

# 结合结构张量和 Wiener 滤波的图像去噪算法<sup>\*</sup>)

鲁志波 王鑫 胡国恩

(信息工程大学应用数学系 郑州 450002)

**摘要** 利用图像的结构张量表示的局部结构信息,结合 Wiener 滤波给出了一种图像去噪算法,并采用了加性算子分解格式求解非线性扩散方程以提高计算效率。实验结果表明,该算法在去除噪声的同时很好地保持了图像中的强弱边界等细节特征,去噪后的图像在峰值信噪比和主观视觉效果上都有显著提高。

**关键词** 图像处理,去噪,结构张量,Wiener 滤波

## An Anisotropic Wiener Denoising Algorithm Based on Structure Tensor

LU Zhi-Bo WANG Xin HU Guo-En

(Department of Applied Mathematics, Information Engineering University, Zhengzhou 450002)

**Abstract** An improved Wiener denoising algorithm is proposed by combining structure tensor of image together with Wiener filtering, which is data-adaptive and thus can better preserve boundaries and reduce structure delocalization. An additive operator splitting scheme is applied in solving the nonlinear diffusion equation to improve computation efficiency. The experimental results show that the peak signal-to-noise ratio of the denoised image is improved via the proposed algorithm, as well as the visual effect.

**Keywords** Image processing, Denoising, Structure tensor, Wiener filtering

## 1 引言

图像在采集、传输和存储过程中,常常会受噪声的影响,使得图像的质量下降,因而在对图像进行其他的处理之前,采用合适的方法对图像滤波去噪是一个十分必要的预处理步骤<sup>[1]</sup>。

图像滤波的目标在于既能够除掉这些噪声又要尽可能地保留主要的信号特征,如图像的边缘轮廓和线条细节等。Wiener 滤波解决了一般的逆滤波在受噪声影响的像素处出错的问题。它合并考虑了有关噪声性质的先验信息,而且在最小均方误差(MMSE)意义上,具有最优性能,而且由于只依赖于信号的二阶统计量和易于实现的特点,Wiener 滤波在很多领域得到应用。

经典的线性结构张量是图像处理中一个广泛使用的工具,它包含了图像局部邻域的结构等信息,借助于这些信息,可以区分图像中的不同结构,如边缘,边角等。但是,当局部邻域包含非单一结构,如边界或两种不同纹理结构时,由高斯核平滑后的局部邻域往往导致不准确的估计,而非线性结构张量采用保持不连续点的非线性扩散代替经典的线性结构张量中的高斯平滑。相对于高斯卷积平滑,非线性扩散在数据出现不连续点的地方降低平滑的强度,因而是一种数据自适应的平滑方法。这种非线性方法通过迭代来确定不连续点,从而在分析信号时可以从具有单一结构的任意形状的邻域来整合分析处理数据,避免了结构不同的信息之间的相互干扰。

本文结合图像的结构张量和 Wiener 滤波给出了一个图像去噪算法。针对图像不同区域的不同结构,采用不同的局部邻域用于估计图像中每个像素点的灰度值,而在同一局部邻域内的采样点具有相同的局部结构,这样避免了不同结构

之间的信息相互混淆,从而在滤波去噪的同时,很好地保持了图像的边缘等细节特征。实验结果表明,本文的方法不仅在视觉效果上,而且在峰值信噪比(PSNR)上都有显著提高。

## 2 自适应 Wiener 滤波

设原始信号为  $u$ ,信号被一均值为 0,方差为  $\sigma_n^2$  的加性高斯白噪声  $n$  污染,且信号和噪声相互独立,观测信号为  $f$ ,则

$$f = u + n$$

Wiener 滤波器<sup>[2]</sup>是寻找使得如下统计误差函数最小的估计量  $\hat{f}$  来逼近原始信号  $u$

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

它是最小均方误差意义下的最优线性估计。

自然图像中不同的区域具有不同的统计特性,通常假定图像在局部邻域内是稳定的,这样采用空间自适应 Wiener 滤波<sup>[3]</sup>可以改善去噪效果,提高图像质量。设图像在以每个像素  $x$  为中心,大小为  $M \times N$  的滤波窗  $O(x)$  内是平稳的,则像素  $x$  在该滤波窗的均值和方差的估计值用加权平均的方法得到,即

