基于小波变换的图像去噪*)

熊 江

(重庆三峡学院计算机科学系 重庆万州 404000)

摘 要 与传统的傅里叶变换去噪相比,小波能去噪同时保留图像细节特征。针对较好的小波去噪,本文研究了小波阈值去噪的阈值函数选取,阈值大小确定和小波去噪方法。

关键词 小波,图像去噪,阈值

Image Denoising Based on Wavelet Transform

XIONG Jiang

(Department of Computer Science, Chongqing Three Gorges College, Wanzhou 404000)

Abstract Compareed with traditional Fourier-transform denoising, wavelet denoising can make the image denoising and keep the detail of the image. This paper is mainly about choosing of the thresholding function, ascertaining of the threshold and wavelet denosing.

Keywords Wavelet, Image denoising, Threshold

1 引言

人类获取信息的主要来源的 90%是来自视觉,所以应用图像技术广泛地涉及到各个领域中。由于计算机技术和网络技术的迅速发展,带动了图像处理技术迅猛发展。小波变换作为一种新颖的数学工具,其应用范围涉及图像增强,数据压缩,图像去噪,边缘检测,纹理分析和分割等不同领域。

图像在采集和传输的过程中会不可避免地受到噪声污染。传统的傅里叶变换不具有时域局部性,所以在滤除噪声的同时也平滑了图像的锐变部分。小波消噪主要是利用噪声与图像信号在频率上分布的不同,图像信号主要分布在低频区域,而噪声主要分布在高频区域,但同时图像的细节也分布在高频区域,小波去噪使得原始图像的结构信息和细节信息很容易被提取是因为小波具有以下的特点:(1)低熵性,小波系数的稀疏分布,使得图像变换后的熵降低;(2)多分辨率性,由于采用了多分辨率分析,因此可以非常好地刻画信号的非平稳特征,如边缘、尖峰、断点等;(3)去相关性,因为小波变换可以对信号进行去相关,且噪声在变换后有白化趋势,所以小波域比空域更利于去噪;(4)选基灵活性,由于小波变换可以灵活选择变换基,从而对不同的应用场合,对不同的研究对象,可以选用不同的小波母函数,以获得最佳的效果。因此,由于小波变换的种种特性使小波变换在增强图像细节的同时抑制了噪声。

2 小波变换及其算法

1987 年法国科学家 Mallat 将计算机视觉领域内的多分辨率分析(MRA)思想引入小波分析中,给出了一种带滤波器结构的小波变换与重构算法。基于小波变换的去噪方法是先将带有噪声的数据通过小波变换展开成小波级数,然后通过阈值方法抽取重要的小波级数,再把去噪后的小波系数经过小波逆变换重建未知信号的逼近。在高斯噪声背景下,使用正交小波级数变换的优点在于各层的小波级数具有相同方差分布特性,便于系数域的统一处理。基于小波变换去噪的方法中,小波系数域的处理方法及阈值的估计是两个关键技术。

3 阈值函数的选取

对于阈值函数的确定,Donoho 提出了两种方法:硬阈值和软阈值。硬阈值函数为:

$$d_m = h_T(x) = \begin{cases} x & 若|x|>T \\ 0 & 若|x|\leqslant T \end{cases}$$

软阈值函数为:

$$d_m = s_T(x) = \begin{cases} x-T & 若 x>T \\ x+T & 若 x<-T \\ 0 & 若|x|\leqslant T \end{cases}$$

阈值估计是根据信号系数的大小决定观测数据的取舍。但由于信号系数是未知的,因此不可计算。对它最简单的改进是:不再用信号内积系数进行阈值判别,而直接用观测信号内积系数进行阈值判别,这是实际可行的一种算法。Donoho 提出了小波域处理方法,已经证明在高斯白噪声下对光滑信号是渐进最优的。

Donoho 和 Johnstone 提出的软阈值和硬阈值方法是最常用的小波系数取舍方法,它们按下面的方式进行筛选:

$$T_{hard}(\omega_k^j, \lambda) = \omega_k^j I(|\omega_k^j| - \lambda)$$

$$T_{soft}(\omega_k^j, \lambda) = \mathrm{sgn}(\omega_k^j)\frac{|\omega_k^j| - \lambda + ||\omega_k^j| - \lambda|}{2}$$

