

基于信赖域方法的几何约束求解技术的研究^{*}

曹春红¹ 张 斌¹ 李文辉²

(东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110004)¹ (吉林大学计算机科学与技术学院 长春 130012)²

摘 要 几何约束求解问题是当前基于约束设计研究中的热点问题。一个约束描述了一个应该被满足的关系,一旦用户已经定义了一系列的关系,那么在修改参数之后,系统会自动选择合适的状态来满足约束。拟将信赖域方法引入到几何约束求解中。因为传统的 Newton 法在实际计算时对初始点要求比较严格,且每次都要计算导数,当导数值出现奇异状况或非常小时,使计算无法进行,且收敛性不能保证,因而使方法受到一定的限制。信赖域方法既具有 Newton 法的快速收敛性又有理想的总体收敛性,而且可以解决 Hessian 阵不正定和鞍点等困难。

关键词 几何约束求解,信赖域方法,Samaskii 技巧

The Research Based on the Trust Region Method Algorithm in the Geometric Constraint Solving

CAO Chun-Hong¹ ZHANG Bin¹ LI Wen-Hui²

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004)¹

(College of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun 130012)²

Abstract The geometric constraint solving is a popular problem in the current constraint design research. A constraint can describe a relation to be satisfied. Once the user defines a series of relations, the system will select a proper state to satisfy the constraints after the parameters are modified. We will introduce the trust region method in the geometric constraint solving. Because traditional Newton method is strict to the initial point in actual computation, and each time we must calculate derivative every time. When the derivative value has the strange condition or is very small, it will cause the computation to be unable to be carried on. And the constringency cannot be ensured, thus the method is to limited in a certain. The trust region method not only has the fast astringency of the Newton method but also has a perfect overall contringency, moreover it may solve the difficulties of Hessian matrix non-positive definite and saddle point.

Keywords Geometric constraint solving, Trust regoin method, Samaskii technique

1 引言

机械设计作为一门科学技术在人类长期的生产活动中推动了社会和经济的发展,但长期以来,机械产品的设计一直有人来完成从概念设计到详细设计的各个阶段的工作,其设计的周期长、设计的精确性和可靠性受到了很大的限制,影响了设计质量,很难达到最佳设计及优化设计。产品设计的质量一般只有到样机制造出来之前才能进行评估。为了克服这些缺点,引入了几何约束求解。几何约束求解问题是当前基于约束设计研究中的热点问题。一个约束描述了一个应该被满足的关系,一旦用户已经定义了一系列的关系,那么在修改参数之后,系统会自动选择合适的状态来满足约束,这种思想方法叫做基于约束的模型。系统解决约束的部分叫约束求解器。国内外很多学者运用数值计算理论、人工智能理论、图论、自由度分析理论等对约束求解进行了深入的研究,归纳起来主要有:整体求解法,稀疏矩阵法,连接分析法,规约构造法,约束传播法,符号代数法和辅助线法等^[1]。

拟将信赖域方法引入到几何约束求解中。因为传统的 Newton 法在实际计算时对初始点要求比较严格,且每次都要计算导数,当导数值出现奇异状况或非常小时,使计算无法进

行,且收敛性不能保证,因而使方法受到一定的限制。在具有线性搜索的 Newton 方法中,修改 Hessian 阵,以保证搜索方向的下降性,寻求在解的附近使算法具有整体收敛性,是很有意义的工作。信赖域方法既具有 Newton 法的快速收敛性又有理想的总体收敛性,而且可以解决 Hessian 阵不正定和 x_k 为鞍点等困难。

2 几何约束求解

从人工智能的角度来看^[2~5],设计问题本质上是一个约束满足问题,即给定功能、结构、材料和制造等诸多方面的要求描述,也就是设计约束,求得满足设计约束的设计对象的细节。传统的没有几何约束管理和求解技术支持的传统 CAD 系统,其设计模型只记录了产品的形位坐标信息,没有记录约束信息,亦即只保存了设计的最后结果,而将贯穿始终的设计约束信息丢弃,这样的 CAD 系统显然无法满足现代制造企业设计的需求。新一代 CAD 研究和开发,是基于几何和模型的。设计模型是几何模型和设计信息(特征和约束)的结合,可以更好、更完整的沟通设计意图。

在诸多设计约束中,几何约束最具有基础性,是表达其它设计约束的基础,是约束管理和求解技术中必须优先解决的

^{*} 本研究由国家自然科学基金项目资助(批准号:60573182)。曹春红 博士,讲师,CCF 会员,主要研究方向为计算机图形学,计算机辅助设计,计算机图像处理等。

