基于几何参数的模糊拉格朗日插值推理*)

王宝文[1] 张 华[1] 刘文远[1] 石 岩[2]
(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)[1] (九州东海大学工程学院信息系统系 日本)[2]

摘 要 在稀疏规则库条件下，当给定的输入落入规则"间隙"时，采用传统的模糊推理方法是得不到任何结论的。模糊推理本质上就是插值器。Koczy 和 Hirota 首先提出了 KH 线性插值推理方法，然而推理结果存在着无法保证凸性和正规性等问题。为了能有一个较好的插值推理结果，本文提出了一种基于几何参数的模糊拉格朗日插值推理方法，该方法不仅推理简单，推理结果较好，并且能很好地保证推理结果的凸性和正规性。这为智能系统中的模糊推理提供了一个非常有用的工具。

关键词 模糊集，拉格朗日插值，稀疏规则库，模糊推理

Fuzzy Lagrange's Interpolative Reasoning Method Based on Geometric Parameter

WANG Bao-Wen[1] ZHANG Hua[1] LIU Wen-Yuan[1] SHI Yan[2]
(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)[1]
(School of Information Science, Kyushu Tokai University, Japan)[2]

Abstract When rule base is sparse, we cannot get any reasoning result by traditional fuzzy reasoning method for an observation is in the gap between two neighboring antecedents. Fuzzy reasoning is really equal to a interpolation. Hence Koczy and Hirota first proposed KH linear interpolative reasoning method. But its consequence does not always keep convexity and normality. So a fuzzy lagrange's interpolative method based geometric parameter is presented. Reasoning is simple by the method; moreover it can keep the convexity of the reasoning consequence.

Keywords Fuzzy set, Lagrange's interpolative reasoning, Sparse fuzzy rule base, Fuzzy reasoning

1 引言

目前，模糊推理系统的理论及实现方法的研究已成为信息科学研究的重要内容之一。在模糊推理系统中，传统的模糊推理方法所针对的对象都是稠密型模糊规则库[1]，即规则的前件必须完全覆盖输入论域。然而，当模糊规则库呈稀疏状态，即规则库不能完全覆盖输入论域时，规则前件的隶属函数之间就会出现"空隙"，采用传统的模糊推理方法便会因为缺少推理依据而无法得到推理结论。有学者已经证明采用插值法也可得到推理结果，即模糊推理本质上就是插值器[2]。在稀疏规则库条件下，最早的插值推理方法是由 Koczy 和 Hirota 提出的 KH 线性插值推理方法[3,4]。但随后又有很多学者发现采用该方法不能保证最后推理结果的隶属函数是一个正规凸集。因此，在过去的几年里，许多学者提出了一些 KH 方法使用的限制条件和一些其他的方法，但从实际应用角度看，限制条件过于严格，而其他的一些方法都比较复杂，实用性不强[5,6]。

为了寻找在稀疏规则条件下比较实用的推理方法，本文提出了一种基于几何参数的模糊拉格朗日插值推理方法，该推理方法所得到的插值推理结论一定是正规凸模糊集，而且算法简单，推理效果较好。

为了讨论的方便，先定义如下几个概念。

定义 1 假定 A_1, A_2 是论域上的模糊集，若 $A_1 \cap A_2 = F$。则称 A_1, A_2 是不相连的。

定义 2 假定 $A=\{A_i \rightarrow B_i \mid 0<i\leqslant n\}$ 为规则库(A_i 为模糊规则前件)，假定 $A_1<A_2<\cdots<A_i<A_{i+1}<\cdots<A_n$，若存在 $0<i<n$，A_i, A_{i+1} 是不相连的，则称规则库 A 是稀疏的。

2 KH 插值推理方法分析

Koczy 和 Hirota 提出的线性插值推理(简称为 KH 线性插值推理)的基本原理是：该方法利用传统的近似技术，线性插值原理，利用欧几里得距离来刻画模糊集合的近似程度，通过计算模糊推理结论的 α-上截集和 α-下截集，最后再利用模糊集合的分解原理得到推理结论。

