

Fuzzy 插值及其 Fuzzy 泛函网络构造理论^{*})

周永权^{1,2} 焦李成¹ 李陶深³

(西安电子科技大学智能信息处理研究所 西安 710071)¹

(广西民族大学计算机与信息科学学院 南宁 530006)² (广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)³

摘要 首先分别介绍了泛函网络概念和 Fuzzy 插值概念及性质;将泛函网络结构特性和 Fuzzy 插值映射有机地结合起来,提出了一类新型 Fuzzy 泛函网络模型,给出其 Fuzzy 泛函网络构造方法;采用构造性方法从理论上证明了 Fuzzy 泛函网络能够以任意精度逼近任意定义在有界闭集上的连续函数。这从理论上为 Fuzzy 泛函网络的使用提供了依据,具有明显的实际应用价值。

关键词 泛函网络, Fuzzy 插值, 正规基元组, Fuzzy 泛函网络, 构造理论

Fuzzy Interpolation and Fuzzy Functional Network Constructive Theory

ZHOU Yong-Quan^{1,2} JIAO Li-Cheng¹ LI Tao-Shen³

(Institute for Intelligence Information Processing, Xidian University, Xi'an 710071)¹

(College of Computer and Information Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006)²

(College of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004)³

Abstract The concept of functional network and characteristics of fuzzy interpolation are first introduced, a new functional network modeling, combining constructive characteristics of functional network and fuzzy interpolation mechanism, is proposed, based on which fuzzy functional network is proved to approximate any continuous function defined on closed set to a precision accuracy. This theory result provides us a very useful guideline when we design and application fuzzy functional network, and therefore has very important theoretical and practical significance.

Keywords Functional network, Fuzzy interpolation, Regular base-element, Fuzzy functional network, Constructive theory

1 引言

模糊泛函网络(Fuzzy Functional Neural Network, 简称 FFNN)是在泛函网络理论与模糊理论相结合的基础上得到的一类新型泛函网络,设计目的是试图在同一问题中发挥两者的优势。无疑,这种考虑无论对于模糊系统还是泛函网络均有益处。然而,在这种考虑之前,有必要揭示模糊系统与泛函网络之间的本质联系,这是我们设计新型模糊泛函网络模型的基础。而泛函网络^[1]是 E. Castillo 在 1998 年提出的,它是一种对神经网络的有效推广。与神经网络不同,它处理的是一般泛函模型,在各个神经元之间的连接无权值,并且神经元函数不固定,而是可学习的,常常是一个给定的基函数簇(如多项式、三角函数等)。泛函网络已成功应用于混沌时间序列的预测,微分、差分和泛函方程的求解, CAD, 线性、非线性回归^[2~4], 非线性系统辨识^[5], 计算智能^[6~10]等领域。泛函网络在解决上述问题中都表现出较好的性能。

有关揭示模糊逻辑系统与前向神经网络的等价性,汪培庄、李洪兴等在文^[11~13]进行了系统深入的研究,指出模糊逻辑系统的几个基本特征,并且减弱模糊逻辑系统插值表示的条件,定义了非线性神经网络、线性神经网络以及矩形波神经网络;证明了线性神经网络必可由矩形波神经网络表示,给

出了模糊逻辑系统与前向神经网络的等价性的证明。这些理论结果无疑给人们设计模糊或神经网络的混合系统奠定了理论基础,所获得结果也对本文的 FFNN 研究具有指导意义和参考价值。

本文首先分别详细介绍了泛函网络结构和 Fuzzy 插值有关的概念及性质,讨论了泛函网络的插值机理;将泛函网络结构特点与模糊理论和方法有机地结合起来,提出了一类新型 Fuzzy 泛函网络模型;给出了 Fuzzy 泛函网络的构造方法;采用构造性方法从理论上证明了 Fuzzy 泛函网络能够以任意精度逼近任意定义在有界闭集上的连续函数。这从理论上为 Fuzzy 泛函网络的使用提供了依据,具有明显的实际应用价值。

2 泛函网络结构

一般的泛函网络^[1]由以下元素组成:(1)输入单元层。这是输入数据的一层单元,输入单元以带有相应名字的实心圆来表示。(2)输出单元层。这是最后一层单元,它输出网络的结果是数据。输出单元也以带有相应的名字来表示。(3)一层或多层神经元。每一个神经元是一个计算单元,它计算的是一组来自前一层神经元或输入单元的输入值,并给下一层神经元或输出单元提供数据。计算单元相互连接,每一个神

^{*})国家自然科学基金资助项目(60461001);广西自然科学基金资助项目(0542048);广西民族大学重大研究资助项目。周永权 博士,教授,主要研究方向为神经网络、计算智能;焦李成 教授,博士生导师,主要研究方向为自然计算、智能信息处理等;李陶深 博士,教授,主要研究方向为并行计算、CAD 等。

