

粗集、S-粗集、函数 S-粗集及其关系定理^{*})

王晶晶¹ 史开泉² 雷英杰¹

(空军工程大学导弹学院 三原 713800)¹ (山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)²

摘要 针对 Pawlak 粗集理论的现况,着重介绍了 S-粗集、函数 S-粗集的定义、两种结构及对偶形式,详细讨论了 S-粗集与 Pawlak 粗集之间的关系,函数 S-粗集与 S-粗集、Pawlak 粗集之间的关系。最后给出了 S-粗集理论的可应用领域。

关键词 粗集, S-粗集, 函数 S-粗集, 关系定理

S-Rough Sets, Function S-Rough Sets and their Relation Theorem

WANG Jing-Jing¹ SHI Kai-Quan² LEI Ying-Jie¹

(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800)¹

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100)²

Abstract The authors briefly analyze the present situation of Pawlak Rough sets, and emphatically introduce the definitions of S-rough sets and Function S-rough sets, two mathematical structures and the dual forms. The authors detailedly summarize the relation between S-rough sets and Pawlak Rough sets, the relation between function S-rough sets and S-rough sets Pawlak Rough sets, and the relation between function S-rough sets and Pawlak Rough sets. At last the authors give the available applications of S-rough sets theory.

Keywords Rough sets, S-rough sets, Function S-rough sets, Relation theorem

1982 年荷兰的 Z. Pawlak 教授提出了粗集的概念,粗集理论得到迅速发展,并且在模式识别、机器学习、决策支持、过程控制、预测建模等领域得到成功的应用。但是应用粗集理论解决上述问题,最成熟的方法实质都可归结为:规则提取。这使得粗集理论在应用上陷于瓶颈,迫切需要新理论、新方法的出现。2002 年,山东大学的史开泉教授提出了 S-粗集理论,他将粗集理论从静态推广到动态,提出了规律挖掘的思想, S-粗集是以 Pawlak 粗集理论为基础,对 Pawlak 粗集理论的拓广和延伸。

1 粗集的定义

约定:设 U 是非空有限论域, R 是 U 上的二元等价关系; $[x]_R$ 表示 x 所在的 R -等价类; X 是 U 上的子集, $X \subset U$; $R_-(X)$, $R^-(X)$ 分别是 $X \subset U$ 的下近似,上近似。

定义 1^[1] 令

$$R_-(X) = \bigcup [x]_R = \{x | x \in U, [x]_R \subseteq X\} \quad (1)$$

$$R^-(X) = \bigcup [x]_R = \{x | x \in U, [x]_R \cap X \neq \emptyset\} \quad (2)$$

当 $R_-(X) \neq R^-(X)$, 这时称 X 是粗集, 记作 $(R_-(X), R^-(X))$ 。

2 S-粗集基本概念

2.1 单向 S-粗集及其对偶

定义 2^[2] 令 $X^0 = X \cup \{u | u \in U, u \notin X, f(u) = x \in X\}$, 其中 $f \in F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, 且满足: $\exists u \in U, u \notin X \Rightarrow f(u) = x \in X$ 。 F 是 U 上的元素迁移族, f 是 U 上的元素迁移。显然, 因为 F 的存在使静态的 X 发生单向动态奇异变化, 产生 X^0 。

$$\text{令 } (R, F)_0(X^0) = \bigcup [x]_R = \{x | x \in U, [x]_R \subseteq X^0\} \quad (3)$$

$$(R, F)^0(X^0) = \bigcup [x]_R = \{x | x \in U, [x]_R \cap X^0 \neq \emptyset\} \quad (4)$$

这里称 $(R, F)_0(X^0)$ 为 X^0 的下近似, $(R, F)^0(X^0)$ 为 X^0 的上近似。称集合对 $((R, F)_0(X^0), (R, F)^0(X^0))$ 是 $X^0 \subset U$ 的单向奇异粗集, 简称单向 S-粗集。

定义 3^[2] 令 $X' = X - \{x | x \in X, \bar{f}(x) = u \notin X\}$, 其中, $\bar{f} \in \bar{F} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$, 且满足: $\exists x \in X \Rightarrow \bar{f}(x) = u \notin X$ 。 $\bar{F}$ 是 U 上的元素迁移族, $\bar{f}$ 是 U 上的元素迁移。

$$\text{令 } (R, \bar{F})_0(X') = \bigcup [x]_R = \{x | x \in U, [x]_R \subseteq X'\} \quad (5)$$

$$(R, \bar{F})^0(X') = \bigcup [x]_R = \{x | x \in U, [x]_R \cap X' \neq \emptyset\} \quad (6)$$

这里称集合对 $((R, \bar{F})_0(X'), (R, \bar{F})^0(X'))$ 是单向奇异粗集 $((R, F)_0(X^0), (R, F)^0(X^0))$ 的对偶, 简称单向 S-粗集对偶。