问题。

几何约束是指几何约束系统中几何元素之间固有的约束关系,它直接反映了几何体的形状和位置关系。几何约束包括两种类型:结构约束和尺寸约束。结构约束是指几何元素之间的拓扑结构关系,描述了几何元素的空间相对位置和连接方式,其属性值在参数化过程中保持不变。尺寸约束则是通过图上的尺寸标注表示的约束,例如距离、角度等。工程图中的尺寸标注是几何体的一个直接和自然的描述者,所以提供了修改几何形体的最合适的方式。尺寸驱动的目的就是根据尺寸标注值的变化修改图形,并保持图形变化前后的拓扑结构关系不变。

常见的几何约束多为二元约束,特别是两两空间相互位置关系的约束,称为位置约束。有许多貌似一元约束的几何位置约束,也可以转化为二元几何约束。在工程实际应用中,几何约束通常作为工程概念描述譬如平行、同轴、相距、共面等,按照几何约束的代数表达,这些语义关系可以映射为一组独立的代数表达式。

约束问题可以形式化为 $(E, C)^{[6]}$,其中 $E=(e_1, e_2, \dots, e_n)$,表示几何元素,如点、线、圆等; $C=(c_1, c_2, \dots, c_m)$, c_i 表示加在这些几何元素之间的约束。一般一个约束对应一个代数方程,因此约束可以表示为

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)=0 \\ f_m(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$X=(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

x_i 为几何元素 e_i 的一些参数值,如二维点可以表示为 (x_1, x_2) 。约束求解就是求出 X 满足式(1)。

3 信赖域算法模型

求解式(1)的方法有多种,熟知以 Newton 法为代表的迭代法及其变形。求解式(1)时,一般都是采用线性搜索技术,寻找搜索方向 d_k 和步长因子 α_k ,使得目标函数值在每一步都有所下降,即满足 $\|F(x_k) + \alpha_k d_k\| < \|F(x_k)\|$ 。这种搜索技术,在实际计算时对初始点 x_0 要求比较严格,且每次都要计算 $F'(x)$,当导数值出现奇异状况或非常小时,使计算无法进行,且收敛性不能保证,因而使方法受到一定的限制。因此,在具有线性搜索的 Newton 方法中,修改 Hessian 阵,以保证搜索方向的下降性,寻求在解的附近使算法具有整体收敛性,是很有意义的工作。信赖域方法^[7]既具有 Newton 法的快速收敛性又有理想的总体收敛性,而且可以解决 Hessian 阵不正定和 x_k 为鞍点等困难^[8]。

用无约束优化方法求解式(1)时,通常将其转化为求极小问题

$$\min f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x) \quad (2)$$

信赖域方法的基本思想是:设 x_k 是当前迭代点,在以 x_k 为中心, δ_k 为半径的闭球(或取某矩形巨域)邻域内求解一子问题,要求试探步 d_k 在信赖域内,即在每次迭代时有一正数 δ_k ,且要求试探步满足 $\|d_k\| < \delta_k$,用一评价函数决定该 d_k 是否被接受,若被接受,则令 $x_{k+1} = x_k + d_k$;否则令 $x_{k+1} = x_k$ 。如果试探成功,信赖域的半径保持不变或扩大,否则缩小半径。信赖域方法的模型问题是

$$\min s. t. \|s\| \leq h_k \quad q^{(k)}(s) = f(x_k) + g_k^T s + 1/2 s^T G_k \quad (3)$$

而式(3)可以通过求解

$$(G_k + \mu_k I)s = -g_k \quad (4)$$

来表征,其中:二次模型 $q^{(k)}(s)$ 是在 x_k 处对目标函数 $f(x)$ 的一个合适模拟, g_k, G_k 是目标函数 $f(x)$ 在 x_k 处的梯度和 Hessian 阵 μ_k 是一非负数。令

$$R(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, g(x) = R(x)^T F(x) \quad (5)$$