经元的输出可作为另一个神经元或输出单元输入数据的一部分。一旦给定输入值,输出便由神经元的类型来确定,它由一函数定义。例如,假如有一个神经元具有 s 个输入 (x_1, x_2, \dots, x_s) 及 k 个函数 $f_j, j=1, 2, \dots, k$, 使得 $y_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_s); j=1, 2, \dots, k$ 。函数 f_j 由网络的结构来确定,神经元由带有相应 f_j 函数的名称用圆圈来表示;(4)有向连接线。它们将输入层、中间层、输出单元层连接起来,箭头表示信息流向。所有这些元素一起形成了泛函网络的结构,它确定了网络的泛函能力。

图 1(a) 给出了一简单的泛函网络结构。为了便于比较,同时给出了对应的神经网络结构(图 1(b))。

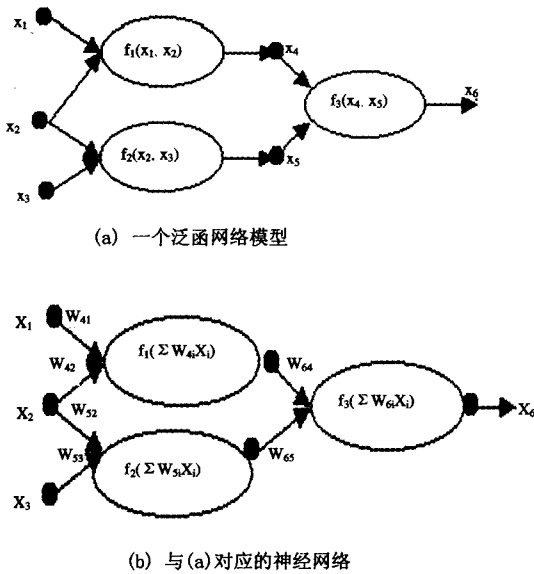


图 1

图中的输入模式是 $\{x_1, x_2, x_3\}$, 神经元函数是 $f_i, i=1, 2, 3$; 输出 x_6 。特别神经元函数 $f_i, i=1, 2, 3$ 。选择在泛函网络中,根据 E. Castillo 的作法,是将每一神经元函数 f_i 表示成一些已知基函数簇的线性组合的形式,如多项式、三角函数、Fourier 展开级数等。在神经网络中,对每一神经元函数 f_i ,即激活函数常取 Sigma 函数、双曲正切函数等,它与泛函网络的神经元函数主要区别在于神经元函数 f_i 是固定的、不可学习的。其次,泛函网络没有权值,而神经网络是带权值,等等。至于其它区别,本文不再一一赘述,可参考文献[4]。

3 Fuzzy 泛函网络

3.1 Fuzzy 泛函神经元

从集合映射的观点来看,结合泛函网络结构的特点(见图 1(a)),一般地 Fuzzy 泛函神经元可描述为:

定义 3.1 一个泛函神经元是一个三元组 (Y, F, Z) 。其中 Y, Z 是 X 上不交的两个非空子集,且 $F: Y \rightarrow Z$ 是给定的函数。此处, Y, Z, F 分别称输入单元集、输出单元集和泛函单元处理函数集。当 $F(Y) = \{0, 1\}$ 时, F 称作二值泛函神经元;当 $F(Y) \subset [0, 1]$ 时,称 F 为 Fuzzy 泛函神经元。

定义 3.2 一个 Fuzzy 泛函网络是一个二元组 (X, U) 。其中 X 表示结点集, $U = \{(Y_i, F_i, Z_i) | i=1, \dots, n\}$ 是 X 上 Fuzzy 泛函神经元集,且满足对每一结点 $X_i \in X, X_i$ 是输入结点或至少是 Fuzzy 泛函神经元集 U 上的输出结点。

由定义 3.1、3.2 可看出,集 X 可分成三部分 $\{X_{input}, X_{intermediate}, X_{output}\}$, 其中, X_{input} 是 Fuzzy 泛函网络输入结点集,

X_{output} 是 Fuzzy 泛函网络输出结点集, $X_{intermediate}$ 是 Fuzzy 泛函网络中间单元集。假设网络有 s 个输入 $(x_1, x_2, \dots, x_s) \in X_{input}$, k 个输出 $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in X_{output}$, 则存在 k 个 Fuzzy 函数 $F_j \in X_{intermediate}, j=1, 2, \dots, k$ 使得

$$y_j = F_j(x_1, x_2, \dots, x_s); j=1, 2, \dots, k \quad (1)$$

显然,(1)式的逼近能力的好坏完全取决于 Fuzzy 函数 F_j 的正确选定,它是由 Fuzzy 网络的结构确定。据 E. Castillo 的作法,是根据经验知识采取一定简化假设选取一些基函数簇,将每一 Fuzzy 神经元函数 F_j 表示成一些已知基函数簇的线性组合的形式。

简而言之,由 Fuzzy 神经元构成的网络叫作 Fuzzy 泛函网络。当每个 Fuzzy 神经元函数的值域为 $(0, 1)$ 时,该泛函网络叫作二值泛函网络。若存在泛函神经元函数的值域包含于 $[0, 1]$, 则称该网络为 Fuzzy 泛函网络。