简述如下：

假定 $A_1\rightarrow B_1, A_2\rightarrow B_2$，是论域 $U\times V$ 上的不相连的两个模糊规则，A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是 U 和 V 上的模糊集，A^* 是论域 U 上的一个输入事实，如果 $A_1<A^*<A_2$，则两个模糊规则之间的线性插值定义为：

$$d_L(A_a^*, A_{1a}):d_L(A_a^*, A_{2a})=d_L(B_a^*, B_{1a}):d_L(B_a^*, B_{2a})$$
$$d_U(A_a^*, A_{1a}):d_U(A_a^*, A_{2a})=d_U(B_a^*, B_{1a}):d_U(B_a^*, B_{2a}) \tag{1}$$

可得到最后的计算公式为：

$$\inf\{B_a^*\}=\frac{d_L(A_a^*, A_{1a})inf\{B_{2a}\}+d_L(A_a^*, A_{2a})inf\{B_{1a}\}}{d_L(A_a^*, A_{1a})+d_L(A_a^*, A_{2a})}$$
$$\sup\{B_a^*\}=\frac{d_U(A_a^*, A_{1a})sup\{B_{2a}\}+d_U(A_a^*, A_{2a})sup\{B_{1a}\}}{d_U(A_a^*, A_{1a})+d_U(A_a^*, A_{2a})} \tag{2}$$

由于在许多情况下，插值结果是一个非凸的模糊集。为了使稀疏规则条件下的插值推理既能保持凸性和正规性又有

*)基金项目：国家科技部高新技术计划项目(2005EJ000017)，河北省科技研究与发展计划(02547015D)，河北省普通高等学校博士科研资助基金，2002(B2002118)。王宝文 副教授，研究方向为软计算、模糊推理；张 华 硕士研究生，研究方向为软计算、模糊推理。

满意的推理结果，同时推理方法的算法简单，推理效率高，下面提出了一种基于几何形状的模糊拉格朗日插值推理方法，这种基于几何形状的模糊拉格朗日插值推理方法所得到的插值推理结果 B^* 都将是正规凸模糊集。而且从实际应用角度看，其算法简单，推理效果较好。

3 基于几何参数的模糊拉格朗日插值推理方法

从几何角度来考虑问题是判断和分析事物时一种常用的方法，并且越来越受到人们的重视。在模糊系统中，最常见的隶属函数一般是三角形、梯形和高斯型隶属函数，并且多数的模糊推理方法都是在这三种隶属函数的基础上进行分析和研究的。先以三角形为例，梯形和高斯型的分析见后。从几何图形上分析，三角形隶属函数的形状可以由三个顶点或者左右两边的斜率和中间的顶点来唯一确定。但我们通过分析发现利用三角形的顶点作为参数，通过拉格朗日插值推理方法得出的结果在很多时候不是一个正规凸集[7]。因而在此我们以输入规则前件中采用每个三角形左右两边的斜率和中间的顶点作为参数，结合传统的拉格朗日插值方法提出了基于几何参数的模糊拉格朗日插值推理方法。

由上述分析，我们可以定义三角形隶属函数 $A=(k_L, a_2, k_R)$，其中 k_L, k_R 分别是左右两边直线的斜率，a_2 是三角形中间的顶点。如图 1 所示。

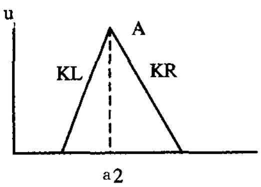

图 1　三角形隶属函数

假定相邻的两规则分别为：$A_1 \Rightarrow B_1$ 和 $A_2 \Rightarrow B_2$；观测值为：$A*$，$A*$ 位于 A_1 和 A_2 之间。即：

当给定了观测值：X 是 A^*

规则：如果 X 是 A_1，那么 Y 是 B_1

如果 X 是 A_2，那么 Y 是 B_2

结论：Y 是 B^*？

其中 $A^*=(k_L, a_2, k_R)$，$A_1=(k_{L1}, a_{12}, k_{R1})$，$A_2=(k_{L2}, a_{22}, k_{R2})$，$B_1=(h_{L1}, b_{12}, b_{R1})$，$B_2=(h_{L2}, b_{22}, h_{R2})$，$B^*=(h_L, b_2, h_R)$

如果下面三个由参数组成的二阶 Vandermonde 行列式满足：

$$\begin{vmatrix} 1 & K_{L1} \\ 1 & K_{L2} \end{vmatrix} = (K_{L2}-K_{L1}) \neq 0 \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{22}-a_{11}) \neq 0 \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & K_{R1} \\ 1 & K_{R2} \end{vmatrix} = (K_{R2}-K_{R1}) \neq 0 \tag{5}$$