上式中的 ω_k^j 是噪声图像的小波变换,λ 是小波门限值,I 是单位阶跃函数,sgn(·)为符号函数。

4 阈值的确定

阈值的确定使小波收缩去噪最关键的一步,阈值过小,图

*)重庆市教委科研项目资助(项目编号:KJ061107)和重庆三峡学院校极科研项目资助(项目编号:2005-sxxyyb-002)。**熊 江** 副教授,硕士,研究方向为计算机网络及硬件。

像欠平滑,去噪后的图像仍有噪声存在;阈值过大,会使图像过于平滑,图像的细节特征可能丧失。在对小波系数进行阈值操作过程中,有两种方式,其一对每一个系数进行阈值操作,其二使成块系数进行阈值操作。

4.1 点阈值去噪

阈值可以分为全局阈值和局部自适应阈值,前者对所有的小波系数使用同一个阈值,后者在每一分解尺度自适应选择阈值,阈值仅用到当前尺度。所有阈值都需用到噪声方差σ的估计,Donoho 和 Johnstone 用精细尺度的小波系数的中值绝对偏差估计噪声强度:

$$\hat{\sigma}=\frac{median(\{w_{J-1,k}:k=0,1,\cdots\cdots 2^{J-1}-1\})}{0.6745},$$

理由为精细尺度的小波系数主要由噪声组成。

首先引入对角线性投影(DLP)的 Oracle 风险。小波系数的对角投影算子为 $T_{DP}(w,\lambda)=(\lambda_i w_i)_{i=1}^{N}\ \lambda_i\in\{0,1\}$,估计子保留或去除每一个小波系数,有 N 个 λ 参数。Donoho 和 Johnstone 引入了 Oracle 风险选择 λ,优化的 Oracle 风险是:$R_{oracle}=(DP,w)=\sum_{i=1}^{n}\min(w_i^2,\sigma^2)$。实际上,由于真实的小波系数未知,不能获得 Oracle 风险,而只能接近这个理想风险。

4.1.1 统一阈值

Donoho 和 Johnstone 提出的 VisulShrink 方法定义的小波阈值按下面的公式进行计算:

$\lambda=\sigma\sqrt{2\times\ln(n)}$

上式中的 n 是图像的采样总数,σ 是噪声的标准差。这个估计在 $2\ln(n)$ 因子下可获得 Oracle 估计的性能:$R(\hat{w},w)\leqslant(2\ln(n)+1)(1+R_{oracle}(DP,w))$。Visushrink 通常为较大的阈值,产生平滑度较高的函数 f 的估计,但是均方误差较大。如果真实信号为白噪声,即 $S_n=Z_n$,则真实信号的估计以较高的概率为零;当 $n\to\infty$时,$P(\max_{n}Z_n>\sqrt{a\ln(n)})\to 0$。Donoho 和 Johnstone 证明,VisulShrink 估计方法是一种简单的阈值方法,在 Besov 空间,它是自适应的和渐进最优的,估计效果优于线性估计方法。不足之处是估计的信号过于平滑。

4.1.2 极小极大阈值

为了改进风险界$\Lambda_N=2\ln(n)+1$,选择阈值λ_n^* 使界$\Lambda_n^*=\inf_{\lambda}\sup_{w}\left\{\frac{R_\lambda(w)}{n^{-1}+R_{orcle}(DP,w)}\right\}$最小,则 $R(\hat{w},w)\leqslant\Lambda_n^*(1+R_{orcle}(DP,w))$,其中$\Lambda_n^*\leqslant 2\ln(n)+1$,且$\Lambda_n^*$ 渐进地逼近 $2\ln(n)$,λ_n^* 渐进地逼近$\sqrt{2\ln(n)}$。极小极大阈值小于统一阈值,因此平滑性略差,但是风险小,性能好。

4.1.3 无偏风险估计阈值

Donoho 和 Johnstone 依据斯坦无偏估计原理提出了 sureshrink 阈值,通常比 Visushrink 小。Sureshrink 也渐进接近极小极大风险。在每一尺度选择不同阈值,以最小化风险,理论基础来源于斯坦无偏估计。Visushrink 阈值和 riskshrink 阈值实际上是总体阈值,所有的尺度,所有的系数阈值都一样。SURE 阈值充分利用小波变换的多分辨率特性,不同的分解尺度选择不同的阈值,用此阈值收缩尺度的小波系数。这属于数据驱动的自适应阈值选取方式。