$$\mu_f(x) = \frac{1}{MN} \sum_{y \in O(x)} f(y) \quad (1)$$

$$\sigma_f^2(x) = \frac{1}{MN} \sum_{y \in O(x)} f^2(y) - \mu_f^2(x) \quad (2)$$

因为噪声均值是 0,且信号和噪声相互独立,所以

$$\mu_u(x) = \mu_f(x) \quad (3)$$

$$\sigma_u^2(x) = \sigma_f^2(x) - \sigma_n^2(x) \quad (4)$$

$$\hat{u}^s(x) = \mu_f(x) + \frac{\sigma_f^2(x)}{\sigma_f^2(x) + \sigma_n^2(x)} (f(x) - \mu_f(x)) \quad (5)$$

<sup>\*</sup>)基金项目:国家自然科学基金(10671210)。鲁志波 博士研究生,讲师,研究方向为图像处理与模式识别;王鑫 博士研究生,讲师,主要研究方向为图像处理;胡国恩 教授,博士生导师,研究方向为小波分析与信号处理。

在采用自适应 Wiener 滤波时,滤波窗大小的选择也是至关重要的。如果滤波窗过小,则均值和方差的估计受噪声影响过大;如果滤波窗过大,则失去自适应性,平稳性也得不到保证。一般应用中常选择尺寸为  $3 \times 3, 5 \times 5$  或  $7 \times 7$  的方形滤波窗。

直接对原始图像进行空间自适应 Wiener 滤波,尽管可以得到较高的信噪比,但是去噪后的图像仍然保留了较多的噪声,图像的主观质量不高。其可能的原因:首先,滤波窗的选择没有考虑信号的具体特征。窗口大小一旦选定,在对信号的处理中就不再改变。然而,即使在选定的滤波窗内,图像也不一定满足平稳性条件,因为多数图像是高度非平稳的,通常含有被高对比度边缘分开的大块一致性区域。其次,最优标准是基于最小均方误差,而且对所有的误差等权处理,这不能满足人类视觉特性的需求:人类对复原错误的感知在具有一致灰度的和亮的区域中更为严重,而对出现在暗的和高梯度的区域的错误敏感性较差。

基于以上原因,我们考虑结合图像的结构张量,选取真正自适应图像数据结构的滤波窗来改进图像的去噪效果。

### 3 结构张量

结构张量由 Bigün 等人<sup>[4]</sup>引入,今天已成为图像处理和计算机视觉中的一个重要工具。设观测图像为  $f$ , 点  $x$  是图像中的一个像素。将  $f$  与尺度为  $\sigma$  的高斯函数  $G_\sigma(x)$  卷积得到平滑图像  $f_\sigma$ , 则点  $x$  的结构张量是由如下定义得到的一个对称矩阵:

$$T(x) = G_\rho(x) * (\nabla f_\sigma(x) \nabla f_\sigma(x)^T)$$

这里  $*$  表示卷积,  $\nabla$  表示梯度算子,  $G_\rho(x)$  是尺度为  $\rho$  的高斯核。

结构张量的引入有这样一些优势。首先,这种由图像梯度导出的矩阵表示包含了局部邻域的结构信息,但是又不会出现类似于上升边缘和下降边缘的梯度相互抵消的情况;其次,对矩阵场进行高斯平滑不仅在一定程度上减少了噪声水平,而且通过尺度因子  $\sigma$  引入了空间相关性,同时,尺度因子还确定了卷积核窗口的大小,从而决定了结构张量估计中邻域的大小。最后,结构张量的特征值反映了特征方向上的平均对比度,即在特征方向上数据的波动。借助于这些信息,可以区分图像中的不同结构,如边缘,边角等。

但是结构张量是通过线性平滑得到的,高斯平滑中使用的局部邻域的大小和形状是固定的,并没有随信号数据的变化而变化,因而在估计靠近边界或是两个不同区域的像素的方时容易受到模糊信息的干扰。最近,Brox<sup>[5]</sup>等人在非线性扩散的基础上提出了一种非线性结构张量。

