关于 Petri 网精细化操作及其应用研究*)

陈兆柱[1] 夏传良[1,2]
(山东建筑大学计算机科学与技术系 济南 250101)[1]
(中国科学院数学与系统科学研究院 计算机科学研究室 北京 100080)[2]

摘 要 为了解决"顾客投诉"等这一类业务处理问题,提出了用 Petri 网精细化操作解决问题的方案。定义了一种子网,用这种子网分别对 Petri 网中的某些变迁进行细化,得到更细致、更精确的 Petri 网。研究了 Petri 网精细化操作的性质保持问题,给出了这种精细化操作保持结构有界性、守恒性、可重复性、相容性和活性的充分条件。本文的结果可为复杂大系统的分析提供重要手段,并特别适合于一类业务系统的描述和验证,具有一定的实用价值。

关键词 Petri 网,精细化操作,结构性质,活性

On Petri Nets Refinement and its Application

CHEN Zhao-Zhu[1] XIA Chuan-Liang[1,2]
(Department of Computer Science and Technology, Shandong Architecture University, Jinan 250101)[1]
(Department of Computer Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)[2]

Abstract In order to solve some kinds of problems, such as customer's suing for compensation, a scheme is proposed using Petri nets refinements. A kind of subnet is defined. A refinement Petri net is obtained through using the kind of subnet to replace some transitions of the ordinary Petri net. Structural and behavioral properties have been investigated. The sufficient conditionds of structural property preservation by refingments are presented, such as structural boundedness, conservativeness, repetitiveness, consistency. The sufficient conditionds of liveness preservation is also obtained. These results are useful for analyzing properties for large complex systems. The refinement method is also useful in specification and verification of some business systems and practical to use in reality.

Keywords Petri nets, Refinement, Structural property, Liveness

1 引言

在日常生活中经常遇到顾客对某些销售或服务部门进行投诉的问题。当顾客认为所购买的商品存在质量问题或对所得到的服务感到不满意时,就会向消费者协会等仲裁机构投诉销售商或服务部门,要求赔偿。仲裁机构在接受顾客的投诉后,进行调查、取证,按照调查的结果,决定是否赔偿。对于一般民事诉讼问题也可用类似的方法来解决。总之,这类业务处理过程在日常生活中具有一定的普遍性,因此有必要对其进行管理和分析。为建立和管理好这类系统,需要一整套完整的建模、分析的理论和方法。针对这类系统的并发、异步等特征已有一些理论结果和研究方法,像 CSP, CCS, Petri 网以及形式语言自动机等。其中 Petri 网侧重于系统的物理结构描述和性质分析,有对结构与行为的统一考虑,对系统的表达能力强,并已形成严格的体系。本文就以 Petri 网作为上述业务过程处理系统的建模、分析工具。考虑到一次性建模的复杂性,用 Petri 网先建立系统的粗略模型,然后再对其进行精细化得到系统的精确模型。

Petri 网的精细化设计思想一直为理论界和工程界所关注,已有大量的研究工作。文[1]基于一般随机 Petri 网,提出了一种逐步建立可靠性模型的方法,先建立模型,然后根据有关条件再进行精细化;文[2]按照逐步精细化的描述方法模拟和实现整个制造系统(MS);文[3]给出了一种基于规则的精细化操作,用于保持系统的安全性;文[4]研究了对某些变迁和库所进行精细化操作后的 Petri 网的公平性保持问题;文[5]对工作流网进行了保持正确性的精细化操作;S. Peuker 在文[6]中关于一个简单 Petri 网子类(Elementary Petri nets)引入了一种变迁精细化操作,随后又将这种概念推广到一个更大的 Petri 网子类(Algebraic Petri nets),最后在文[7]中用这种变迁精细化操作为一个寻找赋权标识图的最小跨度树的复杂算法的正确性给出了一个新的、明确易懂的证明;……这些工作均针对 Petri 网精细化操作和网性质的分析。