对于软阈值估计子,则风险的估计可以写为:

$$SURE(\lambda,x)=d-2\cdot I\{i:|x_i|\leqslant\lambda\}+\sum_{i=1}^{d}\min^2(|X_i|,\lambda),$$

且 $E_\eta\|\hat{\eta}_\lambda(\upsilon)-w\|^2=E_\eta SURE(\lambda,\upsilon)$选择最小化风险的阈值:$\lambda^s=\arg\min_{\lambda\geqslant 0}SURE(\lambda,\upsilon)$当 d 足够大时,大数定理保证 sure 风险接近真实风险。在每一分解尺度 j,计算 $SURE(\lambda_j;(\upsilon_{j,1},\cdots,\upsilon_{j,2^j}))$最小的 λ_j,在尺度 j 的小波系数的估计$\hat{w}_{j,k}=\eta_{\lambda_j}(\upsilon_{j,k})k=1,\cdots,2^j$。

4.1.4 交叉验证阈值

交叉验证阈值选择方法,目的也在于选择阈值最小化风险。虽然风险是有偏的,用这种准则得到的最优阈值接近于理想阈值,而且不需要对噪声方差进行估计。交叉验证是在统计学里经常使用的自动选择平滑参数的方法。Nason 提出了 two-fold 交叉验证,首先抛弃一半数据,留下 2^{J-1}个数据点用特定的阈值建立小波阈值估计,然后比较抛弃点的值与小波阈值估计后的值,就可获得特定阈值的预测误差的估计,寻找恰当的阈值使预测误差达到最小。Jansen 在此基础上提出了归一化的交叉验证,阈值为 $\lambda_{GCV}=\arg\min_{\lambda}\frac{1}{n}\frac{\|\upsilon-\upsilon_\lambda\|^2}{\left\|\frac{n_0}{n}\right\|^2}$,其中$\frac{n_0}{n}$为在选定阈值操作后小波系数中置零的比例。

4.1.5 平移时不变阈值

二进正交小波变换不能从多角度得尺度很好地匹配信号的局域化性质,无论是采用统一阈值还是极小极大阈值,在信号的奇异点附近小波收缩估计子存在伪吉布斯现象,去噪后信号在奇异点附近交替出现过冲与欠冲,这不是原始信号固有的,而是去噪过程中小波的局限性导致了人为干扰。Cofiman 和 Donoho1995 年提出了平移时不变的小波收缩方法消除这种干扰,通过改变信号的排列次序即改变信号的奇异位置,使小波匹配信号奇异点,达到降低或消除振荡的目的。在一定范围内作循环平移运算,再平均所得结果,这个过程可以表示为:$\hat{w}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(WS_k)$,$\eta_\lambda(WS_k\upsilon)$,W 使正交小波变换矩阵,S 使平移矩阵。主要使用于信号中混有白噪声且含有若干不连续点的情况,是在阈值法基础上的改进。其优点可以在阈值法去噪中,有效地去除在信号地不连续点处所产生地伪吉布斯现象,表现出比阈值法更好的视觉效果。它的缺点是计算速度很慢。

4.1.6 多元假设验证阈值

从统计学观点看,小波阈值去噪过程也是多元假设的问题。对于每一个小波系数 $\hat{w}\sim N(w_{j,k},\sigma^2)$,验证以下假设:$H_0:w_{j,k}=0\ H_1:w_{j,k}\neq 0$ H_0 成立,则小波系数抛弃,否则保留。H_1 成立,则小波系数保留,否则抛弃。

Abramovich 和 Benjamini 1995 年提出用错误发现率(FDR)标准作为多元假设检验的一种方法。定义 R 为保留的用于重建的小波系数的数量,V 为其中错误保留的小波系数庶母,则 $\mathrm{FDR}=E\left(\frac{V}{R}\right)$。在 $E\left(\frac{V}{R}\right)<\partial$ 的前提下,最大化保留的小波系数的数目可以实现阈值选取,其中 ∂ 为置信水平。Abramovich 使用这种阈值选择方法收到了较好的效果。

4.1.7 Bayes shrink

Chang 等人根据图像小波系数分布的特点,提出了一种基于 Bayes 准则的图像去噪方法——Bayes shrink 去噪法,其最佳阈值 T 为 $T(\hat{\sigma}_{signal})=\hat{\sigma}_{noise}^2/\hat{\sigma}_{signal}$,其中 $\hat{\sigma}_{noise}^2$,是噪声信号方差 $\hat{\sigma}_{noise}^2$的估计,$\hat{\sigma}_{signal}^2$是图像信号方差$\hat{\sigma}_{signal}^2$的估计。