本文将上述信赖域方法用于求解非线性方程组问题,在保持信赖域方法总体收敛的前提下和在具体求解过程中,用目标函数及其一阶导数 A 的信息,构造 Hessian 阵 G_k 的近似序列 B_k ,通过 BFGS 校正公式产生目标函数的曲率近似,不仅保持了矩阵序列的正定性,克服了数值上的奇异性,而且方法具有下降性及收敛速度快等优点,其中, g 和 f 的定义见式(5),式(2),所用的 BFGS 校正方法如下

$$B_{k+1}^{BFGS} = B_k + \frac{g_k^T + g_k}{g_k^T d_k} + \frac{y_k^T y_k}{\alpha_k y_k^T y_k} \quad (6)$$

其中: $s_k = x_{k+1} - x_k, y_k = g_{k+1} - g_k$

$$g_k = g(x_k), g_{k+1} = g(x_{k+1}) \quad (7)$$

对于搜索步长因子 α_k 的确定,为克服在接近极小点时有可能出现迂回现象及步长因子较小的情形,应用交替方向法,记 $\alpha_k = (-g_k, s_k) / (\| -g_k \| \| s_k \|)$,若 $\alpha_k < \sqrt{2}/2$ 时,搜索方向取原拟牛顿方向 s_k ,否则,搜索方向取最速下降方向 $-g_k$ 。同时,为了提高算法的效率,还可在每一迭代步中使用 Samarskii 技巧^[9]。

4 算法实现步骤

Step0 给出初始点 $x_1 \in R^n, \epsilon \geq 0, h_1 = \|g_1\|^2, B_1 = I \in R^{n \times n}$,其中 g 定义如前面所述,置 $k:=0$ (以下用 B_k 近似目标函数中的 G_k);

Step1 分别按式(5,6),计算 g_k, B_k ,若 $\|g_k\| < \epsilon$,则停止;

Step2 分解 $B_k + \mu_k I$,若不正定,令 $\mu_k = 4\mu_k$,重复判断 $B_k + \mu_k I$ 直到正定;

Step3 求解式(4),得 s_k ,并计算 r_k ,同时用改进的黄金分割法计算步长因子 α_k 。

若 $r_k > 0$,计算 $\alpha_k = (-g_k, s_k) / (\| -g_k \| \| s_k \|)$,

if $\alpha_k < \sqrt{2}/2$,令 $d_k = \alpha_k s_k$

else 令 $d_k = \alpha_k (-g_k), x_{k+1} = x_k + d_k, x_{k,0} = x_k + d_k,$

$x_{k,i} = x_{k,i-1} + [F'(x_k)]^{-1} F(x_{k,i-1}), i=1, \dots, m, k=0, 1, \dots$

$x_{k+1} = x_{k,m}$;

Step4 若 $r_k \geq 0.25, \mu_k = 4\mu_k, h_k = h_k$,转 Step5, $h_k = 0.5h_k$,转 Step6;

Step5 $r_k \leq 0.75$ 且 $\|h_k\| = \|s_k\|, \mu_k = \mu_k$,转 Step6; $h_k = 2h_k$;

Step6 $h_k = h_k$,由式(2)和式(5)计算 $B_k, k=k+1$,转 Step2。否则 $x_{k+1} = x_k$ 。

5 实验结果及其分析

图1和图2中,(a)是设计的原图,(b)都是有部分尺寸或者角度有了变化后用信赖域算法得到的新的图形。从图1和图2我们可看出,在用户定了约束关系后,系统在参数修改之后可以自动地满足约束条件。

(下转第221页)

- 5 Yamakawa T. High speed fuzzy controller hardware system]. The Mega FIPS Machine. Elsevier; SciencePub. CompInc,1988
- 6 Surmann H, Ungerling A, Goser K. Optimized fuzzy controller architecture for field programmable gate arrays. in Lecture Notes on Computer Science Nr. 705. Berlin; SpringerVerlag,1993
- 7 Amara J F M. Towards Evolvable Analog Fuzzy Logic Controllers. 2003 NASA/DOD Conference on Evolvable Hardware (EH'03),2003. 101
- 8 潘承志,靳东明. 可编程模糊逻辑控制器芯片的应用研究. 微电子学,2001,31(1):70~73
- 9 沈杰,靳东明,李志坚. 可编程模糊逻辑控制器芯片的设计. 电子学报,1999,27(8):23~25
- 10 Herrera F, Lozano M, Verdegay J L. A Learning Process for Fuzzy Control Rules using Genetic Algorithms. Fuzzy Sets and Systems,1998,100:143~158
- 11 Cordon O, Gomide F, Herrera F, et al. Ten years of genetic fuzzy systems; current framework and new trends. Fuzzy Sets and Systems, Elsevier, 2004, 141, 5~31

