# 基于 k 阶秩函数的线性赋值循环程序的终止性分析

李 轶[1,2] 蔡天训[1,2] 吴文渊[2]
(重庆邮电大学计算机科学与技术学院 重庆 400065)[1]
(中国科学院重庆绿色智能技术研究院自动推理与认知重庆市重点实验室 重庆 400714)[2]

**摘 要** 循环程序的终止性是确保循环程序完全正确的必要条件。如果给定的线性赋值循环程序不存在传统定义的线性秩函数,那么基于传统定义的秩函数终止性证明方法将失效。基于 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$ 的精确计算,对传统的秩函数概念进行了扩展,提出了 k 阶秩函数的概念。使用 RegularChains 软件包给出了合成 k 阶秩函数的具体方法。实验结果表明,相比于传统定义的线性秩函数,k 阶秩函数的适应范围更广。对于不能用传统定义的秩函数证明其终止性的部分循环程序,可以基于 k 阶秩函数来证明,从而体现了所提方法的优越性。

**关键词** 线性循环程序,终止性分析,k 阶秩函数,RegularChains
**中图法分类号** TP311.5 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.06.026

## Termination Analysis of Linear Assignment Loop Program Based on k-ranking Functions

LI Yi[1,2] CAI Tian-xun[1,2] WU Wen-yuan[2]
(College of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)[1]
(Chongqing Key Laboratory of Automated Reasoning and Cognition, Chongqing Institute of Green and Intelligent Technology, Chinese Academy of Sciences, Chongqing 400714, China)[2]

**Abstract** The termination of loop programs plays an important role in program analysis. This paper focused on the termination of linear assignment loop programs which have no traditional linear ranking functions. Based on the precise computation of $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$, this paper expanded the concept of traditionally defined raking functions, gave a definition of k-ranking functions and proved the existence of k-ranking functions. All the computations on the synthesis of k-ranking functions were done by Regularchains, a symbolic computation tool in Maple. Experimental results show that some linear loop programs which have no traditional linear ranking functions indeed can be proven to be terminating by the proposed method.

**Keywords** Linear loop programs, Termination analysis, k-ranking functions, RegularChains

## 1 引言

循环程序的终止性分析是程序验证的重要组成部分,确保循环程序的终止是循环程序完全正确验证的必要条件。目前,合成秩函数的方法是用于证明程序终止性的主流方法。秩函数是一个关于循环变量的函数,其值域是一个良基集,它的函数值随着循环体的执行持续减小,其形式可以是线性函数也可以是非线性函数。Colón 等[1]首先将线性秩函数引入到循环程序的终止性证明中,之后他们基于凸多面体的理论给出了一种合成线性秩函数的方法[2]。Podelski 等[3]于 2004 年针对线性约束的单路径循环程序,给出了一种完备的方法来构造线性秩函数。Chen 等[4]于 2007 年提出了通过半代数系统求解来合成非线性秩函数的方法,首先设定非线性的秩函数模板,然后利用工具 DISCOVERER 和 QEPCAD 来求解模板中的参数。Heizmann 等[5]于 2013 年针对线性 Lasso 程序提出了通过合成线性不变式和线性秩函数来证明程序终止的方法。Bagnara 等[6]于 2013 年提出了最终的线性秩函数(Eventual Ranking Functions)的概念,通过一个单调增函数对单分支线性约束循环程序的状态空间进行划分后,再利用 Farkas 定理合成最终的秩函数。Li 等[7]于 2016 年推广了 Bagnara 等的工作,提出了 L 重的最终线性秩函数的概念。Leike 等[8]于 2014 年提出设定线性秩函数模板,然后利用 Motzkin 转换定理对原有系统化简,以便计算模板中的参数。Ben-Amram 等[9]于 2013 年研究了整数线性约束循环的秩函数是否存在的问题,分析了当变量 $\boldsymbol{x}$ 取值为整数集合时线性秩函数的复杂度问题,并给出了一种完备算法来求解线性秩函数,同时他们还实现了一个自动合成线性秩函数和字典序秩函数的在线工具 loopkiller。

理论上,程序的终止性问题早已被证明是不可判定性的,即不存在一种通用的方法来证明任给程序的终止性[10]。

到稿日期:2017-04-26 返修日期:2017-06-07 本文受国家自然科学基金(61572024,61103110,11471307)资助。
**李 轶**(1980－),男,博士,副研究员,CCF 会员,主要研究方向为程序验证、符号计算,E-mail:zm_liyi@163.com(通信作者);**蔡天训**(1993－),男,硕士生,主要研究方向为程序验证;**吴文渊**(1974－),男,博士,研究员,主要研究方向为同伦计算、微分方程等。

但经研究发现，具有某些特征的循环程序的终止性是可以判定的。例如，Tiwari[10]证明了一类线性循环程序在实域上的终止性是可判定的；Braverman[11]研究了确定性赋值的线性循环程序，得出了当赋值语句是齐次赋值时，该类循环程序的终止性在整数域上是可判定的，而在一般情况下，其终止性在有理数域上是可判定的；Xia等[12]研究了具有多项式约束和线性赋值语句的循环程序的终止性，给出了$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的计算方法，并将其代入到循环程序约束条件中，从而判断循环程序的终止性；Li[13]研究了一类单分支多项式循环程序的终止性，该类循环程序的循环条件所围成的区域是有一个有界闭连通域，他们进一步研究了一类循环条件所围成的区域是有界闭连通域，他们进一步利用凸集与点的分离定理将秩函数的合成转化为计算状态空间上的不动点。