4 Fuzzy 泛函网络的插值机理

Fuzzy 泛函网络同泛函神经网络一样,也有各种各样的结构,我们不可能用一个统一的通用结构来描述所有的 Fuzzy 泛函网络,也不可能用一个统一的 Fuzzy 泛函方程表示所有的 Fuzzy 泛函网络。从上面给出的 Fuzzy 泛函网络的定义可看出,任一 Fuzzy 泛函网络都可看成输入到输出的 Fuzzy 函数的整合变换。利用这一特性,下面给出两种简单的、典型的 Fuzzy 网络模型,在此基础上研究 Fuzzy 泛函网络的插值机理。

4.1 单输入单输出 Fuzzy 泛函网络模型

图 2 给出一类单输入、单输出 Fuzzy 泛函网络模型。

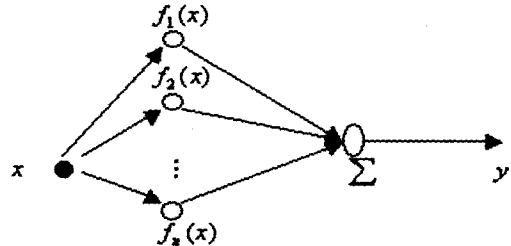


图 2 单输入、单输出 Fuzzy 泛函网络模型

其中 $f_i(x), i=1, 2, \dots, n$ 是 Fuzzy 泛函神经元,该 Fuzzy 泛函网络输出的表达式为

$$y = \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (2)$$

4.2 双输入单输出 Fuzzy 泛函网络模型

图 3 给出一类双输入、单输出 Fuzzy 泛函网络模型。

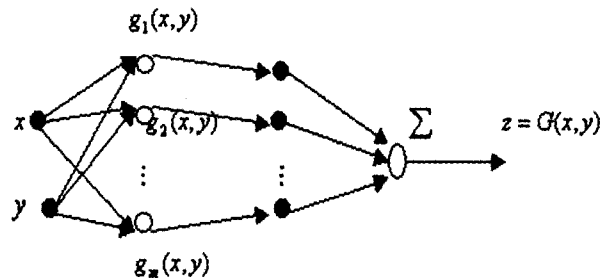


图 3 双输入、单输出 Fuzzy 泛函网络模型

若图 3 Fuzzy 泛函网络输入数据是 $\{x, y\}$, 输出的是 $\{z\}$, 则该 Fuzzy 泛函网络输出

$$z = G(x, y) = \sum_{j=1}^m g_j(x, y) \quad (3)$$

在式(3)中, $g_j(x, y)$ 为二元 Fuzzy 泛函神经元。

特别, 当 $g_j(x, y) = p_j(x)q_j(y)$ 时, 我们称该 Fuzzy 泛函网络为可分离 Fuzzy 泛函网络。此时, 对应的网络结构见图 4。

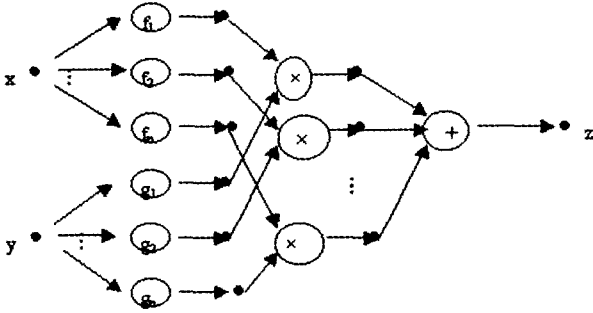


图 4 可分离双输入、单输出 Fuzzy 泛函网络模型

该可分离 Fuzzy 泛函网络的输出为

$$z = F(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y) \quad (4)$$

4.3 Fuzzy 泛函网络的构造方法

在本节, 为了研究 Fuzzy 泛函网络的构造方法, 首先引入几个定义^[11]。给定 Fuzzy 集 $\tilde{A} \in \mathcal{Q}(X)$, 称 \tilde{A} 为 X 上的一个正规 Fuzzy 集, 如果存在唯一的 $x^* \in X$, 使 $\tilde{A}(x^*) = 1$, x^* 叫作 \tilde{A} 的峰点。设 R 为实数域, 当论域 $X \subset R$ 时, X 上的一个正规 Fuzzy 集又叫 X 上的一个正规峰集。

定义 1^[11] 给定论域 $X \subset R$, X 上的一组正规 Fuzzy 集 $\mathcal{Q} = \{\tilde{A}_i | i=1, 2, \dots, n\}$ 称为 X 上的一个正规基元组。如果每个 \tilde{A}_i 都是 X 上的正规峰集且满足条件:

$$(\forall x \in X) (\sum_{i=1}^n \tilde{A}_i(x) = 1) \quad (5)$$

其中每个 \tilde{A}_i 都叫做这个基元组的一个(正规)基元。特别, 称 \mathcal{Q} 为一个(正规)二相基元组, 如果对任意 $x \in X$, 至多只有 2 个相邻的基元 $\tilde{A}_i, \tilde{A}_{i+1}$, 使得 $\tilde{A}_i(x) \neq 0 \neq \tilde{A}_{i+1}(x)$ 。

定义 2^[11] 给定映射 $f: X \rightarrow R, \mathcal{Q} = \{\tilde{A}_i | i=1, 2, \dots, n\}$ 为 X 上的正规基元组, 记

$$\hat{f} = \hat{f}(x) \triangleq \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \tilde{A}_i(x) \quad (6)$$