利用拉格朗日插值构造映射函数 F 为：

$$b=F(a)=\frac{(a-a_2)}{(a_1-a_2)}b_1+\frac{(a-a_1)}{(a_2-a_1)}b_2 \tag{6}$$

其中：a, a_1, a_2 分别是规则前件 A^*, A_1, A_2 相应的参数，b, b_1, b_2 分别是结论 B^*, B_1, B_2 相应的参数。

根据给定隶属函数的不同形式，上述公式可以做出不同的变形，从而求出最后的结果。

• 如果隶属函数是三角形隶属函数，其参数为 (k_L, a_2, k_R) 则所采用的计算公式为：

$$h_L=F(k_L)=\frac{(k_L-k_{L2})}{(k_{L1}-k_{L2})}h_{L1}+\frac{(k_L-k_{L1})}{(k_{L2}-k_{L1})}h_{L2}$$

$$b_2=F(a_2)=\frac{(a_2-a_{22})}{(a_2-a_{22})}b_{12}+\frac{(a_2-a_{12})}{(a_{22}-a_{12})}b_{22}$$

$$h_R=F(k_R)=\frac{(k_R-k_{R2})}{(k_{R1}-k_{R2})}h_{R1}+\frac{(k_R-k_{R1})}{(k_{R2}-k_{R1})}h_{R2}$$

其中：$k_{L1} \neq k_{L2}$ 且 $k_{R1} \neq k_R$

当不满足上面的条件，即：当 $k_{11}=k_{22}$ 或 $k_{R1}=k_{R2}$ 时，则分别取相邻两规则中相应的平均值作为最后的结果，即：

$h_L=(h_{L1}+h_{L2})/2$

或 $h_R=(h_{R1}+h_{R2})/2$

这样就可以保证无论在什么样的情况下，都可以确定出 B^* 的隶属函数。

为了保证最后结果的正规凸性，在求左右斜率的公式中加上绝对值，公式就变成如下形式：

(1) 当 $k_{L1} \neq k_{L2}$ 且 $k_{R1} \neq k_{R2}$ 时

$$h_L=F(k_L)=\left|\frac{(k_L-k_{L2})}{(k_{L1}-k_{L2})}h_{L1}+\frac{(k_L-k_{L1})}{(k_{L2}-k_{L1})}h_{L2}\right|$$

$$b_2=F(a_2)=\frac{(a_2-a_{22})}{(a_2-k_{22})}b_{12}+\frac{(a_2-a_{12})}{(a_{22}-a_{12})}b_{22}$$

$$h_R=F(k_R)=-\left|\frac{(k_R-k_{R2})}{(k_{R1}-k_{R2})}h_{R1}+\frac{(k_R-k_{R1})}{(k_{R2}-k_{R1})}h_{R2}\right|$$

(2) 当 $k_{11}=k_{22}$，$k_{R1} \neq k_{R2}$ 时

$h_L=(h_{L1}+h_{L2})/2$

$$b_2=F(a_2)=\frac{(a_2-a_{22})}{(a_2-a_{22})}b_{12}+\frac{(a_2-a_{12})}{(a_{22}-a_{12})}b_{22}$$

$$h_R=F(k_R)=-\left|\frac{(k_R-k_{R2})}{(k_{R1}-k_{R2})}h_{R1}+\frac{(k_R-k_{R1})}{(k_{R2}-k_{R1})}h_{R2}\right|$$

(3) 当 $k_{11} \neq k_{22}$，$k_{R1}=k_{R2}$ 时

$$h_L=F(k_L)=\left|\frac{(k_L-k_{L2})}{(k_{L1}-k_{L2})}h_{L1}+\frac{(k_L-k_{L1})}{(k_{L2}-k_{L1})}h_{L2}\right|$$

$$b_2=F(a_2)=\frac{(a_2-a_{22})}{(a_2-a_{22})}b_{12}+\frac{(a_2-a_{12})}{(a_{22}-a_{12})}b_{22}$$