秩函数因为适用性强而被广泛研究。但是，传统定义的秩函数要求循环的每次迭代都使得函数值减小，这种较强的约束往往使得模板参数无解，这严重限制了合成秩函数在证明循环程序终止方面的应用。因此，本文将传统秩函数的概念进行了推广，提出了k阶秩函数的概念，并通过合成k阶秩函数来证明循环程序的终止性。实验表明，对于某些没有传统线性秩函数的线性赋值循环程序，本文方法可以找到其k阶线性秩函数。本文方法依赖于$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的精确计算，即首先求得$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的精确计算表达式，然后利用循环程序状态空间与k阶秩函数的参数空间之间的关系，借助RegularChains[14]等计算工具来合成循环程序的k阶秩函数，并以此来证明循环程序的可终止性。

本文关注具有如下特征的线性赋值循环程序：

$P$：while $(\vee_i(\wedge_j P_{ij}(\boldsymbol{x})\rhd 0))$

$\{\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\}$

其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^N$，$\vee_i(\wedge_j P_{ij}(\boldsymbol{x})\rhd 0)$表示循环条件，$P_{ij}(\boldsymbol{x})$表示关于$\boldsymbol{x}$的多项式向量，$\rhd\in\{\geqslant,>\}$。$\boldsymbol{A}$是赋值矩阵。设$\xi_1,\cdots,\xi_k$为$\boldsymbol{A}$的$k$个互不相同的非零特征值，根据复数的三角表达式有$\xi_k=\widetilde{r}_k\cdot \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_k\cdot 2\pi \mathrm{i}}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。本文仅讨论$\widetilde{\alpha}_1,\cdots,\widetilde{\alpha}_k$均为有理数且$\widetilde{r}_k\geqslant 1$的情形。令$\Omega=\{\boldsymbol{x}\mid\vee_i(\wedge_j P_{ij}(\boldsymbol{x})\rhd 0)\}$是满足循环条件的程序变量的状态空间。循环程序$P$是不可终止的，如果存在$\boldsymbol{x}\in\Omega$，使得对于$\forall n\geqslant 0$，都有$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}\in\Omega$，则称$\boldsymbol{x}$为循环程序$P$的不可终止点；如果不存在$\boldsymbol{x}\in\Omega$，则称程序$P$是可终止的。

## 2 k阶秩函数

**定义1**(单分支线性赋值循环程序的传统秩函数) 给定上文定义的程序$P$，如果函数$\rho(\boldsymbol{x})$满足以下公式：

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}\in\Omega\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0\wedge\rho(\boldsymbol{x})-\rho(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\geqslant 1)\qquad(1)$$

那么称$\rho(\boldsymbol{x})$是线性赋值循环程序$P$的秩函数。

众所周知，如果线性赋值循环程序$P$存在上文定义的秩函数$\rho(\boldsymbol{x})$，那么循环程序$P$是终止的。但是，并非每一个终止的循环程序都有线性秩函数。

例1 给定单分支线性循环程序$P_1$

$P_1$：while$(x\geqslant 1\wedge -x+y\geqslant 0)$ do $\{\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\}$

其中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$。

设$P_1$具有形如$\rho(\boldsymbol{x})=ax+by+c$的线性秩函数，那么根据式(1)，有：

$$\exists a,b,c,\forall x,y:\{x\geqslant 1\wedge -x+y\geqslant 0\}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}ax+by+c\geqslant 0\\ax+by+c\geqslant a\cdot 3x+b\cdot 2y+c+1\end{cases}$$

本文利用符号计算软件MAPLE中的RegularChains软件包进行量词消去，结果返回false，即说明循环程序$P_1$没有线性秩函数。当然，可以进一步设定非线性多项式秩函数模板，但非线性项的引入将增加计算的复杂度，容易导致现有工具均无法计算出模板中的参数。接着，我们提出k阶秩函数概念，并证明若给定循环程序具有k阶秩函数，那么该循环程序一定是终止的。此外，针对例1中的循环程序$P_1$，我们将在例4中计算得到它的一个k阶线性秩函数。

**定义2**(单分支线性赋值循环程序的k阶秩函数) 给定上文定义的程序$P$，如果函数$\rho(\boldsymbol{x})$满足以下公式：

$$\forall \boldsymbol{x},\exists k_{\boldsymbol{x}}\in\mathrm{Z}^+(\boldsymbol{x}\in\Omega\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0\wedge\rho(\boldsymbol{x})-\rho(\boldsymbol{A}^{k_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{x})\geqslant 1)\qquad(2)$$