其中 x_i^* 为 $\tilde{A}_i, i=1, 2, \dots, n$ 的峰点; 称 \hat{f} 为 f 或 $\{f(x_i^*) | i=1, 2, \dots, n\}$ 在 \mathcal{Q} 上的 Fuzzy 插值映射。

引理 1^[11] 设 $\mathcal{Q} = \{\tilde{A}_i | i=1, 2, \dots, n\}$ 为 X 上的一个正规基元组, \hat{f} 为映射 $f: X \rightarrow R$ 的 Fuzzy 插值映射, 则 \hat{f} 具有下列性质: 1) 对任意峰点 x_i^* , 必有 $\hat{f}(x_i^*) = f(x_i^*)$; 2) $(\forall x \in X) (\min_i f(x_i^*) \leq \hat{f}(x) \leq \max_i f(x_i^*))$; 3) 若 \mathcal{Q} 为 X 上二相正规基元组, 则

$$(\forall x \in [x_i^*, x_{i+1}^*]) (\min\{f(x_i^*), f(x_{i+1}^*)\} \leq \hat{f}(x) \leq \max\{f(x_i^*), f(x_{i+1}^*)\}) \quad (7)$$

定义 3 给定论域 $X_j \subset R (j=1, 2, \dots, m), \mathcal{Q}^{(j)} = \{\tilde{A}_i^{(j)} | i=1, 2, \dots, n_j\}$ 为 X 上正规基元组 $(j=1, 2, \dots, m)$, 记

$$\prod_{j=1}^m \mathcal{Q}^{(j)} \triangleq \{\tilde{C}_{i_1 i_2 \dots i_m} | \tilde{C}_{i_1 i_2 \dots i_m} \triangleq \tilde{A}_{i_1}^{(1)} \cdot \tilde{A}_{i_2}^{(2)} \cdot \dots \cdot \tilde{A}_{i_m}^{(m)}, \tilde{A}_{i_j}^{(j)} \in \mathcal{Q}^{(j)}, j=1, 2, \dots, m\} \quad (8)$$

其中, 对任何 $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^m X_j$, 有

$$\tilde{C}_{i_1 i_2 \dots i_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = (\tilde{A}_{i_1}^{(1)} \cdot \tilde{A}_{i_2}^{(2)} \cdot \dots \cdot \tilde{A}_{i_m}^{(m)})(x_1, x_2, \dots, x_m) \triangleq \tilde{A}_{i_1}^{(1)}(x_1) \cdot \tilde{A}_{i_2}^{(2)}(x_2) \cdot \dots \cdot \tilde{A}_{i_m}^{(m)}(x_m)$$

称 $\prod_{j=1}^m \mathcal{Q}^{(j)}$ 为 $\mathcal{Q}^{(j)} (j=1, 2, \dots, m)$ 在 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ 上的乘积基元组基元组。实际上, 正规基元组的乘积基元组仍是正规基元组。

有了以上关于 Fuzzy 有关的概念及性质作为构造 Fuzzy 泛函网络的理论基础, 下面具体讨论其 Fuzzy 泛函网络的构造方法, 其核心思想是借助于 Fuzzy 插值映射。首先, 将泛函网络结构中每一泛函神经元用正规基元组表示。其次, 根据泛函网络的结构特点完成整体网络的构建, 这样构成的泛函网络称之为 Fuzzy 泛函网络。下面介绍图 3、图 4 的两种 Fuzzy 泛函网络的具体构造方法。

在图 2 中, 对每一泛函神经元 $f_i(x), i=1, 2, \dots, n$, 借助于定义 2, 都用 Fuzzy 插值映射表示, 即

$$\hat{f}_i(x) = \sum_{j=1}^m f_i(x_j^*) \tilde{A}_{ij}(x) \quad (9)$$

令 $a_{ij} = f_i(x_j^*)$, 我们可将式(9)改写成

$$\hat{f}_i(x) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \tilde{A}_{ij}(x) = a_i^T \tilde{A}_i(x) \quad (10)$$

式中 $\{\tilde{A}_{ij}(x) | i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m\}$ 是给定正规基元组, 适合于逼近 f_i 到期望精度的、线性独立的函数集, $\tilde{A}_i(x) = (\tilde{A}_{i1}(x), \tilde{A}_{i2}(x), \dots, \tilde{A}_{im}(x))^T$, 系数 a_{ij} 是 Fuzzy 泛函网络的泛函参数, 且 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})^T$, 根据(10)式, 则图 2 所示网络的输出最终可写成

$$y = \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(x) = \sum_{i=1}^n a_i^T \tilde{A}_i(x) \quad (11)$$

这样, 我们完成了对单输入、单输出的 Fuzzy 泛函网络的构造。不难看出, (11)式已经是插值函数的形式了。适当地选择“基函数” $\tilde{A}_1(x), \dots, \tilde{A}_n(x)$, 便可决定了某类插值函数。