4.2 块阈值去噪的估计

点阈值去噪对每一个小波系数进行独立的估计,并与设定的阈值比较,周围的小波系数对其没有影响。这种方法获得了方差与偏差的折衷,但这个折衷不是优化的,抛弃了太多

的系数，造成估计子偏差过大。Cai 1999 提出了块阈值去噪的方法，分块对小波系数进行阈值操作，能充分利用周围小波系数的信息，提高了估计的精度以及收敛的速度。块阈值去噪分为重叠和非重叠方法。

4.2.1 非重叠块阈值去噪方法

在每一分解尺度上分割小波系数为各个不重叠的块，根据每一块内小波系数平方和的幅度保留或去掉此块内的小波系数，块大小的阶数为$(\ln(n))^2$。在尺度j，小波系数分隔为长度为L的互不重叠的块。(jb)表示尺度为j的第b块内的小波系数的索引，$(jb)=\{(j,k):(b-1)L+1\leqslant k\leqslant bL\}$。$S_{jb}^2=\sum_{k\in(jb)}\upsilon_{j,k}^2$表示块内小波系数和的平方。如果$S_{jb}^2$比阈值$\lambda=cLN^{-1}\sigma^2$大，则此块内所有小波系数保留，否则全部抛弃。

块阈值估计的性能取决于块长度L和常数c的选择，VisuShrink 实际上为块阈值的特例，$L=1$，$c=2\ln(n)$。Cai 系统地研究了块长度L和常数C的选取对块阈值估计的影响，通过选择恰当的参数，块阈值估计子能获得比点阈值估计子更为优越的性能(包括风险及渐进性能)。唯一的不足为块阈值去噪不是完全数据驱动的，常数c的选取在理论上不是直接的，需要借助于一些经验。

4.2.2 重叠块阈值去噪方法

Cai 和 Silverman 在非重叠块阈值去噪基础上于 2001 年提出了重叠的块阈值去噪方法，每一小块的小波系数的取舍取决于重叠大块的小波系数。在分解尺度j，分割小波系数为不重叠的块b_i^j，长度为$L_0=(\ln(n))/2$。左右延长每一块b_i^j各$L_i=\max(1,[L_0/2])$，形成互相重叠的块B_i^j，长度为$L=L_0+2L_i$。在每一块b_i^j，估计小波系数$\hat{w}_{j,k}=\beta_i^j\upsilon_{j,k}$，$(j,k)\in b_i^j$收缩因子$\beta_i^j$由大块$B_i^j$内得小波系数确定$\beta_i^j=\max(0,1-\lambda L\sigma^2/S_{j,i}^2)$ $S_{j,i}^2=\sum_{(j,k)\in B_i^j}\upsilon_{j,k}^2\,2^j$的值由 Cai 引入的 Oracle 不等式确定，$\lambda=4.50524\cdots\cdots$，$B_i^j$可以看为滑动窗，每次移动$L_0$；对于每一个窗，仅有窗中部一半的系数被估计。

5 小波去噪方法

5.1 基于边缘检测的小波去噪

首先进行边缘检测，确定边缘特征在各个子带图像中的位置，在这些位置上的小波系数将不受阈值去噪的影响。由于预先保护了图像的边缘特征，因此，可以根据噪声方差来设置去噪的阈值，而不必担心损害图像的边缘特征。

5.2 基于贝叶斯估计的小波去噪

应用小波变换计算小波系数矩阵，对矩阵中的细节系数进行 Bayesian MAP 估计，然后对处理后的系数进行逆变换就可得到降噪的估计值。该方法能有效地去除图像中的白噪声，同时还能较好地保留图像边缘信息。

5.3 基于多小波噪声方差阈值的信号滤波方法

随着变换尺度地增大，噪声变换值减小，而信号呈现与之相反的特征。对此，可用相邻尺度变换值作乘积运算，如果相关运算结果相对变大，则认为是由信号引起的，反之，认为由噪声引起，由此实现信噪分离，这一思想应用到多小波，提出了基于多小波噪声方差阈值的信号滤波方法。该方法在对噪声方差估计的基础上，对噪声信号变换系数进行处理，减小由噪声产生的系数，同时最大限度保留有效信号产生的系数，保留了信号中的细节特征。