上述工作虽然给出了一些精细化操作方法,但对精细化条件的判定一般都比较困难,并且一般不适合描述上述业务过程管理系统。为了较好地描述这类系统,参考了大量相关工作与有关 Petri 网精细化操作方面的文献并作精心研究,提出了 T-型子网和 T-型子网精细化操作。

本文的目的是研究这种精细化操作的性质保持问题。给出了精细化后的目标网保持结构有界性、守恒性、可重复性、相容性和活性的充分条件。值得一提的是本文给出的 Petri 网精细化操作模型绝不仅仅可用来描述和处理"顾客投诉"问题的具体过程,可覆盖更大的问题类。

本文的基本结构如下:第 2 节给出了相关的基本概念和术语;第 3 节研究 T-型子网精细化操作性质保持问题;第 4

*)国家自然科学基金(60073013)资助。陈兆柱 副教授、硕士,主要研究领域为形式化方法、计算机应用;夏传良 副教授、博士,主要研究领域为 Petri 网、算法设计与分析、计算机网络与通信。

节对一个"顾客投诉"的具体过程进行描述和验证；最后总结全文。

2 基本概念和术语

关于 Petri 网的基本概念和术语可参见文[8]，这里只引入与本文相关的少数几个概念。注意，本文仅考虑纯网(即在 Petri 网 N 中，$\forall x\in P\cup T$，有 $^{\cdot}x\cap x^{\cdot}\neq\phi$)。

定义 2.1 设 $N=(P,T;F,W)$ 是一个 Petri 网，$\Sigma=(N,M_0)$ 是一个 Petri 网系统。$M\in R(M_0)$

(1)变迁 $t\in T$ 称为在 M 下使能，当且仅当对 $\forall p\in {}^{\cdot}t$：$M(p)\geqslant W(p,t)$，记作 $M[t>$；

(2)若 t 是在 M 下使能的，则 t 可以引发，其结果把 M 转化为 M'

$$M'(p)=\begin{cases}M(p)-W(p,t) & p\in {}^{\cdot}t\backslash t^{\cdot}\\ M(p)+M(t,p) & p\in t^{\cdot}\backslash {}^{\cdot}t\\ M(p)-W(p,t)+W(t,p) & p\in {}^{\cdot}t\cap t^{\cdot}\\ M(p) & \text{其它}\end{cases}$$

定义 2.2 设 $\Sigma=(N,M_0)$ 是一个 Petri 网系统，

(1)变迁 $t\in T$ 是活的，当且仅当 $\forall M\in R(M_0)$，$\exists M'\in R(M)$，使得 $M'[t>$；

(2)Σ 是活的，当且仅当 $\forall t\in T$，t 是活的；

一个 Petri 网 $N=(P,T;F,W)$ 的关联矩阵 A 是一个 $|P|\times|T|$ 矩阵，其中，$|P|=n$，$|T|=m$，并且

$$a_{ij}=\begin{cases}W(t_j,p_i) & p_i\in t_j^{\cdot}\backslash {}^{\cdot}t_j\\ -W(p_i,t_j) & p_i\in {}^{\cdot}t_j\backslash t_j^{\cdot}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

注：本文中用到的向量 X,Y 均为行向量。

定义 2.3[8] 设 N 是一个 Petri 网，称 N 是结构有界的当且仅当存在 n 维正整数向量 Y，使得 $YA\leqslant 0$。

定义 2.4[8] 设 N 是一个 Petri 网，称 N 是守恒的当且仅当存在 n 维正整数向量 Y，使得 $YA=0$。

定义 2.5[8] 设 N 是一个 Petri 网，若存在 n 维正整数向量 Y，使得 $YA=0$，则称 Y 为 N 的一个 P－不变量。

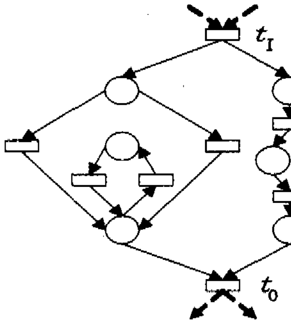
定义 2.6[8] 设 N 是一个 Petri 网，称 N 是可重复的当且仅当存在 m 维正整数向量 X，使得 $AX^T\geqslant 0$。