接着我们考察多输入、单输出 Fuzzy 泛函网络的构造方法。在图 3 的模型中, Fuzzy 泛函网络输出

$$z = G(x, y) = \sum_{k=1}^m g_k(x, y)$$

其中 $g_k(x, y)$ 为二元 Fuzzy 泛函神经元。构造的关键是如何将每一泛函神经元 $g_j(x, y)$ 用给定正规基元组表示。具体构造方法是分别在 x, y 轴定义一个二相正规基元组, 然后在 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 取乘积基元组即可。

假设沿 x 轴定义一个二相正规基元组

$$\mathcal{R}_x = \{\tilde{A}_i(x) | i=1, 2, \dots, n\} \quad (12)$$

类似地, 在 y 轴上定义一个二相正规基元组

$$\mathcal{R}_y = \{\tilde{B}_j(y) | j=1, 2, \dots, n\} \quad (13)$$

在 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上取乘积基元组 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_x \times \mathcal{R}_y$, 对每一个泛函神经元 $g_k(x, y)$ 作 $\mathcal{R}_x^{(k)} \times \mathcal{R}_y^{(k)}$ 上的 Fuzzy 插值映射 $\hat{g}_k(x, y)$, 即

$$\hat{g}_k(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_k(x_i^*, y_j^*) \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) \quad (14)$$

令 $a_{ijk} = g_k(x_i^*, y_j^*)$, 则式(14)可写成

$$\hat{g}_k(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ijk} \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) \quad (15)$$

这样, 我们完成了将模型(3)中每一个泛函神经元 $g_k(x, y), k=1, 2, \dots, m$ 都可用二相正规基元组的乘积 $\{\tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) | i, j=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, m\}$ 表示。由于正规基元组的乘积基元组仍是正规基元组, 因此模型(3)中每一个泛函神经元 $g_k(x, y), k=1, 2, \dots, m$ 都可用正规基元组表示。那么, 该网络最终输出为

$$z = \hat{f}(x, y) = \sum_{k=1}^m \hat{g}_k(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ijk} \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) \quad (16)$$

式中 $\{\tilde{A}_i^{(k)}(x)\tilde{B}_j^{(k)}(y) | i, j=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, m\}$ 是正规基元组,它是事先给定的,而 a_{ijk} 是通过学习待确定的泛函参数。不难看出,(16)式已经是某类插值函数的形式了。适当地选择“基函数” $\{\tilde{A}_i^{(k)}(x)\tilde{B}_j^{(k)}(y) | i, j=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, m\}$,便决定了某类分片逐元插值函数。

类似地,考虑可分离 Fuzzy 泛函网络的构造方法,我们可以将图 4 中的每一神经元 $f_i(x), g_i(y)$ 表示成一个已知正规基元组组合的形式

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \sum_{j=1}^m a_{ij} \tilde{A}_j(x) = a_i^T \tilde{A}_i(x) \\ g_i(y) &= \sum_{k=1}^m b_{ik} \tilde{B}_k(y) = b_i^T \tilde{B}_i(y) \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)中其它符号含义同上。此时,可分离 Fuzzy 泛函网络的输出

$$z = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(y) = \sum_{i=1}^n a_i^T \tilde{A}_i(x) b_i^T \tilde{B}_i(y) \quad (18)$$

容易看出,(18)式已经是插值函数的形式了。适当地选择“基函数” $\tilde{A}_1(x), \dots, \tilde{A}_n(x); \tilde{B}_1(y), \dots, \tilde{B}_n(y)$,便决定了某类分片插值函数。

从 Fuzzy 泛函网络的构造方法可看出,该方法不同于神经网络。而基于“基函数”的神经网络(如小波神经网络^[14,15]、B 样条神经网络^[16]、RBF 神经网络^[17]等),其构造的基本思想是,利用小波元、样条基函数、高斯函数等来直接代替神经元(neuron),即作为神经网络的激活函数与神经网络连接,激活函数一经选定就不再改变。事实上,这种假定不尽合理。我们知道,日常生活中,有的人在学习时能对问题很快理解,有的人则不然。这说明同一类型的神经元细胞对外来信号的处理功能因人而异,有的人善于适应,有的人难以适应。而泛函网络不同,其神经元是用给定的一组基函数的线性组合来替代神经元(neuron),且每一神经元可用不同的基函数的线性组合来替代神经元。实际上,构成神经元的基函数不固定,而是可学习的,在学习过程中能自适应调整或改变假设,是合理的。从这一方面来看,基于“基函数”的泛函网络是对基于“基函数”的神经网络的一种有效推广。

5 Fuzzy 泛函网络构造理论

在本节,我们将给出两个定理。该定理表明,可以通过构造的方法得到一个 Fuzzy 泛函网络,此网络能以给定的精度逼近任意给定的定义在有界闭集上的多变量连续实函数。以下我们以图 3 的网络为例,考虑其 Fuzzy 泛函网络逼近性能。

首先,重写(16)式

$$z = \tilde{f}(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ijk} \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) \quad (19)$$

$$\text{置: } \tilde{f}_k(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ijk} \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y); k=1, 2, \dots, m \quad (20)$$

则式(19)可改写成

$$z = \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}_1(x, y) + \tilde{f}_2(x, y) + \dots + \tilde{f}_m(x, y) \quad (21)$$