那么称$\rho(\boldsymbol{x})$是线性赋值循环程序$P$的k阶秩函数。其中，$\mathrm{Z}^+$是正整数集合。

**定理1**(单分支线性赋值循环程序终止的充分条件) 给定上文定义的循环程序$P$，如果$P$存在一个k阶秩函数，那么$P$是终止的。

证明：假设线性赋值循环程序$P$不可终止，即存在一个无穷迭代序列$L=\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\cdots\}=\{\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{x}_0\}_{i=0}^{+\infty}\subseteq\Omega$。由题设可知，既然程序$P$存在k阶秩函数，那么根据定义2中的式(2)，有$\forall\boldsymbol{x}_i\in L\subseteq\Omega$，且都存在$k_{\boldsymbol{x}_i}\in\mathrm{Z}^+$，使得$\rho(\boldsymbol{x}_i)-\rho(\boldsymbol{x}_{i+k_{\boldsymbol{x}_i}})\geqslant 1$，$\boldsymbol{x}_{i+k_{\boldsymbol{x}_i}}=\boldsymbol{A}^{k_{\boldsymbol{x}_i}+i}\cdot\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^{k_{\boldsymbol{x}_i}}\boldsymbol{x}_i$。因此，既然$\boldsymbol{x}_0\in L\subseteq\Omega$，则必$\exists\mu_0\in\mathrm{Z}^+$，使得$\rho(\boldsymbol{x}_0)-\rho(\boldsymbol{A}^{\mu_0}\cdot\boldsymbol{x}_0)\geqslant 1$，不妨记$\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{A}^{\mu_0}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_{\mu_0}$，则有$\rho(\boldsymbol{y}_0)-\rho(\boldsymbol{y}_1)\geqslant 1$。由$L$的构造可知，$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_{\mu_0}=\boldsymbol{A}^{\mu_0}$，$\boldsymbol{x}_0\in L\subseteq\Omega$。因此，既然$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_{\mu_0}=\boldsymbol{A}^{\mu_0}\boldsymbol{x}_0\in\Omega$，又根据式(2)，则必$\exists\mu_1\in\mathrm{Z}^+$，使得$\rho(\boldsymbol{x}_{\mu_0})-\rho(\boldsymbol{A}^{\mu_1}\cdot\boldsymbol{x}_{\mu_0})\geqslant 1$，不妨记$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{A}^{\mu_1}\boldsymbol{x}_{\mu_0}=\boldsymbol{A}^{\mu_1}\boldsymbol{A}^{\mu_0}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^{(\mu_1+\mu_0)}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_{\mu_1+\mu_0}$，则有$\rho(\boldsymbol{y}_1)-\rho(\boldsymbol{y}_2)\geqslant 1$。由$L$的构造可知，$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_{\mu_1+\mu_0}\in\{\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{x}_0\}_{i=0}^{+\infty}=L\subseteq\Omega$。以此类推，既然$L$是$\Omega$中的无穷迭代序列，则可用如上方式从$L$中挑选出一个无穷序列：$\{\boldsymbol{y}_i\}_{i=1}^{+\infty}\subseteq\Omega$，$\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{x}_{\mu_{i-1}+\cdots+\mu_1+\mu_0}=\boldsymbol{A}^{\mu_{i-1}+\cdots+\mu_1+\mu_0}\boldsymbol{x}_0\in L\subseteq\Omega$，且该序列$\{\boldsymbol{y}_i\}_{i=1}^{+\infty}\subseteq\Omega$满足性质$\rho(\boldsymbol{y}_i)-\rho(\boldsymbol{y}_{i+1})\geqslant 1$，即：

$$\rho(\boldsymbol{y}_1)-\rho(\boldsymbol{y}_2)\geqslant 1$$
$$\rho(\boldsymbol{y}_2)-\rho(\boldsymbol{y}_3)\geqslant 1$$
$$\vdots$$
$$\rho(\boldsymbol{y}_n)-\rho(\boldsymbol{y}_{n+1})\geqslant 1$$

将上式累加，得$\rho(\boldsymbol{y}_1)-\rho(\boldsymbol{y}_{n+1})\geqslant n$，即$\rho(\boldsymbol{y}_1)-n\geqslant\rho(\boldsymbol{y}_{n+1})$。因为$\lim\limits_{n\to\infty}(\rho(\boldsymbol{y}_1)-n)=-\infty$，所以$\exists N\in\mathrm{Z}^+$，有：$\rho(\boldsymbol{y}_{N+1})\leqslant\rho(\boldsymbol{y}_1)-N<0$。这显然与$\rho(\boldsymbol{y}_i)\geqslant 0(i=1,2,\cdots)$相矛盾(这是因为$\rho(\boldsymbol{x})$是程序$P$的k阶秩函数，由定义2可知，对$\forall\boldsymbol{x}\in\Omega$，有$\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，同时，既然$\{\boldsymbol{y}_i\}_{i=1}^{+\infty}\subseteq\Omega$，则$\rho(\boldsymbol{y}_i)\geqslant 0$)。

**定理2** 如果一个线性赋值循环程序$P$存在传统的秩函数，那么该循环程序$P$也一定存在k阶秩函数。

证明：对比式(1)和式(2)可知，在式(2)中若令$k_{\boldsymbol{x}}\equiv 1$，

那么式(2)就变成了式(1)。即传统的秩函数只是k阶秩函数在$k_x \equiv 1$下的特殊情况。

## 3　k阶秩函数的合成算法

本节将给出k阶秩函数的合成算法,该算法依赖于$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的精确计算表达式。$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的精确计算已经由Xia等人于2010年给出,但是他们给出的方法只适用于循环条件是不等式合取式时的循环程序,而本文方法在某些循环条件是不等式析取式的情况下也可适用。下面将首先简要介绍$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的计算过程,然后给出如何利用$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的精确计算表达式来合成k阶秩函数。

### 3.1　$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的精确计算

在复数域$\mathbb{C}$中,当$\boldsymbol{A}$是Jordan标准型时,$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的每一个分量都可以通过$x_1,x_2,\cdots,x_N,n$和$\boldsymbol{A}$的复特征值$\xi_i$来表示。当$\boldsymbol{A}$是一般形式时,命题1给出了$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的每一个分量的精确表达式。

**命题1**[12]($\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的精确计算)　设$\boldsymbol{A}$是一个$d\times d$的方阵,且它的每一个元素都是有理数。$\boldsymbol{A}$的特征多项式$D(x)=x^d+\alpha_1 x^{d-1}+\cdots+\alpha_{d-u}x^{d-u}$,其中$u\geqslant 0,\alpha_{d-u}\neq 0$。定义$F(\boldsymbol{x},n)=\boldsymbol{A}^{n+u}\boldsymbol{x}$,$F_j(\boldsymbol{x},n)$表示$F(\boldsymbol{x},n)$的第$j$个分量,其中$1\leqslant j\leqslant N$,那么对于任意的$j$,$F_j(\boldsymbol{x},n)$可以表示为如下形式[12]:

$$F_j(\boldsymbol{x},n)=\sum_{i=1}^{k}f_{ji}(\boldsymbol{x},n)\xi_i^n \tag{3}$$

其中,$\xi_1,\cdots,\xi_k$是赋值矩阵$\boldsymbol{A}$的$k$个互不相同的非零复特征值,$f_{ji}(\boldsymbol{x},n)$是关于$n$的多项式,其次数小于对应的复特征值$\xi_i$的代数重数。

