <sub>31</sub> , A <sub>33</sub>	2	
4	A <sub>40</sub> , A <sub>42</sub> , A <sub>44</sub>	3	
5	A <sub>51</sub> , A <sub>53</sub> , A <sub>55</sub>	3	
6	A <sub>60</sub> , A <sub>62</sub> , A <sub>64</sub> , A <sub>66</sub>	4	
7	A <sub>71</sub> , A <sub>73</sub> , A <sub>75</sub> , A <sub>77</sub>	4	
8	A <sub>80</sub> , A <sub>82</sub> , A <sub>84</sub> , A <sub>86</sub> , A <sub>88</sub>	5	
9	A <sub>91</sub> , A <sub>93</sub> , A <sub>95</sub> , A <sub>97</sub> , A <sub>99</sub>	5	36
10	A <sub>10,0</sub> , A <sub>10,2</sub> , A <sub>10,4</sub> , A <sub>10,6</sub> , A <sub>10,8</sub> , A <sub>10,10</sub>	6	

图 12 区域面积与边框面积的对应关系

**总结** 在计算机视觉和模式识别中,形状特征的提取与编码描述具有非常重要的作用。本文介绍了两种常用的形状编码描述方法:基于轮廓的形状描述方法和基于区域的形状描述方法。有效的形状编码描述与匹配在基于内容的图像检索系统中是非常重要的。目前形状描述和基于形状的检索仅在一些特定的图像检索系统中得到有效应用,如人脸识别系统、商标检索系统等。其主要原因是形状编码描述的困难性和标准化问题。形状描述的困难性在于要求形状特征描述子应该具有旋转、平移、尺度不变性,且相似性度量与感知一致。为了解决对多媒体信息描述的标准问题,实现快速有效的检索,国际动态图像专家组制定了 MPEG7。MPEG7 对各种不同类型的多媒体信息进行标准化的描述,它要求描述子满足如下的几个准则<sup>[1]</sup>:高的检索准确率、描述子需要的存储空间比较小、适合一般应用、描述子提取和比较的运算量比较小、不会因为数据库的增长而导致性能的下降、层次式的由粗到细的结构。有兴趣的读者可以参看文<sup>[13]</sup>。

### 参考文献

1 Paquet E, Murching A, Naveen T, et al. Description of Shape Information for 2-D and 3-D Objects. Signal Processing: Image Communication. 2000, 103~122

(下转第 247 页)



图 8 中值滤波

**结论** 本文所提出的灰度水印镶嵌方式能够在基本不破坏原图视觉效果的情况下实现水印的嵌入, 嵌入的水印具有不可见性, 并能被较好地提取出来。而且对剪切、JPEG 压缩、滤波等操作有一定的抵抗能力, 有一定的实用价值。

**参 考 文 献**

- 1 Van Schyndel R G, et al. A digital watermark. In: Proc. of ICIP 94, 1994, 2: 86~89
- 2 Tirkel A, Randkin G, Vanschyndel R, Ho W, et al. Electronics watermark. In: Proceedings DICTA 1993, December 1993. 666~

672

- 3 Bender W, Gruhl D, Morimoto N. Techniques for data hiding. In: Proceedings of the SPIE, Storage and Retrieval for Image and Video Databases III, Vol. 2420, San Jose, CA, Feb. 1995
- 4 Koch E, Zhao J. Towards robust and hidden image copyright labeling. In: IEEE workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, Neos Marouaras, Greece, June 1995, 123~132
- 5 Cox I. J, Killian J, Leighton F T, et al. Secure Spread Spectrum Watermarking for multimedia. IEEE Trans. On Image Processing, 1997, 6(12): 1673~1687
- 6 International Organization for Standardization. Information Technology-JPEG 2000 Image Coding System, ISO/IEC 15444, July 2002
- 7 Kundur D, Hatainakos D. A robust digital image watermarking method using wavelet-based fusion. In: Proc. of ICIP 97, 1997, 1: 544~547
- 8 Xia X G, Boncelet C G, Arce C R. Wavelet transform based watermark for digital images. OPTICS EXPRESS, 1998, 3(12): 497~1998
- 9 孙兆林编著. Matlab6. x 图像处理. 清华大学出版社

(上接第 218 页)