众所周知,对图像进行不同尺度  $\rho$  的高斯平滑过程等价于热传导方程的解。相应地,在经典的结构张量的估计中,张量积  $S^0 = \nabla f \nabla f^T = (d_{ij}^0)$  与尺度为  $\rho$  的高斯核卷积平滑的过程等价于如下初值为  $S^0$  的偏微分方程,即线性矩阵值扩散方程(6)的解

$$\partial_t d_{ij} = \Delta d_{ij}, (i, j = 1, \dots, m) \quad (6)$$

这里  $m$  是结构张量(对称矩阵)的行数(或列数),对二维图像  $m=2$ , 扩散时间  $t$  与高斯核的标准差之间的关系为  $t = \rho^2 / 2$ 。

作为一个自然的推广,在非线性的扩散方程的基础上即可导出非线性结构张量的定义。把(6)式替换为如下形式的矩阵值扩散偏微分方程,得到的解  $S(x) = (d_{ij})$  即为在扩散时间  $t$  时刻的各向异性非线性结构张量场

$$\partial_t d_{ij} = \text{div}(D(\sum_{s,t=1}^m |\nabla d_s|^2) \nabla d_{ij})$$

$$d_{ij}(t=0) = d_{ij}^0, (i, j = 1, \dots, m) \quad (7)$$

其中  $D = P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  表示扩散张量,这里  $\lambda_1$  是矩阵  $\sum_{p,q=1}^m \nabla d_{pq} \nabla d_{pq}^T$  的最大特征值,  $P$  是该矩阵的特征向量排列生成的矩阵,  $g$  是一个递减的扩散率函数。

### 4 算法与实现

Wiener 滤波中采用大小固定的滤波窗估计像素  $x$  在该窗内的均值和方差,而在滤波窗内,图像不一定满足平稳性。为了避免无关信息的干扰,在像素  $x$  的结构张量确定的局部邻域内计算其在该邻域的均值和方差。图 1 显示了自适应 Wiener 滤波窗,经典的线性结构张量和非线性结构张量三种方法确定的局部邻域之间的差异。从中可以看出,大小固定不变的 Wiener 滤波窗并不能自适应信号的数据结构。线性结构张量是用各向异性高斯核参数化表示的,其对应的邻域为二次型  $x^T(x)x^T=1$  表示的椭圆的内部。但是在很多情况下,它不能覆盖感兴趣的区域,而非线性结构张量表示的邻域是通过迭代扩散过程生成,它更加灵活,可以覆盖任意形状的兴趣区域,同时该邻域是结构一致的区域。

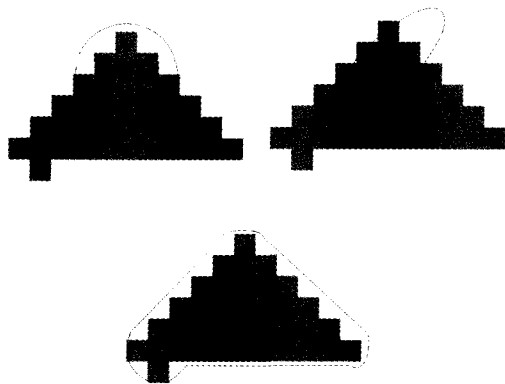


图 1 不同局部邻域之间的差异示意图。从左到右依次为:自适应 Wiener 滤波中使用的大小固定的邻域;线性结构张量表示的椭圆形邻域;非线性结构张量表示的邻域。

因此,在估计像素  $x$  在局部邻域的均值和方差时,把 Wiener 滤波中的滤波窗修改为非线性结构张量确定的局部邻域。由于在该邻域内数据具有一致性结构,因而得到的估计更加准确,能更好保留图像的细节特征。进一步的研究表明与线性结构张量相比,只有在数据不连续或去局部化问题存在的情况下,非线性形式才能体现其优势;另一方面,在数据重要的不连续处,采用非线性结构张量可以提高计算的精度,有利于确定数据的细微特征。但是求解非线性结构张量比线性结构张量需要更多的计算时间和存储空间,所以为提高去噪效果同时又不增加计算负担,在图像的平滑区域,采用经典结构张量确定的邻域来估计像素的灰度值;在图像的边界则采用各向异性非线性结构张量确定的局部邻域来估计,即把(1)式和(2)式中的邻域  $O(x)$  修改为

$$O(x) = \begin{cases} L(x) & \text{当 } |\nabla u| < C_0 \\ N(x) & \text{当 } |\nabla u| \geq C_0 \end{cases}$$