式中每一 $\tilde{f}_k(x, y), k=1, 2, \dots, m$ 都可由 Fuzzy 插值映射(20)式来近似表示。从 Fuzzy 泛函网络的构造可看出,整个网络的逼近性能关键取决于每一泛函神经元的逼近性能的好坏。其次,经输出神经元整合后,在此基础上,我们再考察网络的整体逼近能力。于是

定理 1 设 $f_k: D_k \rightarrow R$ 为定义在有界闭集 $D_k \subset R^m$ 上的连续函数,则对给定 $\forall \epsilon_k > 0$,存在 D_k 上一个乘积正规基元组 $\mathcal{R}^{(k)} = \{\tilde{C}_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(k)}\}$,使得 f_k 在 $\mathcal{R}^{(k)}$ 上的 Fuzzy 插值映射 \tilde{f}_k 到给定的精度 ϵ_k ,即

$$\sup_{x \in D_k} |\tilde{f}_k(x) - f_k(x)| \leq \epsilon_k, k=1, 2, \dots, m \quad (22)$$

证明:为了标记方便,我们假定输入维数=2,且 $D_k = [0, 1]^2, \forall$ 给定 $\epsilon_k > 0$,由于 $f_k, k=1, 2, \dots, m$ 在 D_k 上连续且为有界闭集,故每一 f_k 在 D_k 上一致连续。因此,对于 \forall 给定 $\epsilon_k > 0$,必定存在 $\delta_k > 0$,使得当 $\sqrt{(x_{1k} - x_{2k})^2 + (y_{1k} - y_{2k})^2} \leq \delta_k, k=1, 2, \dots, m$ 时,有 $|f(x_{1k}, y_{1k}) - f(x_{2k}, y_{2k})| \leq \epsilon_k/2$ 成立,其中 $(x_{1k}, y_{1k}), (x_{2k}, y_{2k}) \in D_k, k=1, 2, \dots, m$ 。对每一 f_k 来说,可找到一自然数序列 $N_k, k=1, 2, \dots, m$ 和正数序列 $\delta_k \leq \sqrt{2}/N_k$,不妨取 $\delta_k = \sqrt{2}/N_k$,只要取 $N = \max\{N_k\}, \delta = \min\{\delta_k\}, k=1, 2, \dots, m$ 。对所有 f_k 来说,都有 $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \epsilon/2$,其中 $\epsilon = \min\{\epsilon_k\}, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$,并且 $D = \bigcup_{k=1}^m D_k$,即可满足要求。

在 x 轴上定义一个二相正规基元组序列 $\mathcal{R}_x^{(k)} = \{\tilde{A}_i^{(k)}(x) | i=1, 2, \dots, n\}, k=1, 2, \dots, m$ (见图 5)。

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(k)}(x) &= \begin{cases} 1-nx, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{others} \end{cases} \\ \tilde{A}_i^{(k)}(x) &= \begin{cases} nx-(i+1), & i/n \leq x \leq (i+1)/n \\ i+2-nx, & (i+1)/n \leq x \leq (i+2)/n \\ 0, & \text{others} \end{cases} \\ & \quad (i=2, 3, \dots, n-1) \\ \tilde{A}_n^{(k)}(x) &= \begin{cases} nx-1, & (n-1)/n \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \end{aligned}$$

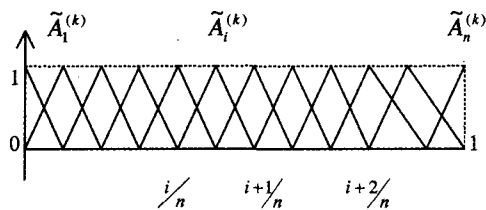


图 5 x 轴上的二相正规基元组序列

类似地,在 y 轴上定义一个二相正规基元组序列 $\mathcal{R}_y^{(k)} = \{\tilde{B}_j^{(k)}(y) | j=1, 2, \dots, n\}, k=1, 2, \dots, m$ 。在 D_k 上取乘积基元组序列 $\mathcal{R}^{(k)} = \mathcal{R}_x^{(k)} \times \mathcal{R}_y^{(k)}$,其峰值点集 $S^{(k)} = \{(i-1)/n, (j-1)/n | i, j=1, 2, \dots, n+1\}$,取 \tilde{f}_k 为 f_k 在 $\mathcal{R}^{(k)}$ 上的 Fuzzy 插值映射:

$$\tilde{f}_k(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_k((i-1)/n, (j-1)/n) \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y), k=1, 2, \dots, m \quad (23)$$

注意 $\mathcal{R}_x^{(k)}, \mathcal{R}_y^{(k)}$ 均为二相正规基元组 $\mathcal{R}^{(k)} = \mathcal{R}_x^{(k)} \times \mathcal{R}_y^{(k)}$ 。

另外,若置 $\Delta_i = [(i-1)/n, i/n], \Delta_j = [(j-1)/n, j/n], (i, j=1, 2, \dots, n)$,则当 $(x, y) \in \Delta_i \times \Delta_j$ 时,有

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k(x, y) &= f_k(((i-1)/n, (j-1)/n) \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) + \\ & f_k(((i-1)/n, j/n) \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) + f_k(i/n, \\ & (j-1)/n) \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) + f_k(i/n, j/n) \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y) \end{aligned} \quad (24)$$