定义 2.7[8] 设 N 是一个 Petri 网，称 N 是相容的当且仅当存在 m 维正整数向量 X，使得 $AX^T=0$。

定义 2.8[8] 设 N 是一个 Petri 网，若存在 m 维正整数向量 X，使得 $AX^T=0$，则称 X 为 N 的一个 T－不变量。

3 T-型子网精细化操作

针对业务过程处理系统，提出了 T-型子网，简单示例如下：



定义 3.1 设 $N=(P,T;F,W)$ 是一个 Petri 网，$N_0=(P_0,T_0;F_0,W_0)$ 是 N 的一个子网，若满足：

(1)$^{\cdot}P_0\cup P_0^{\cdot}\subseteq T_0$；

(2)N 是连通的，并且 $t_I,t_O\in T_0$，其中，t_I 是唯一的输入变迁，t_O 是唯一的输出变迁；则称 N_0 为 N 的一个 T-型子网。

假定 3.1 T-型子网系统(N_0,M_{T0})由 T-型子网 N_0 和初始标识 M_{T0} 构成，并且满足：在(N_0,M_{T0})的一次执行过程(从托肯流入 t_I 至由 t_O 流出)中，从外部流入 p_I 的托肯数与流出 p_O 的托肯数相等。若 P_0 中在初始状态下有托肯，一次执行过程结束后，P_0 中所有托肯又恢复为原来状态。

定义 3.2 T-型子网精细化操作 $\mathrm{Re}\,f(\tilde{t},N_T)$：将 Petri 网 $N=(P,T;F,W)$ 中的变迁 $\tilde{t}$ 精细化为一个 T-型子网 $N_T=(P_T,T_T;F_T,W_T)$(即用 T-型子网 $N_T=(P_T,T_T;F_T,W_T)$ 来替换 $\tilde{t}$)，得到 Petri 网 $N'=(P',T';F',W')$，其中

(1)$P'=P\cup P_T$；

(2)$T'=T\cup T_T-\{\tilde{t}\}$；

(3)$F=F\cup\{(p,t_I)\mid p\in {}^{\cdot}\tilde{t}\}\cup\{(t_O,p)\mid p\in\tilde{t}^{\cdot}\}-\{(p,\tilde{t})\mid p\in {}^{\cdot}\tilde{t}\}-\{(\tilde{t},p)\mid p\in\tilde{t}^{\cdot}\}$；

定义 3.3 经 T-型子网精细化操作后得到的网系统(N',M'_0)由经精细化操作后得到的网 N' 和初始标识 M'_0 构成，其中，$M'_0=[M_0,M_{T0}]$，M_0，M_{T0} 分别是 N，N_T 的初始标识。

定义 3.4 在网系统(N',M'_0)中取子网由 $^{\cdot}t_I$ 开始经过 N_T 到 $t_O^{\cdot}$，并增加变迁 t_T 以及弧集 $\{(p,t_T)\mid p\in t_O^{\cdot}\}\cup\{(t_T,p)\mid p\in {}^{\cdot}t_I\}$，标识不变，得到 T-型闭网系统$(\overline{N}_T,\overline{M}_{T0})$。

以下讨论 T-型子网精细化操作的结构有界性。

为讨论方便，根据定义 3.2 和定义 3.4，现将 $N,\overline{N}_T$ 中的 P 元和 T 元重新排列如下：

$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_k,\cdots,p_n\}$，$T=\{t_1,t_2,\cdots,t_{m-1},t_m\}$，$\overline{P}_T=\{p_k,\cdots,p_n,\overline{p}_{n-k+2},\cdots,\overline{p}_r\}$，$\overline{T}_T=\{\overline{t}_1,\overline{t}_2,\cdots,\overline{t}_{s-1},\overline{t}_s\}$ 其中，$t_m=\tilde{t}$，$\overline{t}_s=t_T$，$\overline{t}_1=t_I$，$\overline{t}_2=t_O$，$p_i\in {}^{\cdot}\tilde{t}\cup\tilde{t}^{\cdot}$ $(i=k,\cdots,n)$，根据定义 3.4 显然也有 $p_i\in {}^{\cdot}t_T\cup t_T^{\cdot}$ $(i=k,\cdots,n)$，但是在 N 中当 $p_i\in {}^{\cdot}\tilde{t}$ 时，则在 N_T 中，必有 $p_i\in t_T^{\cdot}$，当 $p_i\in\tilde{t}^{\cdot}$ 时，必有 $p_i\in {}^{\cdot}t_T$，反之亦然。