$h_R=(h_{R1}+h_{R2})/2$

只要给出的规则前件是正规凸集，那么利用上述的公式，必然能够保证所得出的结论一定也是正规凸集。

• 同理，如果隶属函数是梯形隶属函数，决定其形状的参数是：(k_L, b, c, k_R)，其中：k_L, b, c, k_R 分别代表梯形隶属函数的左右斜率和隶属度为 1 的两个顶点，则只要把上述公式中的参数换成梯形隶属函数的参数即可，这样就可以求出决定 B^* 的参数，最后得出结果。

• 若隶属函数是高斯型，决定其形状的参数是：(c, δ) 则公式变为：

$$c_B=F(c_A)=\frac{(c_A-c_{A2})}{(c_{A1}-c_{A2})}c_{B1}+\frac{(c_A-c_{A1})}{(c_{A2}-c_{A1})}c_{B2}$$

$$\delta_B=F(\delta_A)=\frac{(\delta_A-\delta_{A2})}{(\delta_{A1}-\delta_{A2})}\delta_{B1}+\frac{(\delta_A-\delta_{A1})}{(\delta_{A2}-\delta_{A1})}\delta_{B2}$$

同样可以确定 B^*。

由此，通过上述的分析可得出如下的定理：

定理　基于几何参数的模糊拉格朗日插值推理在常见的正规凸模糊集条件下，总能保证最后的结果是正规凸模糊集。

证明：根据上述公式可知：最后求出的左斜率是一个正值，右斜率是负值，那么最后的结果就一定是一个正规凸集。

很明显，不管是哪种隶属函数，我们都可以证明当 $A^*=A_1$ 时，$B^*=B_1$；当 $A^*=A_2$ 时，$B^*=B_2$。

从以上的分析可以看出，这种新的插值推理方法可以适

应多种隶属函数。

4 多维规则条件下的推理

为不失一般性，现把上述方法扩展到多维环境中(以多个输入一个输出为例)。

多维规则的推理形式如下：

If X_1 is A_{1i} and …… X_n is A_{ni} then Y is B_i

If X_1 is A_{1j} and ……and X_n is A_{nj} then Y is B_j

其中 $A_i=(A_{1i},\cdots,A_{mi})$，$A_j=(A_{1j},\cdots,A_{nj})$，当给定 $A^*=(A_1^*,\cdots,A_k^*,\cdots,A_n^*)$时，如何求结论 B^*。

可以定义一个 n 维的多项式映射 $F:A^*\mid\!\rightarrow B^*$ 如下：

$$b=F(a_j)=\left\{\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_j-a_{2j})}{(a_{1j}-a_{2j})}\right]/n\right\}b_1+\left\{\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_j-a_{1j})}{(a_{2j}-a_{1j})}\right]/n\right\}b_2$$

其中 a_j 是 A^* 中第 j 个分量的参数，a_{1j}，a_{2j} 分别是 A_1，A_2 中第 j 个分量的参数，b 是 B^* 的参数，b_1，b_2 分别是 B_1，B_2 的参数。

当给定了具体的隶属函数时，我们就可以确定出该隶属函数的参数，只要利用上述的公式，我们就能求出最后结果 B^* 的参数，由此也就可以得出 B^* 的隶属函数。

很明显，如果 $a_j=a_{1j}$，则 $b=b_1$；如果 $a_j=a_{2j}$，则 $b=b_2$。也就是说当 $A^*=A_1$ 时，$B^*=B_1$；当 $A^*=A_2$ 时，$B^*=B_2$ 符合推理要求。

5 插值方法的比较

5.1 凸性和正规性

从上面的分析可以看出，KH 插值推理在许多时候不满足凸性和正规性，而基于几何形状的拉格朗日插值推理方法满足凸性和正规性。

5.2 计算效率和复杂性

根据式(2)，KH 插值推理方法计算 B^* 需要 6 个加减运算，3 个乘除运算；而本文所提出的方法计算 B^* 只需要 5 个加减运算，3 个乘除运算。

如果有 n 个推理规则的话，那么则是单个计算量的 n 倍。如表 1 所示。

表 1 插值推理方法计算量的比较

	加减运算	乘除运算
KH 插值方法	6×n	3×n
基于几何形状的插值方法	5×n	3×n

由此可以看出，本文所提出的插值方法与 KH 插值方法的计算效率略高于 KH 插值推理方法。

5.3 物理意义解释

KH 插值方法是根据 α-上截集和 α-下截集之间分别乘线性关系，意义明确；而基于几何形状的拉格朗日插值推理方法，是以模糊集隶属函数的几何形状为基础，有着明显的物理意义。