5.4 基于提升小波的小波去噪

该方法的思想是先进行提升小波变换，然后进行小波阈值处理，然后在进行重构。提升小波是基于双正交小波的构造方法，其特点是利用预测算子，确定高频信息，并初步确定低频信息，再通过更新算子，对初步确定的低频信息进行修正，从而确定低频信息。这种方法减少了计算的复杂度，降低了运行时间。

总结与展望 近年来，小波分析在图像处理中得到了广泛的研究和应用，图像去噪更是应用广泛，新的变换方式的使用，阈值的选择，阈值函数的选取。尽管小波去噪方法现在已经成为去噪和图像恢复的重大分支和主要研究方向，但是在另类噪声分布(非高斯分布)下的去噪研究还不够。目前国际上开始将注意力投向这一领域。

目前，小波去噪方法所取得的成功，不仅将大大拓宽小波去噪方法的应用领域，而且在推动这些领域研究发展的同时，必将从这些领域的应用中反馈新的问题，从而进一步丰富小波去噪的内容和推动小波去噪的发展。

参 考 文 献

1 唐晓初. 小波分析及其应用[M]. 重庆大学光电工程学院出版，186～195

2 张莉，杨国梁. 对小波图像去噪方法的探讨[J]. 桂林示范高等专科学校学报，2005(3)

3 Donoho DL, Johnstone IM. Ideal spatial adaptation, by wavelet shrinkage. Biometrika, 1994. 435～455

4 Donoho DL, Johnstone. Adapting to unkown smoothness via wavelet shrinkage. Journal of the American Statistical Association, 1995, 90: 1200～1224

5 Coifman R R, Donoho D L. Translation invariant de-noising. Lecture Notes in Statistics, 1995, 103; 125～150

6 Abamovich F, Benjamini Y. Thresholding of wavelet coefficients as multiple hypotheses testing procedure Wavelets and Statistics. Lecture Notes in Statestics 103, Springer-Verlag, 1995. 5～14

7 Cai T T, Silverman. Incorporating information on neighboring coefficients into wavelet estimation. Sankhya, 2001, 63: 127～148

8 Taswell C. The what, how, and why of wavelet shrinkage denoising. Computing in Science & Engineering, 2000(2-3): 12～19

9 Nason G P. Wavelet shrinkage using cross-validation. J. R. Statist. Soc. B, 1996, 58: 463～479

10 Chang S G, Yu B, Matrin V. Adaptive wavelet thredsholding for image denoising and Compression [J]. IEEE Transactions on Image

---

(上接第 221 页)

可见，本文的方法在编码和匹配上具备了较大优势，并且能够最大限度保持曲线的原始信息，但是受到噪声的影响比较大。

结论 本文提出了一种基于微分几何的平面曲线轮廓编码方法，并提出了重建和匹配方案。实验证明，采用这种方法可减少计算复杂度，能较好地对平面曲线轮廓作匹配。但是，噪声对本文方法的影响比较大，未来的工作将重点放在如何减小噪声对计算结果的影响上。

参 考 文 献

1 Freeman H. Computer processing of line-drawing images [J]. Computing Surveys, 1974, 6(1): 57～97

2 Miao Zhenjiang, Gandelin M-H, Yuan Baozong. Fourier transform based image shape analysis and its Appliction to flower recognition. In: IEEE 6th International Conference on Singal Processing [C], Ottawa, Canada, 2002, 2: 1087～1090

3 王涛，刘文印，孙家广，等. 傅立叶描述子识别物体的形状[J]. 计算机研究与发展，2002, 39(12): 1714～1719

4 Belkasim S O, Shridhar M, Ahmadi M. Pattern recogntion with moment invariant: A comparative study and new results. Pattern Recognition, 1991, 24: 1117～1138

5 Dubois S R, Glanz F H. An autoregressive model approach to two dimensional Shape classification. IEEE Trans on PAM I. 1986, 8: 55～56

6 Loui A C P, Venetsanopoulos A N. Two-dimensional shape representation using morphological correlation functions. In: Proceeding of the 1990 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Albuquerque. 1990. 2165～2168

7 Gupta L, Sayeh M R, Tammana R. Neural network approach to robust shape classification. Pattern Recognition, 1990, 23(6): 563～568

8 陈维桓. 微分几何初步. 北京：北京大学出版社，1997. 18～25