(上接第 209 页)

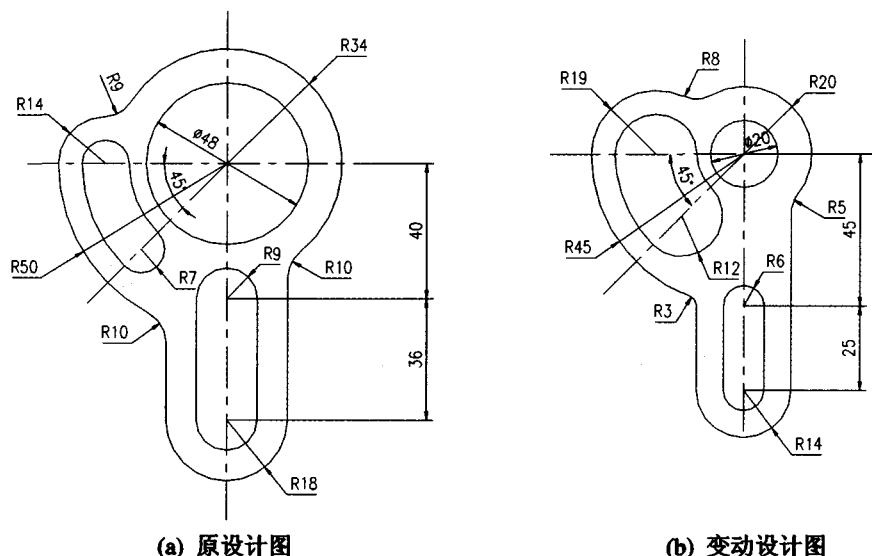


图 1

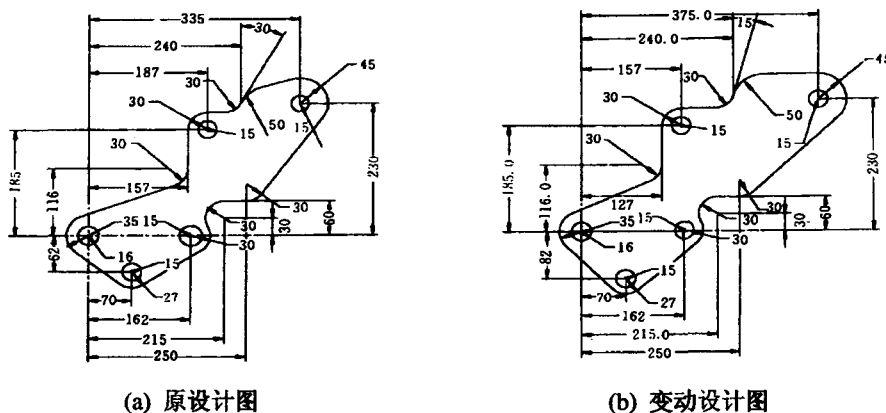


图 2

表 1 Newton 法和信赖域方法求解几何约束问题的比较

问题	最终解的平均误差		平均执行时间(s)	
	Newton 法	信赖域法	Newton 法	信赖域法
图 1	5.05	2.44	24.4	10.8
图 2	7.55	4.78	50.8	31.8

由表 1 可以看出,信赖域方法在最终解的平均误差和平均执行时间上都优于经典的求解几何约束问题的 Newton 法。

参考文献

- 1 袁波. 几何约束求解技术研究[博士学位论文]. 北京:清华大学, 1999
- 2 傅京孙,等. 智能及其应用. 北京:清华大学出版社,1987
- 3 周济,查建中,肖人彬. 智能设计. 北京:高等教育出版社,1998
- 4 Arab F. A Paradigm for Intelligent CAD, Intelligence CAD System I: Theoretical and Methodological Aspects. In: Akman Y, Ten Hagen P. J. W, eds. Intelligent CAD System II: Implement issues. 1989
- 5 Arab F. Examples of Geometric reasoning in OAR, Intelligent CAD System II: Implement issues. In: Akman, Y, Ten Hagen P J W, eds. 1989
- 6 刘生礼,唐敏,董金祥. 两种空间约束求解算法. 计算机辅助设计与图形学报,2003,15(8):1011~1029
- 7 薛西峰,邢志栋,孟红云. 求解非线性方程组的信赖域方法. 西北大学学报(自然科学版),2001,31(4)
- 8 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社,1997
- 9 李庆扬,莫汝中,祁力君,等. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京:科学出版社,1997