5.4 推理效果

我们通过一个具体的实例来分析两种方法的推理效果。

现在假设有规则 $A_1\Rightarrow B_1$ 和 $A_2\Rightarrow B_2$，观测值为：A^*。

例 1：假定 $A^*=(7,8,9)$，$A_1=(0,5,6)$，$A_2=(11,13,14)$，$B_1=(0,2,4)$，$B_2=(10,11,13)$。利用 KH 插值推理方法可求出结果为：$B^*=(6.36,5.38,7.38)$如图 2 所示。

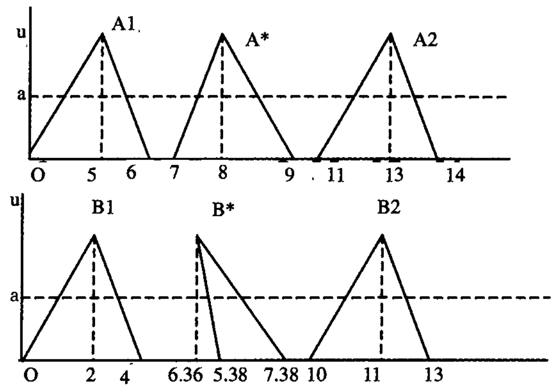

图 2 KH 线性插值推理方法

很显然，最后的结果是非凸的。而使用本文所提出的方法，所求得的结果则明显为凸性：

$B^*=(4.83,5.38,7.38)$

也用图来表示为：

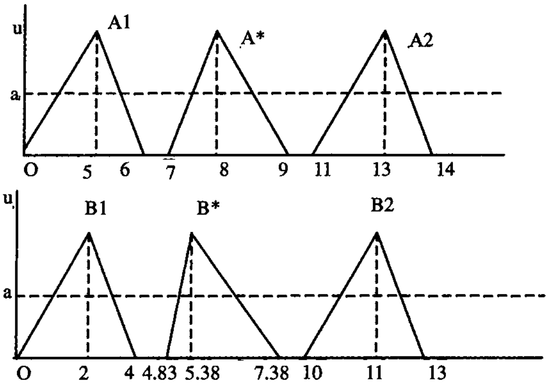

图 3 基于几何形状的模糊拉格朗日插值推理方法

通过对以上推理结果图形的对照比较可以发现，基于几何参数的模糊拉格朗日插值推理方法有着良好的推理效果。

例 2：隶属函数是梯形时的情况

假定 $A^*=(7,8,9,10)$，$A_1=(0,4,5,6)$，$A_2=(11,12,13,14)$，$B_1=(0,2,3,4)$，$B_2=(10,11,12,13)$。根据上述方法，可以得出最后结果为：$B^*=(5.5,6.5,7.5,8.5)$。

结论 KH 线性插值推理方法是众多插值推理方法中计算最简单，也就是说计算复杂度最低的一种方法，但 KH 的推理结果在很多情况下是非凸的模糊集。本文所提出的基于几何参数的模糊拉格朗日插值推理方法不仅保持了 KH 插值方法计算简单的优点，而且保证了最后结果的正规凸性，为智能系统在稀疏规则库条件下进行模糊推理提供了一个有用的工具。

参考文献

1 Mizumoto M. Fuzzy Reasoning. Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems. Japanese, 1992, 4(3):35～46

2 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学(E 辑)，1998,28(3):259～267

3 koczy L T, Hirota K. Interpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rule bases[J]. Information Sciences 1993,71(1-2):169～201

4 Koczy L T, Hirota K . Approximate reasoning by linear rule interpolation and general approximation[J]. International Journal of Approximate Reasoning,1993, 9(3):197～225

5 Shi Y, Mizumoto M . Some considerations on Koczy's interpolative reasoning method[J]. Journal SOFT,1996,8:147～157

6 Wang B W, Li X, Liu W Y, Shi Y. On reasoning conditions of Koczy's interpolative reasoning[J]. Biomedical Soft computing and Human Sciences, 2003,9(2)

7 Shi Y, Mizumoto M. A fuzzy interpolative-Type Reasoning based on Lagrange's Interpolation[C]. In: 16th Fuzzy System Symposium, Skita, 2000