其中 \tilde{f}_k 表示的是第 k 个神经元对应的逐片线性函数。进一步,若 $a_1^{(k)} = \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y), a_2^{(k)} = \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y), a_3^{(k)} = \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y), a_4^{(k)} = \tilde{A}_i^{(k)}(x) \tilde{B}_j^{(k)}(y)$,则从(24)式有

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k(x, y) &= a_1^{(k)} f_k((i-1)/n, (j-1)/n) + a_2^{(k)} f_k((i-1)/ \\ & n, j/n) + a_3^{(k)} f_k(i/n, (j-1)/n) + a_4^{(k)} f_k(i/n, \\ & j/n) \end{aligned} \quad (25)$$

现在我们考虑对每一 k 来说,去证明

$$a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} + a_4^{(k)} = 1 \quad k=1, 2, \dots, m \quad (26)$$

事实上

$$a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} + a_4^{(k)} = \tilde{A}_1^{(k)}(x)(\tilde{B}_1^{(k)}(y) + \tilde{B}_2^{(k)}(y)) + \tilde{A}_2^{(k)}(x)(\tilde{B}_3^{(k)}(y) + \tilde{B}_4^{(k)}(y)) = (\tilde{A}_1^{(k)}(x) + \tilde{A}_2^{(k)}(x))(\tilde{B}_1^{(k)}(y) + \tilde{B}_3^{(k)}(y))$$

因为 $\mathcal{X}^{(k)} = \mathcal{X}_x^{(k)} \times \mathcal{X}_y^{(k)}$ 是二相正规基元组, 当 $(i-1)/n \leq x \leq i/n$ 时(即 $x \in \Delta_i^{(k)}$), 只有 $\tilde{A}_i^{(k)}(x), \tilde{A}_i^{(k)}(x)$ 才可能不为零, 故由(5)式有: $\tilde{A}_1^{(k)}(x) + \tilde{A}_i^{(k)}(x) = 1, k=1, 2, \dots, m$ 。同理, 当 $y \in \Delta_j^{(k)}$ 时, $\tilde{B}_j^{(k)}(y) + \tilde{B}_j^{(k)}(y) = 1, k=1, 2, \dots, m$ 。因此, 我们有 $a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} + a_4^{(k)} = 1$ 成立。根据文[11]结论, 说明 $\tilde{f}_k(x, y)$ 是相邻 4 个峰点所对应的函数值按 (x, y) 对该四基元的隶属度而求重心坐标值; 不妨假定 $f_k(i/n, j/n)$ 与 $f_k((i-1)/n, j/n)$ 分别是相邻的四峰点所对应函数值中最大值与最小值, 于是有

$$f_k((i-1)/n, j/n) \leq \tilde{f}_k(x, y) \leq f_k(i/n, j/n)$$

由此可得到:

$$|\tilde{f}_k(x, y) - f_k((i-1)/n, j/n)| \leq |\tilde{f}_k(i/n, j/n) - f_k((i-1)/n, j/n)|, k=1, 2, \dots, m$$

因为 $(i/n, j/n)$ 与 $((i-1)/n, j/n)$ 之间距离小于 δ_k , 则

$$|\tilde{f}_k(x, y) - f_k((i-1)/n, j/n)| \leq \epsilon_k/2 \quad (27)$$

因 $((i-1)/n, j/n)$ 与 (x, y) 之间距离小于 δ_k , 我们有

$$|f_k(x, y) - f_k((i-1)/n, j/n)| \leq \epsilon_k/2 \quad (28)$$

综合(27)、(28)式, 有

$$|\tilde{f}_k(x, y) - f_k(x, y)| = |\tilde{f}_k(x, y) - f_k((i-1)/n, j/n) + f_k((i-1)/n, j/n) - f_k(x, y)| \leq |\tilde{f}_k(x, y) - f_k((i-1)/n, j/n)| + |f_k((i-1)/n, j/n) - f_k(x, y)| \leq \epsilon_k/2 + \epsilon_k/2 = \epsilon_k$$

结合点 (x, y) 和 k 的任意性, 所以(22)式成立。

定理 2 从理论上能够保证: 对于任意定义在有界闭集上的连续函数, 存在正规基元组, 用这些正规基元组实现 Fuzzy 泛函网络神经能以任意给定的精度逼近原函数。但 Fuzzy 泛函网络的整体逼近能力如何? 于是有

定理 3 设 $f: D \rightarrow R$ 为定义在有界闭集 $D \subset R^m$ 上的连续函数, 其中: $D = \bigcup_{k=1}^m D_k$, 则对给定 $\forall \epsilon > 0$, 存在 D 上一个乘积正规基元组 $\mathcal{Q} = \prod_{k=1}^m \mathcal{Q}^{(k)}$, 使得

$$\sup_{x \in D} |\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad (30)$$

成立。

证明: 为了标记上的简便, 我们仍假定输入维数=2, 且 $D = [0, 1]^2$ 。由于 $f_k, k=1, 2, \dots, m$ 在 D_k 上连续且有界闭集, 故每一 f_k 在 D_k 上一致连续, 重写(21)式, 有

$$z = \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}_1(x, y) + \tilde{f}_2(x, y) + \dots + \tilde{f}_m(x, y)$$