根据命题1,按照如下步骤将$\boldsymbol{A}^{n+u}\boldsymbol{x}$的通项表达式写为式(3)的形式。首先,计算$\boldsymbol{A}$的所有复特征值以及相应的重数;其次,将$F(\boldsymbol{x},n)$的每一个分量$F_j(\boldsymbol{x},n)$写为式(3)的形式,其中$f_{ji}$的系数待定;然后,计算$F(\boldsymbol{x},1),\cdots,F(\boldsymbol{x},d)$,并将系数与$F_j(\boldsymbol{x},i)(1\leqslant i\leqslant d)$中的系数进行对比,得到一组线性方程;最后,求解这一组方程,即可得出$F_j(\boldsymbol{x},n)$和$F(\boldsymbol{x},n)$的表达式。下面通过一个例子来阐述$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的计算过程。

例2　给定单分支线性循环程序$P_2$

$P_2$:while$(x_1\geqslant 0\wedge x_3=1)$ do $\{\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\}$

其中,$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

$\boldsymbol{A}$的特征值是$1,1,-1$。令$F(\boldsymbol{x},n)=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=[F_1(\boldsymbol{x},n),F_2(\boldsymbol{x},n),F_3(\boldsymbol{x},n)]^{\mathrm{T}}$。因为$\xi_1=1$的代数重数是2,$\xi_2=-1$的重数是1,所以设

$$\begin{aligned}F_1(\boldsymbol{x},n)=&((a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+(c_{11}x_1+c_{12}x_2+\\&c_{13}x_3)\cdot n)\xi_1^n+(b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3)\xi_2^n\\F_2(\boldsymbol{x},n)=&((a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)+(c_{21}x_1+c_{22}x_2+\\&c_{23}x_3)\cdot n)\xi_1^n+(b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3)\xi_2^n\\F_3(\boldsymbol{x},n)=&((a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)+(c_{31}x_1+c_{32}x_2+\\&c_{33}x_3)\cdot n)\xi_1^n+(b_{31}x_1+b_{32}x_2+b_{33}x_3)\xi_2^n\end{aligned}$$

其中,$a_{ij},b_{ij},c_{ij}$均为参数。令$F(\boldsymbol{x},1),F(\boldsymbol{x},2),F(\boldsymbol{x},3)$分别等于$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}$,从而建立关于$a_{ij},b_{ij},c_{ij}$的线性方程组。通过求解这个线性方程组,可得:

$$\begin{aligned}&F_1(\boldsymbol{x},n)=x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{2}x_3n+(-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{4}x_3)\\&\quad(-1)^n\\&F_2(\boldsymbol{x},n)=-\frac{1}{2}x_3+(x_2+\frac{1}{2}x_3)(-1)^n\\&F_3(\boldsymbol{x},n)=x_3\end{aligned}$$

下面将利用$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$的精确表达式来合成循环程序$P$的k阶秩函数。

### 3.2　k阶秩函数的计算

对于给定的循环程序$P$,设定其k阶秩函数模板为$\rho(\boldsymbol{x})=\sum_{\alpha}c_\alpha\boldsymbol{x}^\alpha\in\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$,其中$c_\alpha$是单项式$\boldsymbol{x}^\alpha$的系数,在模板中,$c_\alpha$是未知参数,$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_N)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{x}^\alpha=x_1^{a_1}x_2^{a_2},\cdots,x_N^{a_N}$,$\rho(A^nx)=\rho(F(\boldsymbol{x},n))=\sum_{\alpha}c_\alpha F^\alpha(\boldsymbol{x},n)$,令:

$$\begin{aligned}q(\boldsymbol{x},n)&=\rho(\boldsymbol{x})-\rho(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x})=\sum_{\alpha}c_\alpha(\boldsymbol{x}^\alpha-F^\alpha(\boldsymbol{x},n))\\&=q_0(\boldsymbol{x},n)+q_1(\boldsymbol{x},n)\eta_1^n+\cdots+q_m(\boldsymbol{x},n)\eta_m^n\end{aligned}$$

其中,$q_i(\boldsymbol{x},n)=\sum_{j=0}^{d_i}c_{ij}(\boldsymbol{x})\cdot n^j$,$\eta_k$是$\boldsymbol{A}$的某些特征值$\xi_i$的乘积。既然$\rho(\boldsymbol{x})$被设定为程序$P$的k阶秩函数模板,则$\rho(\boldsymbol{x})$应满足式(2),因此有:

$$\forall\boldsymbol{x},\exists n:(\boldsymbol{x}\in\Omega)\Rightarrow\begin{cases}\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0\\ n\in\mathbb{Z}^+\wedge q(\boldsymbol{x},n)\geqslant 1\end{cases} \tag{4}$$

式(4)成立等价于式(5)和式(6)同时成立:

$$\forall\boldsymbol{x}:(\boldsymbol{x}\in\Omega)\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0 \tag{5}$$

$$\forall\boldsymbol{x},\exists n:(\boldsymbol{x}\in\Omega)\Rightarrow n\in\mathbb{Z}^+\wedge q(\boldsymbol{x},n)\geqslant 1 \tag{6}$$