- 2 Freeman H. Computer processing of line-drawing images. Computing Surveys, 1974, 6(1): 57~97
- 3 <http://202.119.109.14/jpkc/jiaoan/Chinese/kjsjjg.htm>
- 4 Zahn C T, Roskies R Z. Fourier Descriptors for Plane Closed Curves. IEEE Trans on Computers, 1972, 21(3): 269~281
- 5 Rauber T W. Two-dimension Shape Description; [Tech Rep]. Gruninova-RT-10-94. Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal, 1994
- 6 Rui Y, She A C, Huang T S. A Modified Fourier Descriptor for Shape Matching in MARS. In: Chang S K, ed. Image Databases and Multimedia Search, Series on Software Engineering and Knowledge Engineering, World Scientific Publishing House in Singapore, 1998, 8: 165~180
- 7 Mokhtarian F, Abbasi S, Kittler J. Robust and Efficient Shape Indexing through Curvature Scale Space. In: Proc. British Machine Vision Conference, 1996. 53~62

- 8 Zibreira C, Pereira F. A study of similarity measures for a turning angles-based shape descriptor. In: Proc. Conf. on Telecommunications - ConfTele, Figueira da Foz-Portugal, April 2001
- 9 Kim W Y, Kim Y S. A region-based shape descriptor using Zernike moments. Signal Processing: Image Communication, 2000, 16(1-2): 95~102
- 10 Kim H K, Kim J D. Region-based shape descriptor invariant to rotation, scale and translation. Signal Processing: Image Communication, 2000, 16(1-2): 87~93
- 11 Hu M K. Visual pattern recognition by moment invariants. IRE Transactions on information theory, 1962, IT-8: 179~187
- 12 Khotanzad A, Hong Y H. Invariant Image Recognition by Zernike Moments. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(5): 489~497
- 13 Chang S-F, Sikon T, Puri A. Overview of MPEG-7 standard. IEEE Trans Circuits and System for Video Technology, 2001, 11(6): 688~695

(上接第 228 页)

$x_{k+3}, x_k\} \leq (2n-7)/3$ , 矛盾。  
 当  $d(x) = (n-6)/3$  时,  $|N(x_{k+1})| \geq (2n-6)/3 - |N(x)| + |\{x_k\}| \geq (n+2)/3$ , 其后  $|N(x_{j+1}) \cup N(x)| \leq |V(G)| - |N(x_{k+1}) \setminus \{x_{k-1}, x_k\}| - |\{x, x_{j+1}, x_{i+1}, x_{i+2}\}| \leq (2n-7)/3$ , 矛盾。

**子情况 3.2.2:  $V(G_1) = \{x\}$**

此时, 综合上面所有情况有  $(n-6)/3 \leq d(x) = 3 \leq (n-3)/3$ , 有  $12 \leq d(x) \leq 15$ 。则  $\min\{|j-i|, |k-i|, |i-k|\} \leq 4$ , 不妨认为  $|j-i| \leq 4$ 。当  $|j-i| \leq 3$  时, 则易有更长圈, 矛盾。当  $|j-i| = 4$  时,  $x_{i+2}$  至多和  $x_{i+1}, x_{k-1}$  相邻, 从而  $|N(x) \cup N(x_{i+2})| \leq |\{x_i, x_j, x_k, x_{i+1}, x_{k-1}\}| = 5 \leq (2n-7)/3$ , 矛盾。

至此, 完成定理的证明。

**参 考 文 献**

- 1 Swamy M N S, Thulasiraman K. 图论、网络与算法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988

- 2 Gould R J. Updating the Hamiltonian problem-A survey[J]. J. Graph Theory, 1991, 15(2): 121~157
- 3 赵克文, 柳柏濂. A neighborhood condition for vertices at distance two implying hamiltonicity[J]. Soochow Journal of Mathematics, 2006, 32(1): 171~177
- 4 Chen Guantao, Jacobson M S, Kézdy A E, et al. Tough enough chordal graphs are Hamiltonian[J]. Networks, 1998, 31(1): 29~38
- 5 Lai Hongjian, Yang Xiaofan, Evans D J, et al. Generalized honeycomb torus is Hamiltonian[J]. Inform. Process. Lett., 2004, 92(1): 31~37
- 6 Hsu H C, Li T K, Hsu L H, et al. Fault Hamiltonicity and Fault Hamiltonian Connectivity of the Arrangement Graphs[J]. IEEE Trans. on Computers, 2004, 53(1): 39~53
- 7 赵克文, Lai Hongjian, Shao Yehong. New sufficient condition for hamiltonian graphs[J]. Applied Mathematics Letters, (已接受, 见杂志网上的本文 [http://dx. doi. org/10.1016/j. aml. 2005. 10. 024](http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2005.10.024))
- 8 赵克文, Gould R J. A new sufficient condition for hamiltonian graphs[J]. Arkiv for matematik, 2006, 42(2): 299~308