这里  $L(x), N(x)$  分别表示线性和各向异性非线性结构张量确定的局部邻域,  $C_0$  为一阈值参数。然后用(3)~(5)式来估计  $x$  的灰度值。

在方程(7)中扩散率函数  $g$  的选取也是至关重要的。若  $g$  取为常数函数,则扩散方程等价于高斯平滑。而在非线性扩散中,函数  $g$  的值随梯度大小变化而变化,从而更好地保

持了边界。函数  $g$  一个比较合适的选择为

$$g(s^2) = (s^2 + \epsilon^2)^{-1/2}$$

这里  $\epsilon > 0$  是为了避免奇异性而引入的一个很小的正则化常数。函数  $g$  在图像去噪和保留边界之间作了一个折中,而且使用该函数不需要确定太多的参数。

#### 4.1 并行 AOS 格式实现

大多数情况下非线性扩散滤波广泛使用全显式有限差分格式来实现,但是这种算法并不是十分有效,因为这种格式仅对较小的时间步长是稳定的,一般有步长  $\Delta t < 0.5$  的限制,为了有效地去除噪声,不得不进行多次迭代。Weickert 等人<sup>[6]</sup>提出了基于加性算子分解(AOS)策略的半隐式差分格式。这一格式是绝对稳定的,它比显式格式要快近 10 倍。

式(7)可以写成如下形式:

$$\partial_x d_{ij} = \sum_{s,l=1}^m \partial_{x_s} (a_{sl} \partial_{x_l} d_{ij})$$

它的离散化形式可表示为(这里简记  $d_{ij} = U$ ):

$$U^{k+1} - U^k = \Delta t \sum_{s,l=1}^m L_{sl}^k U^k$$

进一步可以表示为

$$U^{k+1} - U^k = \Delta t \left( \sum_{l=1}^m L_{il}^k U^{k+1} + \sum_{i=1, j \neq i}^m \sum_{l=1}^m L_{ij}^k U^k \right)$$

这里上标  $k$  表示时间尺度,  $L_{ij}^k$  表示  $\partial_{x_s} (a_{sl} \partial_{x_l})$  的中心差分算子。则

$$U^{k+1} = (I - \Delta t \sum_{l=1}^m L_{il}^k)^{-1} (I + \Delta t \sum_{i=1, j \neq i}^m \sum_{l=1}^m L_{ij}^k) U^k$$

而式(7)基于 AOS 格式的解为

$$U^{k+1} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (I - m \Delta t L_{il}^k)^{-1} (I + \Delta t \sum_{i=1, j \neq i}^m \sum_{l=1}^m L_{ij}^k) U^k$$

#### 4.2 算法描述与参数选择

改进的自适应 Wiener 滤波图像去噪算法描述如下:

1. 估计观测图像  $f$  的噪声方差  $\sigma^2$ ;
2. 计算  $x$  点处  $|\nabla u(x)|$  并与阈值  $C_0$  比较,若小于  $C_0$ , 转第 3 步;否则转第 4 步;
3. 计算该点的线性结构张量;
4. 基于并行 AOS 格式求解问题(7)计算该点的非线性结构张量;
5. 分别以(1)式和(2)式估计像素在结构张量确定的邻域内的均值和方差;
6. 再用(3)~(5)式来估计像素的灰度值,得到去噪后的图像。

噪声方差  $\sigma^2$  可以用观测图像  $f$  的局部方差最小值来近似。阈值  $C_0$  的选择:参数过小,达不到减少计算量的目的;参数过大,容易丢失边界信息。实验表明  $C_0$  选择在  $|\nabla u|^2$  直方图的 5%~10% 上百分点可取得较好效果。在采用了基于并行 AOS 格式求解问题(7)后,时间步长  $\Delta t$  不再受  $\Delta t < 0.5$  的限制,极大地提高了计算效率。实验表明,  $5 < \Delta t < 15$  都能取得较好的效果。