针对式(5),利用RegularChains可以直接消去$\boldsymbol{x}$,得到参数$c_\alpha$的约束条件。针对式(6),由于$\eta_k$是$\boldsymbol{A}$的某些特征值$\xi_i$的乘积,因此根据复数的三角表达式,令$\eta_k=r_k\mathrm{e}^{\alpha_k\cdot 2\pi\mathrm{i}}$,其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,$r_k$是$\eta_k$的模。由于$\eta_k$是$\boldsymbol{A}$的某些特征值$\xi_k=\tilde{r}_k\cdot\tilde{\mathrm{e}}^{\alpha_k\cdot 2\pi\mathrm{i}}$的乘积,而且此前已假设$\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_k$均为有理数,因此$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$也均为有理数;同时因为$\tilde{r}_k\geqslant 1$,所以$r_k\geqslant 1$。令$\eta_0=r_0=1$,则$q(\boldsymbol{x},n)=q_0(\boldsymbol{x},n)r_0^n+\cdots+q_m(\boldsymbol{x},n)\cdot\mathrm{e}^{n\alpha_m\cdot 2\pi\mathrm{i}}r_m^n$。其中,$q_i(\boldsymbol{x},n)$可以写为关于$n$的多项式,即$q_i(\boldsymbol{x},n)=\sum_{j=0}^{d_i}c_{ij}(\boldsymbol{x})\cdot n^j$。由于$\alpha_k$均为有理数,因此随着$n\to+\infty$,$\mathrm{e}^{n\alpha_1\cdot 2\pi\mathrm{i}},\cdots,\mathrm{e}^{n\alpha_m\cdot 2\pi i}$将呈现周期变化,即$\mathrm{e}^{\alpha_1\cdot 2\pi\mathrm{i}},\cdots,\mathrm{e}^{\alpha_m\cdot 2\pi\mathrm{i}}$具有公共周期$T$。例如,$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}}$和$\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\cdot 2\pi\mathrm{i}}$有公共周期$T=6$,因此可得$\mathrm{e}^{(Tn+t)\alpha_q\cdot 2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{t\alpha_q\cdot 2\pi\mathrm{i}}$。当$1\leqslant t\leqslant T$时,有

$$\begin{aligned}&\{\forall\boldsymbol{x},\exists n:(\boldsymbol{x}\in\Omega)\Rightarrow n\in\mathbb{Z}^+\wedge q(\boldsymbol{x},n)\geqslant 1\}\\&\Leftrightarrow\{\forall\boldsymbol{x},\exists n:(\boldsymbol{x}\in\Omega)\Rightarrow\bigvee_{t=1}^{T}(n\in\mathbb{N}\wedge q(\boldsymbol{x},Tn+t)\geqslant 1)\}\end{aligned}$$

其中,$\mathbb{Z}^+$表示正整数集合,$\mathbb{N}$表示自然数集合。令$G_t(\boldsymbol{x},n)\triangleq q(\boldsymbol{x},Tn+t)$,$C_{tkl}(\boldsymbol{x})$代表项$n^lr_k^n$的系数。显然,$C_{tkl}(\boldsymbol{x})$可被看作是关于$\boldsymbol{x}$的多项式且关于$\boldsymbol{x}$的各项系数是关于$c_\alpha$的多项式,则$G_t(\boldsymbol{x},n)$可以被重新写为如下形式:

$$\begin{aligned}G_t(\boldsymbol{x},n)=&C_{t00}(\boldsymbol{x})r_0^n+C_{t01}(\boldsymbol{x})nr_0^n+\cdots+C_{t0d_0}(\boldsymbol{x})n^{d_0}r_0^n+\\&\cdots+C_{tm0}(\boldsymbol{x})r_m^n+C_{tm1}(\boldsymbol{x})nr_m^n+\cdots+C_{tmd_m}(\boldsymbol{x})\\&n^{d_m}r_m^n\end{aligned} \tag{7}$$

**定义3**　若当$r_i<r_j$或者$r_i=r_j$且$l_1<l_2$时,有$\lim\limits_{n\to\alpha}\frac{n^{l_1}r_i^n}{n^{l_2}r_j^n}=0$,则称$n^{l_2}r_j^n$的增长速度比$n^{l_1}r_i^n$的增长速度快,记作$n^{l_2}r_j^n\succ n^{l_1}r_i^n$。

将式(7)中的各项按照 $n^l r_k^n$ 的增长速度递减排列，如式(8)所示：

$$\begin{aligned}G_t(\boldsymbol{x},n)=&C_{tk_1d_{k_1}}(\boldsymbol{x})n^{d_{k_1}}r_{k_1}^n+\cdots+C_{tk_11}(\boldsymbol{x})nr_{k_1}^n+\\&C_{tk_10}(\boldsymbol{x})r_{k_1}^n+\cdots+C_{tk_md_{k_m}}(\boldsymbol{x})n^{d_{k_m}}r_{k_m}^n+\cdots+\\&C_{tk_m1}(\boldsymbol{x})nr_{k_m}^n+C_{tk_m0}(\boldsymbol{x})r_{k_m}^n\end{aligned}\tag{8}$$

其中，$r_{k_1}>r_{k_2}>\cdots>r_{k_m}=r_0=1$。

下面将分析：当 $\boldsymbol{x}$ 在某个取值范围取值时，必然存在某个 $n$，使得 $G_t(\boldsymbol{x},n)\geqslant1$。本文对 $G_t(\boldsymbol{x},n)$ 中当前变化速度最快的项的系数的符号进行分析。

