# 关于 PSO 方法中粒子运行轨迹的修正*)

窦全胜[1] 周春光[2] 刘晓华[1] 张忠波[3]
(山东工商学院信息与电子工程学院 烟台 264005)[1]
(吉林大学计算机科学与技术学院 长春 130012)[2] (吉林大学数学学院 长春 130012)[3]

**摘 要** 粒子群优化方法(PSO Particle Swarm Optimization)由 Kennedy 和 Eberhart 于 1995 年提出,基于群体智能行为的演化计算方法,并广泛应用于各类优化问题。在一些研究中,对 PSO 的粒子收敛性及粒子运行轨迹进行了分析,有一定理论价值和指导意义,本文针对一些分析过程中存在的问题进行了讨论,并对相关结论进行了修正。

**关键词** 粒子群方法,收敛性

## A Revise on Particle Trajectories of Particle Swarm Optimization

DOU Quan-Sheng[1] ZHOU Chun-Guang[2] LIU Xiao-Hua[1] ZHANG Zhong-Bo[3]
(School of Information and Electronics Engineering, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005)[1]
(College of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun 130012)[2]
(School of Mathematic, Jilin University, Changchun 130012)[3]

**Abstract** Particle Swarm Optimization (PSO)method was proposed by Kennedy and Eberhart in 1995, it can be used to solve a wide array of different optimization. The convergence properties and trajectories of particles are studied in some research which has great theoretical value and significance. But there is a series of problems in those researches. Some problems on particle trajectories of particle swarm optimization are discussed and revised in this paper.

**Keywords** Particle swarm optimization, Convergence property

粒子群优化(Particle Swarm Optimization PSO)方法是由 Kennedy 和 Eberhart 于 1995 年提出的一种演化计算技术,广泛应用于各类优化问题。文[1]对粒子的收敛性进行了分析,刻画了每个粒子在搜索空间内的运动过程,有一定的理论意义。但在证明过程中,存在一些问题,粒子不能收敛到文[1]所描述的稳定点上,特在此加以修正。

## 1 粒子运行轨迹收敛性证明中存在的几个问题

文[1]中定理 1 在一定假设的基础上,定性的刻画了每个粒子在搜索空间内的运动过程,为算法的改进提供了一定的依据。其证明过程及结论主要引用了文[2]中的方法,其中存在一些问题,下面将加以指出和改正:

1)在一定假设条件下,粒子 $x$ 在 $t+1$ 步的位置由下式确定:

$$v_{t+1}=wv_t+\phi_1(x_t-p_i)+\phi_2(x_t-p_g)$$
$$x_{t+1}=x_t+v_{t+1} \tag{1}$$

(文[1]将 $v_{t+1}=wv_t+\phi_1(x_1-p_i)+\phi_2(x_t-p_g)$ 误写成 $v_{t+1}=wx_t+\phi_1(x_t-p_i)+\phi_2(x_t-p_g)$,此处已更正)。对上式进行改写,得到文[1]中的式(2)应为:

$$x_{t+1}=(1+\phi_1+\phi_2)x_t-\phi_1 p_i-\phi_2 p_g+wv_t \tag{2}$$

而不应该是文[1]中的

$$x_{t+1}=(1-\phi_1-\phi_2)x_t+\phi_1 p_i+\phi_2 p_g+wv_t$$

2)由于文[1]中式(2)的错误,文[1]中的式(3)、(4)、(5)应分别修改为:

$$x_{t+1}=(1+w+\phi_1+\phi_2)x_t-wx_{t-1}-\phi_1 p_i-\phi_2 p_g \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ x_t \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+w+\phi_1+\phi_2 & -w & -(\phi_1 p_i+\phi_2 p_g) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$(1-\lambda)(w-\lambda(1+w+\phi_1+\phi_2)+\lambda^2)=0 \tag{5}$$

由此,矩阵 $A$ 应改为:

$$A=\begin{bmatrix} 1+w+\phi_1+\phi_2 & -w & -(\phi_1 p_i+\phi_2 p_g) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其特征值也相应的修改为:

$$\lambda_1=1$$
$$\lambda_2=\frac{1+w+\phi_1+\phi_2+\gamma}{2}$$
$$\lambda_3=\frac{1+w+\phi_1+\phi_2-\gamma}{2}$$

其中:

$$\gamma=\sqrt{(1+w+\phi_1+\phi_2)^2-4w}$$

3)经过一系列的推导,可以得到文[1]中的式(7)

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ x_t \\ 1 \end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^t \end{bmatrix}Q^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

进一步,可以得到文[1]中式(8)

*)基金项目:国家自然科学基金项目(批准号:60433020);教育部"符号计算与知识工程"重点实验室;985 工程:"计算与软件科学科技创新平台"项目资助。窦全胜 博士,副教授,主要研究方向:计算智能的理论与方法;周春光 教授,博士生导师,研究方向:计算智能,图形图像处理等;刘晓华 博士研究生,研究方向:人工智能;张忠波 博士,研究方向:图形图像处理。

$$x_t=k_1+k_2\lambda_2^t+k_3\lambda_3^t$$

其中，$k_1$、$k_2$、$k_3$ 是待定的常数。值得注意的是，以上二式只有当 $t\geqslant 2$ 时，才会成立，而文[1]在此恰恰忽略了这一点。为了确定 $k_1$、$k_2$、$k_3$，文[1]在式(9)中使用了以下二式：

$$x_0=k_1+k_2+k_3$$

$$x_1=k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_2$$

实际上，这两个公式是不成立的，因此，无法具体确定这三个常数 $k_1$、$k_2$、$k_3$，换句话说，就是我们只能确定粒子在这种假设条件下收敛，而无法确定粒子具体收敛到什么地方。