根据定理 1 的证明过程和结论知, 对于 \forall 给定 $\epsilon_k > 0$, 对每一 f_k 来说, 可以找到一自然数序列 $N_k, k=1, 2, \dots, m$ 和正数序列 $\delta_k \leq \sqrt{2}/N_k$, 不妨取 $\delta_k = \sqrt{2}/N_k$, 我们有 $\sup_{x \in D_k} |\tilde{f}_k(x, y) - f_k(x, y)| \leq \epsilon_k, k=1, 2, \dots, m$ 成立。在此基础上, 我们进一步考虑下式

$$|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| = |f_1(x, y) - \tilde{f}_1(x, y) + f_2(x, y) - \tilde{f}_2(x, y) + \dots + f_k(x, y) - \tilde{f}_k(x, y)| \leq |f_1(x, y) - \tilde{f}_1(x, y)| + |f_2(x, y) - \tilde{f}_2(x, y)| + \dots + |f_k(x, y) - \tilde{f}_k(x, y)| \leq \sum_{k=1}^m \epsilon_k \quad (31)$$

只要证明对于 \forall 给定 $\epsilon > 0$, 对 f 来说, 可以找到一自然数 N 和正数 δ , 使得 $|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| \leq \epsilon$ 成立即可。实际上, 若

取 $\epsilon \geq \max\{\epsilon_k\}/m, N = \max\{N_k\}, \delta = \min\{\delta_k\}, k=1, 2, \dots, m$, 于是我们有: $|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| \leq \epsilon$ 成立, 这就证明定理的结论。

结论 由于泛函网络是最近提出的一种新的对神经网络的推广, 有些理论和应用方面的基础还不太健全, 需要不断地提出更适合于所要解决问题的新的网络结构, 完善基础理论。基于此目的, 本文首先分别介绍了泛函网络概念和 Fuzzy 插值概念及性质, 将泛函网络结构特性和 Fuzzy 插值映射有机地结合起来, 提出了一类 Fuzzy 泛函网络模型, 采用构造性方法从理论上证明了 Fuzzy 泛函网络能够以任意精度逼近任意定义在有界闭集上的连续函数, 为下一步研究 Fuzzy 泛函网络学习算法打下理论基础, 这从理论上为 Fuzzy 泛函网络的使用提供了依据, 具有明显的实际应用价值。有关 Fuzzy 泛函网络构造性学习算法将另文讨论。

参考文献

- Castillo E. Function Networks. Neural Processing Letters, 1998, 7: 151~159
- Castillo E, Gutierrez J M. Nonlinear Time Series Modeling and Prediction Using Functional Networks. Extracting Information Masked by Chaos. Physics Letters A, 1998, 244: 71~84
- Castillo E, Cobo A, Gutierrez J M. Working with Differential and Difference Equations Using Functional Networks. Applied Mathematical Modeling, 1999, 23: 89~107
- Castillo E, Cobo A, et al. Functional Networks with Applications. Kluwer Academic Publishers, 1999
- 李春光, 廖晓锋, 等. 非线性系统辨识的一种泛函网络方法. 系统工程与电子技术, 2001, 23(1): 50~53
- 黄德双, 池哲儒. 基于神经网络的递推分块方法求任意高阶多项式的根. 中国科学(E辑), 2003, 12(33): 1115~1124
- 周永权. 基于代数神经网络的多元多项式近似因式分解及学习算法. 计算机研究与展, 1999, 36(6): 668~674
- Zhou Yong-Quan, Jiao Li-Cheng. Approximate Factorization Learning Algorithm of Multivariate Polynomials Based on Functional Networks. Journal of Information and Computational Science, 2005, 2(1): 205~210
- Zhou Yong-Quan, Jiao Li-Cheng. Interpolation Mechanism of Functional Networks. Lecture Notes in Computer Science, 2005, (3697): 45~51
- 周永权, 焦李成. 层次泛函网络整体学习算法. 计算机学报, 2005, 28(8): 1277~1286
- 汪培庄, 李洪兴. Fuzzy 计算机的设计思想(IV). 北京师范大学学报, 1995, 31(4): 434~438
- 李洪兴. 模糊逻辑系统与前向式神经网络等价. 中国科学(E辑), 2000, 30(2): 150~163
- Li Hong-Xing, Philip Chen C L. The Equivalence Between Fuzzy Logic Systems and Feedforward Neural Networks. IEEE Transaction on Neural Networks, 2000, 11(2): 356~365
- Zhang Qing-Hua, Benveniste A. Wavelet networks. IEEE Trans. on Neural Networks, 1992, 3(6): 889~898
- 高协平, 贾彩燕. 广义插值多小波及其反馈神经网络构造. 计算机研究与发展, 2003, 40(6): 861~868
- 於东军, 王士同. B 样条神经网络的构造理论. 计算机研究与发展, 1999, 36(5): 534~540
- 赵振宇, 徐用懋. 模糊理论和神经网络的基础与应用. 北京: 清华大学出版社, 1997