当 $C_{tk_1d_{k_1}}(\boldsymbol{x})>0$ 时，由于 $n^{d_{k_1}}r_{k_1}^n$ 在 $G_t(\boldsymbol{x},n)$ 中的变化速度最快，因此随着 $n$ 的增大，$G_t(\boldsymbol{x},n)$ 的值将由项 $C_{tk_1d_{k_1}}(\boldsymbol{x})n^{d_{k_1}}r_{k_1}^n$ 所主导。故，当 $n\to+\infty$ 时，若 $r_{k_1}\geqslant1$，则一定有 $G_t(\boldsymbol{x},n)\gg1$。当 $(C_{tk_1d_{k_1}}(\boldsymbol{x})=0)\wedge(C_{tk_1(d_{k_1}-1)}(\boldsymbol{x})>0)$ 时，$G_t(\boldsymbol{x},n)$ 中速度变化最快的项是 $C_{tk_1(d_{k_1}-1)}(\boldsymbol{x})n^{d_{k_1}-1}r_{k_1}^n$。同样地，如果 $r_{k_2}\geqslant1$，那么当 $n\to+\infty$ 时，一定有 $G_t(\boldsymbol{x},n)\gg1$。其余各项可类似分析，直到 $(C_{tk_1d_{k_1}}(\boldsymbol{x})=0)\wedge(C_{tk_1(d_{k_1}-1)}(\boldsymbol{x})=0)\wedge\cdots\wedge(C_{tk_m1}(\boldsymbol{x})=0)\wedge(C_{tk_m0}(\boldsymbol{x})>0)$ 时，由于 $r_{k_m}=r_0=1$，因此 $G_t(\boldsymbol{x},n)=C_{tk_m0}(\boldsymbol{x})r_{k_m}^n=C_{tk_m0}(\boldsymbol{x})$，此时只有当 $C_{tk_m0}(\boldsymbol{x})\geqslant1$ 时 $G_t(\boldsymbol{x},n)\geqslant1$ 才成立。根据上述分析，可以得到命题2。

**命题2** 对于形如式(8)的表达式，当 $r_{k_i}\geqslant1$ 时，$i=1,2,\cdots,m$，我们可以建立 $\forall\boldsymbol{x},\exists n:(\boldsymbol{x}\in\Omega)\Rightarrow\bigvee_{t=1}^{T}(n\in\mathrm{N}\wedge G_t(\boldsymbol{x},n)\geqslant1)$ 成立的充分条件：

$$\begin{aligned}&\{\forall\boldsymbol{x}:(\boldsymbol{x}\in\Omega)\Rightarrow\bigvee_{t=1}^{T}((C_{tk_1d_{k_1}}(\boldsymbol{x})>0)\vee((C_{tk_1d_{k_1}}(\boldsymbol{x})=0)\wedge\\&(C_{tk_1(d_{k_1}-1)}(\boldsymbol{x})>0))\vee\cdots\vee((C_{tk_1d_{k_1}}(\boldsymbol{x})=0)\wedge(C_{tk_1(d_{k_1}-1)}\\&(\boldsymbol{x})=0)\wedge\cdots\wedge(C_{tk_m1}(\boldsymbol{x})=0)\wedge(C_{tk_m0}(\boldsymbol{x})\geqslant1)))\}\end{aligned}\tag{9}$$

由命题2可知，当程序 $P$ 中的循环条件围成的区域 $\Omega$ 被式(9)的后件确定的 $\boldsymbol{x}$ 的取值范围包含时，有：$\forall\boldsymbol{x},\exists n:(\boldsymbol{x}\in\Omega)\Rightarrow\bigvee_{t=1}^{T}(n\in\mathrm{N}\wedge G_t(\boldsymbol{x},n)\geqslant1)$ 成立。

式(9)可以利用 RegularChains 直接消去 $\boldsymbol{x}$，得到参数 $c_\alpha$ 的约束条件，该约束条件应当与式(5)得到的参数 $c_\alpha$ 的约束同时满足，将这两个约束条件联立，可得参数 $c_\alpha$ 的最终约束条件。

例3 考虑例2中的循环程序 $P_2$。设 $P_2$ 具有形如 $\rho(\boldsymbol{x})=ax_1+bx_2+cx_3+d$ 的k阶线性秩函数，那么根据式(2)，有：

$$\begin{aligned}&\forall x_1,x_2,x_3,\exists n:\{x_1\geqslant0\wedge x_3=1\}\\&\Rightarrow\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3+d\geqslant0\\n\in\mathrm{Z}^+\wedge(ax_1+bx_2+cx_3+d\geqslant\\a\cdot F_1(\boldsymbol{x},n)+b\cdot F_2(\boldsymbol{x},n)+c\cdot F_3(\boldsymbol{x},n)+d+1\end{cases}\end{aligned}\tag{10}$$

式(10)成立等价于式(11)和式(12)同时成立：

$$\forall x_1,x_2,x_3:\{x_1\geqslant0\wedge x_3=1\}\Rightarrow ax_1+bx_2+cx_3+d\geqslant0\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\forall x_1,x_2,x_3,\exists n:\{x_1\geqslant0\wedge x_3=1\}\Rightarrow n\in\mathrm{Z}^+\wedge q(\boldsymbol{x},n)=\\&bx_2-\frac{1}{2}ax_2-\frac{1}{4}ax_3+\frac{1}{2}ax_3n+\frac{1}{2}bx_3+(\frac{1}{2}ax_2+\frac{1}{4}\\&ax_3-bx_2-\frac{1}{2}bx_3)(-1)^n\geqslant1\end{aligned}\tag{12}$$