2.2 双向 S-粗集

定义 4^[2] 令 $X^* = X' \cup \{u | u \in U, u \notin X, f(u) = x \in X\}$, 其中 X' 、 $\bar{f}$ 、 $\bar{F}$ 定义见 2.1 节。显然, 因为 $F^* = F \cup \bar{F}$ 的存在使静态的 X 发生双向动态奇异变化, 产生 X^* 。

$$\text{令 } (R, F^*)_0(X^*) = \bigcup [x]_R = \{x | x \in U, [x]_R \subseteq X^*\} \quad (7)$$

$$(R, F^*)^0(X^*) = \bigcup [x]_R = \{x | x \in U, [x]_R \cap X^* \neq \emptyset\} \quad (8)$$

这里称集合对 $((R, F^*)_0(X^*), (R, F^*)^0(X^*))$ 是 $X^* \subset U$ 的双向奇异粗集, 简称双向 S-粗集。

3 S-粗集与 Pawlak 粗集的关系

定理 1^[2] (S-粗集与 Pawlak 粗集关系定理) 下列关系成立:

若 $F = \emptyset$, 则单向 S-粗集退化成 Pawlak 粗集, 且

$$((R, F)_0(X^0), (R, F)^0(X^0)) = (R_-(X), R^-(X)) \quad (9)$$

若 $\bar{F} = \emptyset$, 则单向 S-粗集对偶退化成 Pawlak 粗集, 且

$$((R, \bar{F})_0(X'), (R, \bar{F})^0(X')) = (R_-(X), R^-(X)) \quad (10)$$

^{*}) 陕西省自然科学基金项目: 直觉模糊粗糙集理论研究, 项目编号: 2006F18。王晶晶 博士研究生, 研究方向为防空作战智能决策研究; 史开泉教授, 博导, 主要研究方向为模糊系统、系统安全、粗系统理论与应用; 雷英杰 教授, 博导, 主要研究方向为智能信息处理与智能决策等。

若 $F=\phi$, 则双向 S-粗集退化成单向 S-粗集对偶, 且

$$((R, F^*)_0(X^*), (R, F^*)^0(X^*)) = ((R, \bar{F})_0(X'), (R, \bar{F})^0(X')) \quad (11)$$

若 $\bar{F}=\phi$, 则双向 S-粗集退化成单向 S-粗集, 且

$$((R, F^*)_0(X^*), (R, F^*)^0(X^*)) = ((R, F)_0(X^0), (R, F)^0(X^0)) \quad (12)$$

若 $F=\phi, \bar{F}=\phi$, 则双向 S-粗集退化成 Pawlak 粗集, 且

$$((R, F^*)_0(X^*), (R, F^*)^0(X^*)) = (R_-(X), R^-(X)) \quad (13)$$

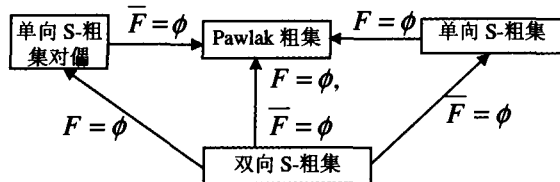


图1 S-粗集与 Pawlak 粗集关系图

4 函数 S-粗集的概念

约定: 设 D 是函数论域, $Q = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset D$ 是函数集, $u_1, u_2, \dots, u_m$ 为函数。若 $u(x) = u \subset Q$ 具有属性集 α , $[u]$ 表示 u 所在的 α -函数等价类。

定义 5^[3,4] 令 $Q^0 = Q \cup \{v | v \in D, v \in Q, f(v) = u \in Q\}$, 其中 $f \in F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, 且满足: $\exists v \in D, v \in Q \Rightarrow f(v) = u \in Q$, F 是 D 上的函数迁移族, f 是 D 上的函数迁移。

$$\text{令 } (R, F)_0(Q^0) = \bigcup [u] = \{u | u \in D, [u] \subseteq Q^0\} \quad (14)$$

$$(R, F)^0(Q^0) = \bigcup [u] = \{u | u \in D, [u] \cap Q^0 \neq \emptyset\} \quad (15)$$

这里称 $(R, F)_0(Q^0)$ 为 Q^0 的下近似, $(R, F)^0(Q^0)$ 为 Q^0 的上近似。称集合对 $((R, F)_0(Q^0), (R, F)^0(Q^0))$ 是 $Q^0 \subset D$ 的函数单向 S-粗集。

同样可以定义集合对 $((R, \bar{F})_0(Q'), (R, \bar{F})^0(Q'))$ 为函数单向 S-粗集 $((R, F)_0(Q^0), (R, F)^0(Q^0))$ 的对偶, 集合对 $((R, F^*)_0(Q^*), (R, F^*)^0(Q^*))$ 为 $Q^* \subset D$ 的函数双向 S-粗集^[3,4]。

5 函数 S-粗集与 S-粗集、Pawlak 粗集的关系

定理 2(函数 S-粗集与 S-粗集关系定理)^[3,4] 设 D 是函数论域, $[u] = \{u_i | i = 1, 2, \dots, m; u_i \text{ has the attribute set } \alpha\} \subset D$, $K = \{1, 2, \dots, n\}$ 是一个有序正数集, $\forall k \in K$, 对函数论域 D 中的函数进行离散生成, 得到元素论域 U , U 具有指标 k , ($k = 1, 2, \dots, n$), 则有:

① D 上的 α -函数等价类 $[u]$ 的 k 离散生成构成 U 上的 α -元素等价类 $[x]$, 即 $[u]_{k \in K} = [x]$, 这里 $[u]_{k \in K}$ 表示 $[u]$ 在 k 上的离散生成;

② D 中的函数 S-粗集退化成 U 中相应的 S-粗集, 即 $\forall k \in K$,

$$((R, F)_0(Q^0), (R, F)^0(Q^0))_{k \in K} = ((R, F)_0(X^0), (R, F)^0(X^0)) \quad (16)$$

$$((R, \bar{F})_0(Q'), (R, \bar{F})^0(Q'))_{k \in K} = ((R, \bar{F})_0(X'), (R, \bar{F})^0(X')) \quad (17)$$

$$((R, F^*)_0(Q^*), (R, F^*)^0(Q^*))_{k \in K} = ((R, F^*)_0(X^*), (R, F^*)^0(X^*)) \quad (18)$$

证明: 文[3]中给出了①的证明, 下面以单向 S-粗集为例对②进行证明。

$Q^0 \subset D$ 是函数单向 S-集合, $X^0 \subset U$ 是单向 S-集合, 由于 D 上的 α -函数等价类 $[u]$ 的 k 离散生成构成 U 上的 α -元素等价类 $[x]$, 即 $[u]_{k \in K} = [x]$, 则有: $\forall k \in K$,

$$(R, F)_0(Q^0) = \bigcup [u]_{k \in K} = \bigcup [x] = (R, F)_0(X^0)$$

$$(R, F)^0(Q^0) = \bigcup [u]_{k \in K} = [x] = (R, F)^0(X^0)$$

即得式(16), 函数单向 S-粗集 $Q^0 \subset D$ 退化成单向 S-粗集 $X^0 \subset U$ 。同理可得式(17)、式(18)。

定理 3(函数 S-粗集与 Pawlak 粗集关系定理) 若 $F = \phi, k \in K$, 则函数单向 S-粗集退化成 Pawlak 粗集, 且

$$((R, F)_0(Q^0), (R, F)^0(Q^0))_{k \in K} = ((R_-(X), R^-(X))) \quad (19)$$

若 $\bar{F} = \phi, k \in K$, 则函数单向 S-粗集对偶退化成 Pawlak 粗集, 且

$$((R, \bar{F})_0(Q'), (R, \bar{F})^0(Q'))_{k \in K} = (R_-(X), R^-(X)) \quad (20)$$

若 $F = \phi, \bar{F} = \phi, k \in K$, 则双向 S-粗集退化成 Pawlak 粗集, 且

$$((R, F^*)_0(Q^*), (R, F^*)^0(Q^*))_{k \in K} = (R_-(X), R^-(X)) \quad (21)$$

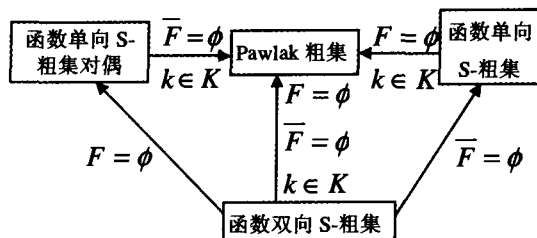


图2 函数 S-粗集与 Pawlak 粗集关系图

由此可见, 在集合的静态-动态、点-点构成线的双重框架下, Pawlak 粗集是 S-粗集的特例, S-粗集是函数 S-粗集的特例^[3]。

6 S-粗集理论的应用

S-粗集理论将粗集应用从数据挖掘推广到规律挖掘(将函数 S-粗集中的每个函数看成一个规律), 开辟了粗集应用的新领域: 金融系统、投资系统、战场态势评估系统等。

我们看一个实际系统: 在战场态势评估中, 已知每种武器平台的势函数为 $u_1, u_2, \dots, u_m$, 构成函数集合 $Q = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ 。在系统中存在这样的函数 $v \in Q$, v 在变换 $f \in F$ 的作用下, 变成 $f(v) = u \in Q$ 。这类现象多发生在新武器平台的出现或部署武器增加; 还存在这样的函数 $u \in Q$, u 在变换 $\bar{f} \in \bar{F}$ 的作用下, 变成 $\bar{f}(u) = v \in D$ 。这类现象多发生在武器平台遭到敌方攻击, 受损或撤退。前者使 $\text{card}([u])$ 增大, 战场态势提高; 后者使 $\text{card}([u])$ 减小, 战场态势降低。关于 S-粗集理论在战场态势评估中的应用作者将在以后的论文中进行详细讨论。

参考文献

- 1 Pawlak Z. Rough Sets [J]. International Journal of International Sciences, 1982(11): 341~356
- 2 史开泉, 崔玉泉. S-粗集和它的一般结构[J]. 山东大学学报(理学版), 2002, 37(6): 471~474
- 3 史开泉. 函数 S-粗集[J]. 山东大学学报(理学版), 2005(1)
- 4 SHI Kai-quan. Function S-Rough Sets and Function Transfer [J]. Advances in Systems Science and Applications, 2005, 5(1): 1~8