## 3 关于文[1]的修正和补充说明

根据以上分析，文[1]中定理应修改为：在 PSO 方法中，假设粒子 $x_i$ 搜索到的最好位置 $p_i$ 和整个群体搜索到的最好位置 $p_g$ 固定不变，$\phi_1=c_1r_1$、$\phi_2=c_2r_2$ 为常数，压缩因子 $\chi=1$，搜索空间没有限制，存在合适参数，使得当 $t\to\infty$时，粒子运行轨迹收敛，但是不能确定其收敛到以 $p_i$ 和 $p_g$ 为端点的线段上。

文[1]中改进方法的参数设置是通过大量的实验获得的，其数据是真实有效的，但是改进方法能够获得较好结果的原因还需要进一步细致的研究。

## 参考文献


1 窦全胜，周春光，马铭. 粒子群优化的两种改进策略. 计算机研究与发展，2005,42(5):897～904

2 Van den B F. An analysis of Particle Swarm Optimizers:[Ph D dissertation]. Pretoria:University of Pretoria, 2001


**附注**：文[1]中的定理及证明过程

**定理 1** 在 PSO 方法中，假设粒子 $x_i$ 搜索到的最好位置 $p_i$ 和整个群体搜索到的最好位置 $p_g$ 固定不变，$\phi_1=c_1r_1$、$\phi_2=c_2r_2$ 为常数，压缩因子 $\chi=1$，搜索空间没有限制，则当 $t\to\infty$时，粒子 $x_i$ 最终将收敛到以 $p_i$ 和 $p_g$ 为端点的线段上。

证明：不妨设搜索空间的维数是 1，粒子 $x$ 在 $t+1$ 步的位置由下式确定：

$$x_{t+1}=wx_t+\phi_1(x_t-p_i)+\phi_2(x_t-p_g)$$

$$x_{t+1}=x_t+v_{t+1} \tag{1}$$

对(1)式改写并整理，得到：

$$x_{t+1}=(1-\phi_1-\phi_2)x_t+\phi_1p_i+\phi_2p_g+wv_t \tag{2}$$

把 $v_t=x_t-x_{t-1}$ 带入(2)式得到：

$$x_{t+1}=(1+\omega-\phi_1-\phi_2)x_t-wx_{t-1}+\phi_1p_i+\phi_2p_g \tag{3}$$

用矩阵和向量表示成：

$$\begin{bmatrix}x_{t+1}\\x_t\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+w-\phi_1-\phi_2 & -w & \phi_1p_i+\phi_2p_g\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_t\\x_{t-1}\\1\end{bmatrix}$$

(4)式中矩阵的特征方程为：

$$(1-\lambda)(w-\lambda(1+w-\phi_1-\phi_2)+\lambda^2)=0 \tag{5}$$

求解方程(5)得到矩阵的三个特征值

$$\lambda_1=1$$

$$\lambda_2=\frac{1+\omega-\phi_1-\phi_2+\gamma}{2}$$

$$\lambda_3=\frac{1+w-\phi_1-\phi_2-\gamma}{2}$$

其中：

$$\gamma=\sqrt{(1+w-\phi_1-\phi_2)^2-4w}$$

令

$$A=\begin{bmatrix}1+w-\phi_1-\phi_2 & -w & \phi_1p_i+\phi_2p_g\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}、$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$$

则存在可逆矩阵 $Q$，使 $A=Q\Lambda Q^{-1}$，因此(4)可以写成：

$$\begin{bmatrix}x_{t+1}\\x_t\\1\end{bmatrix}=Q\Lambda Q^{-1}\begin{bmatrix}x_t\\x_{t-1}\\1\end{bmatrix} \tag{6}$$

即：

$$\begin{bmatrix}x_{t+1}\\x_t\\1\end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda_2^t&0\\0&0&\lambda_3^t\end{bmatrix}Q^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_0\\1\end{bmatrix} \tag{7}$$

把(7)式展开，可以得到：

$$x_t=k_1+k_2\lambda_2^t+k_3\lambda_3^t \tag{8}$$

其中，$k_1$、$k_2$、$k_3$ 是特定的常数，它的值由该粒子初始位置所确定 b

由(8)式，有：

$$\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\lambda_1&\lambda_2\\1&\lambda_1^2&\lambda_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix} \tag{9}$$

另外，由(3)式，$x_2$ 可由 $x_1$、$x_0$ 表示成：

$$x_2=(1+w-\phi_1-\phi_2)x_1-wx_0+\phi_1p_i+\phi_2p_g \tag{10}$$

结合(9)式和(10)式，可分别得到 $k_1$、$k_2$ 和 $k_3$ 的值[17]

$$k_1=\frac{\phi_1p_i+\phi_2p_g}{\phi_1+\phi_2}$$

$$k_2=\frac{\lambda_3(x_0-x_1)-x_1+x_2}{\gamma(\lambda_2-1)}$$

$$k_3=\frac{\lambda_2(x_1-x_0)+x_1-x_2}{\gamma(\lambda_3-1)}$$

不难找到合适的参数 $w$、$\phi_1$ 和 $\phi_2$ 使 $max(\|\lambda_3\|,\|\lambda_2\|)<1$[15,17]，其中，$\lambda_3$、$\lambda_2$ 可以是复数。

显然，当 $max(\|\lambda_3\|,\|\lambda_2\|)<1$ 时：

$\lim\limits_{t\to\infty}x_t=k_1=\alpha p_i+(1-\alpha)p_g$，其中，

$$\alpha=\frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}$$

故而，粒子 $x_i$ 将收敛到以 $p_i$ 和 $p_g$ 为端点的线段上。

证毕。