针对式(11)，利用 RegularChains 消去 $x_1,x_2,x_3$，可得：

$$(b=0)\wedge(0\leqslant a)\wedge(-c\leqslant d)\tag{13}$$

针对式(12)，令 $(-1)^n=e^{n\frac{1}{2}\cdot2\pi i}$，由于 $\alpha_q=\dfrac{1}{2}$ 是有理数，因此 $e^{n\cdot\frac{1}{2}\cdot2\pi i}$ 的周期 $T=2$，则 $e^{(Tn+t)\frac{1}{2}\cdot2\pi i}=e^{(2n+t)\frac{1}{2}\cdot2\pi i}=e^{t\frac{1}{2}\cdot2\pi i}$，其中 $1\leqslant t\leqslant2$，故式(12)等价于：

$$\begin{aligned}&\forall x_1,x_2,x_3,\exists n:\{x_1\geqslant0\wedge x_3=1\}\Rightarrow\bigvee_{t=1}^{2}(n\in\mathrm{N}\wedge(q(\boldsymbol{x},\\&2n+t)=bx_2-\frac{1}{2}ax_2-\frac{1}{4}ax_3+ax_3n+\frac{1}{2}ax_3t\ \frac{1}{2}bx_3+\\&(\frac{1}{2}ax_2+\frac{1}{4}ax_3-bx_2-\frac{1}{2}bx_3)e^{t\cdot\pi i}\geqslant1))\end{aligned}\tag{14}$$

这里，令 $G_1(\boldsymbol{x},n)=q(\boldsymbol{x},2n+1)=anx_3-ax_2+2bx_2+bx_3$，$G_2(\boldsymbol{x},n)=q(\boldsymbol{x},2n+2)=anx_3+ax_3$，将 $G_1(\boldsymbol{x},n)$ 和 $G_2(\boldsymbol{x},n)$ 各项分别按照 $n^lr_k^n$ 的增长速度递减排列，得：

$$\begin{aligned}&\forall x_1,x_2,x_3,\exists n:\{x_1\geqslant0\wedge x_3=1\}\Rightarrow n\in\mathrm{N}\wedge\{(anx_3-\\&ax_2+2bx_2+bx_3\geqslant1)\vee(anx_3+ax_3\geqslant1)\}\end{aligned}\tag{15}$$

根据命题2，式(15)成立的充分条件是式(9)成立。因此，根据命题2中的式(9)来建立式(15)成立的充分条件为：

$$\begin{aligned}&\forall x_1,x_2,x_3:\{x_1\geqslant0\wedge x_3=1\}\Rightarrow\{((ax_3>0)\vee((ax_3=0)\wedge\\&(-ax_2+2bx_2+bx_3\geqslant1)))\vee((ax_3>0)\vee((ax_3=0)\wedge\\&(ax_3\geqslant1)))\}\end{aligned}\tag{16}$$

针对式(16)，利用 RegularChain 消去 $x_1,x_2,x_3$，可得 $a>0$。联立式(13)，得到关于参数 $a,b,c,d$ 的约束条件为：$(a>0)\wedge(b=0)\wedge(0\leqslant a)\wedge(-c\leqslant d)$。求解该约束条件，可得 $a=1,b=0,c=0,d=0$。由此得到线性循环程序 $P_2$ 的一个k阶秩函数 $\rho(\boldsymbol{x})=x_1$；根据定理1，循环程序 $P_2$ 是终止的。

例4 针对例1中的单分支线性循环程序 $P_1$，设 $P_1$ 具有形如 $\rho(\boldsymbol{x})=ax+by+c$ 的k阶线性秩函数。因为：$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3^n&0\\0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，所以根据式(2)，有：

$$\begin{aligned}&\forall x,y,\exists n:\{x\geqslant1\wedge-x+y\geqslant0\}\Rightarrow\\&\begin{cases}ax+by+c\geqslant0\\n\in\mathrm{Z}^+\wedge(ax+by+c\geqslant a\cdot3^nx+b\cdot2^ny+c+1)\end{cases}\end{aligned}\tag{17}$$

式(17)成立等价于式(18)和式(19)同时成立：

$$\forall x,y:\{x\geqslant1\wedge-x+y\geqslant0\}\Rightarrow ax+by+c\geqslant0\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\forall x,y,\exists n:\{x\geqslant1\wedge-x+y\geqslant0\}\Rightarrow n\in\mathrm{Z}^+\wedge(-ax)3^n+\\&(-by)2^n+ax+by\geqslant1\end{aligned}\tag{19}$$

针对式(18)，利用 RegularChains 消去 $x$ 和 $y$，可得：

$$(0\leqslant b)\wedge(-b\leqslant a)\wedge(-a-b\leqslant c)\tag{20}$$

针对式(19)，变化速度由大到小依次排列为 $3^n>2^n>1$。根据命题2，建立式(19)成立的充分条件：

$$\begin{aligned}&\forall x,y:\{x\geqslant1\wedge-x+y\geqslant0\}\Rightarrow(-ax>0)\vee\{(-ax=0)\wedge\\&(-by>0)\}\vee\{(-ax=0)\wedge(-by=0)\wedge(ax+by\geqslant1)\}\end{aligned}\tag{21}$$

针对式(21)，利用 RegularChains 消去 $x$ 和 $y$，可得：

$$((b<0)\wedge(a\leqslant0))\vee((0\leqslant b)\wedge(a<0))\tag{22}$$

求解关于 $a,b,c$ 的约束条件：$((0\leqslant b)\wedge(-b\leqslant a)\wedge(-a-b\leqslant c))\wedge(((b<0)\wedge(a\leqslant0))\vee((0\leqslant b)\wedge(a<0)))$，得 $a=-1,b=1$。因此，程序 $P_1$ 具有一个k阶线性秩函数 $\rho(\boldsymbol{x})=-x+y$；根据定理1，程序 $P_1$ 是终止的。