### 5 实验结果

下面我们在 Matlab 6.5 平台下以大小为  $256 \times 256$  的 256 级灰度 Cameraman 图像为例来说明本文算法的有效性。图 2 分别显示了原始图像,加噪图像( $\sigma = 25$ ),以及采用自适应 Wiener 滤波和本文算法得到的去噪后的图像。可以看出,采用空域自适应 Wiener 滤波器去噪后的图像尽管信噪比也较高,但是图像仍然残留了过多的噪声。而改进后的自适应滤波算法更加接近原始图像,保留了更多的细节特征,视觉效果更好。

为了客观评价不同的邻域对去噪效果的影响,采用峰值信噪比来衡量图像去噪的质量。表 1 列出了在不同的噪声方差下几种去噪方法得到的峰值信噪比及计算效率比较。其中 Wiener 滤波中滤波窗大小为  $3 \times 3$ , 线性和非线性结构张量方法中采用的滤波窗分别为  $L(x)$  和  $N(x)$ , 而本文算法的滤波窗采用的是由阈值  $C_0$  控制选取的邻域。从实验结果可以看出,本文的算法优于 Wiener 滤波和方法一(线性结构张量),接近方法二(非线性结构张量);但在计算效率上要好于方法二。

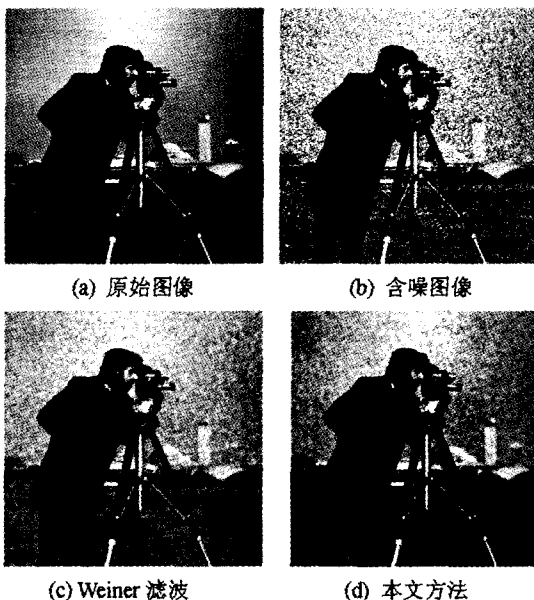


图 2 Cameraman 图像及部分算法去噪后的结果( $\sigma = 25$ )

表 1 四种去噪方法峰值的比较

噪声标准差	10	15	20	25	计算效率
Wiener 滤波	30.63	29.15	27.76	26.34	高
方法一	30.89	29.74	28.60	27.26	高
方法二	32.37	30.69	29.53	27.81	一般
本文算法	31.96	30.13	29.11	27.45	较高

**结论** 本文在结构张量的基础上,结合自适应 Wiener 滤波提出了一种改进的图像去噪方法。结构张量用于一致性分析,其特征向量和特征值分别提供一致性方向和度量信息。根据图像局部结构的不同,由阈值参数控制分别选取其线性和非线性形式确定的局部邻域用于估计该邻域内像素的均值和方差。同时,在数值实现上采用了并行 AOS 格式,极大地提高了计算效率。与其他方法现比,用这种方法估计得到的滤波后的图像不仅可以有效地去除噪声,而且很好地保留了一些重要边界,视觉效果和峰值信噪比都有显著提高。

#### 参考文献

- 1 Gonzalez RC, Woods RE. 数字图像处理(第二版)[M]. 北京:电子工业出版社, 2002, 7
- 2 王欣, 王德勇. 离散信号的滤波[M]. 北京:电子工业出版社, 2002, 6
- 3 Lim JS. Two-Dimensional Signal and Image Processing [M]. Prentice-Hall, 1990
- 4 Bigün J, Granlund GH. Optimal orientation detection of linear symmetry [A]. In: Proc. ICCV [C], England, June 1987. 433~438
- 5 Brox T, Weickert J, Burgeth B, Mrazek P. Nonlinear structure tensor [R]: [Tech. Rep. 113]. Department of Mathematics, Saarland University, Germany, October 2004
- 6 Weickert J, ter Haar Romeny BM, Viergever MA. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering [J]. IEEE Trans. on Image Processing, 1998, 7(3): 398~410