## 4 实验结果

基于符号计算软件 Maple 中的 RegularChains 程序包，表1列出了一些测试程序以及它们是否存在传统线性秩函数和k阶线性秩函数的情况。

表 1　实验结果

Table 1　Experimental results

| 程序 | 是否有传统线性秩函数 | 是否有 k 阶秩函数 | k 阶秩函数 |
|---|---|---|---|
| while ($x\geqslant 1\wedge -x+y\geqslant 0$) $\{x:=3x;y:=2y;\}$ | 否 | 是 | $\rho(\boldsymbol{x})=-x+y$ |
| while ($x\geqslant 0\wedge z=1$) $\{x:=x+y;$ $y:=-y-z;$ $z:=z;\}$ | 否 | 是 | $\rho(\boldsymbol{x})=x$ |
| while ($x\geqslant 0\wedge z=1$) $\{x:=x+y;$ $y:=y-z;$ $z:=z;\}$ | 否 | 是 | $\rho(\boldsymbol{x})=2x$ |
| while ($-2x+y\geqslant 1\wedge y<0$) $\{x:=x-2y;$ $y:=2y;\}$ | 否 | 是 | $\rho(\boldsymbol{x})=-2x-2y$ |

实验结果表明，k 阶秩函数的适应范围比传统的秩函数的适应范围更广。针对没有传统线性秩函数的部分线性赋值循环程序，可通过将其合成为本文提出的 k 阶秩函数来证明其终止性。

**结束语**　本文针对一类线性赋值循环程序，提出了 k 阶秩函数的概念，并证明了若这类循环程序具有 k 阶秩函数，则其必然是终止的。我们可以利用工具 RegularChains 计算定义 2 中所描述的 k 阶秩函数。实验结果表明，所提方法成功找到了某些不具有传统线性秩函数的程序的 k 阶线性秩函数，从而证明了它们是可终止的。

## 参 考 文 献


[1] COLN M，SIPMA H. Synthesis of Linear Ranking Functions［C］// International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems. Springer Berlin Heidelberg，2001：67-81.

[2] COLÓN M，SIPMA H. Practical Methods for Proving Program Termination［C］// International Conference on Computer Aided Verification. Springer Berlin Heidelberg，2002：442-454.

[3] PODELSKI A，RYBALCHENKO A. A Complete Method for the Synthesis of Linear Ranking Functions［C］// International Workshop on Verification，Model Checking，and Abstract Interpretation. Springer Berlin Heidelberg，2004：239-251.

[4] CHEN Y H，XIA B C，YANG L，et al. Discovering Non-linear Ranking Functions by Solving Semialgebraic Systems［C］// International Colloquium on Theoretical Aspects of Computing，Springer Berlin Heidelberg，2007：34-49.

[5] HEIZMANN M，HOENICKE J，LEIKE J. Linear Ranking for Linear Lasso Programs［C］// International Symposium on Automated Technology for Verification and Analysis. Springer，Cham，2013：365-380.

[6] BAGNARA R，MESNARD F. Eventual Linear Ranking Functions［C］// Proceedings of the 15th Symposium on Principles and Practice of Declarative Programming. Madrid，Spain，ACM，2013：229-238.

[7] LI Y，ZHU G，FENG Y. The L-Depth Eventual Linear Ranking Functions for Single-Path Linear Constraint Loops［C］// 2016 10th International Symposium on Theoretical Aspects of Software Engineering. Shanghai，2016 ：30-37.

[8] LEIKE J，HEIZMANN M. Ranking Templates for Linear Loops［C］// Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems，Springer Berlin Heidelberg，2014：172-186.

[9] BEN-AMRAM A M，GENAIM S. On the Linear Ranking Problem for Integer Linear-constraint Loops［C］// Proceedings of the 40th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages（POPL '13）. Rome，Italy，ACM，2013：51-62.

[10] TIWARI A. Termination of Linear Programs［C］// 16th International Conference on Computer Aided Verification. Springer Berlin Heideiberg，2004：70-82.

[11] BRAVERMAN M. Termination of integer linear programs［C］// Proceedings of the 18th International conference on Computer Aided Verification. Springer-Verlag，2006：372-385.

[12] XIA B C，ZHANG Z H. Termination of linear programs with nonlinear constraints［J］. Journal of Symbolic Computation，2010，45(11)：1234-1249.

[13] LI Y. Termination of Single-Path Polynomial Loop Programs［C］// International Colloquium on Theoretical Aspects of Computing. 2016：33-50.

[14] CHEN C B，MAZA M M. Quantifier Elimination by Cylindrical Algebraic Decomposition Based on Regular Chains［C］// Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ACM，2014：91-98.


（上接第 144 页）


[9] CHENG J，ZHU Y A，ZHANG T，et al. How to test location-based mobile apps［C］// 2016 International Conference on Computer Science and Electronic Technology. 2016：27-32.

[10] CHENG J，ZHU Y A，ZHANG T，et al. Research on test data generation for location-based mobile information services［J］. Application Research of Computers，2017，34(3)：805-808.(in Chinese)
成静，朱怡安，张涛，等. 一种基于位置的移动信息服务测试数据随机生成方法[J]. 计算机应用研究，2017，34(3)：805-808.

[11] CHEN X，CHEN J H，JU X L，et al. Survey of Test Case Prioritization Techniques for Regression Testing［J］. Journal of Software，2013，24(8)：1695-1712.(in Chinese)
陈翔，陈继红，鞠小林，等. 回归测试中的测试用例优先排序技术述评[J]. 软件学报，2013，24(8)：1695-1712.

[12] ELBAUM S，MALISHEVSKY A G，ROTHERMEL G. Prioritizing test cases for regression testing［J］. IEEE Transactions on Software Engineering，2000，27(10)：102-112.