N 的关联矩阵 A 和 $\overline{N}_T$ 的关联矩阵 $\overline{A}$ 分别表示为：

$$A=\begin{array}{c}\\ p_1\\ p_2\\ \vdots\\ p_n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}t_1 & t_2\cdots & t_m\end{array}\\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nm}\end{bmatrix}\end{array}\qquad \overline{A}=\begin{array}{c}\\ \overline{p}_1\\ \overline{p}_2\\ \vdots\\ \overline{p}_r\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\overline{t}_1 & \overline{t}_2\cdots & \overline{t}_s\end{array}\\ \begin{bmatrix}\overline{a}_{11} & \overline{a}_{12}\cdots & \overline{a}_{1s}\\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22}\cdots & \overline{a}_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \overline{a}_{n1} & \overline{a}_{n2}\cdots & \overline{a}_{rs}\end{bmatrix}\end{array}$$

如果 N 是结构有界的，则存在 n 维正整数向量 $Y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$，使得 $YA\leqslant 0$。亦即，

$$YA=[y_1a_{11}+\cdots+y_na_{n1},\cdots,y_1a_{1m}+\cdots+y_na_{nm}]\leqslant 0 \tag{3.1.1}$$

如果 $\overline{N}_T$ 是结构有界的，则存在 r 维正整数向量 $\overline{Y}=[\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_r]$，使得 $\overline{Y}\overline{A}\leqslant 0$。亦即，

$$\overline{Y}\overline{A}=[\overline{y}_1\overline{a}_{11}+\cdots+\overline{y}_{r1},\cdots,\overline{y}_1\overline{a}_{1s}+\cdots+\overline{y}_r\overline{a}_{rs}]\leqslant 0 \tag{3.1.2}$$

定理 3.1 设 N' 是由 N 中经 T-型子网精细化操作 $\mathrm{Re}\,f(\tilde{t},N_T)$ 得到的 Petri 网，如果 N 与 $\overline{N}_T$ 都是结构有界的，并且 $[y_k,y_{k+1}\cdots,y_n]$ 与 $[\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_{n-k+1}]$ 线性相关，则 N' 是结构有界的。

证明：对于 N' 的关联矩阵 A'，寻找正整数向量 Y'，使得 $Y'A'\leqslant 0$，其中

$$A'=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t_1\cdots t_{m-1} & \bar t_1\,\bar t_2\cdots\bar t_{s-1}\end{array}\\ \begin{array}{c}p_1\\ \cdots\\ p_k\\ \cdots\\ p_n\\ \bar p_{n-k+2}\\ \cdots\\ \bar p_r\end{array} & \left[\begin{array}{c:c} A_1 & 0 \\ \hdashline 0 & \bar A_1\end{array}\right]\end{array}$$

其中 A_1 为由矩阵 A 去掉最后一列（t_m 所对应的列）后所得的矩阵；$\bar A_1$ 为由矩阵 $\bar A$ 去掉最后一列（$\bar t_s$ 所对应的列）后所得的矩阵。

设 $Y'=[y'_1,y'_2,\cdots,y'_n,y'_{n+1},\cdots,y_{(n+r-(n-k+1))}]$

以下来求正整数向量 Y'。为讨论方便，取，

$$Y_UA_U=[y_1\cdots y_n\ \bar y_{n-k+2}\cdots\bar y_r]\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t_1\ t_2\cdots t_m & \bar t_1\ \bar t_2\cdots\bar t_s\end{array}\\ \begin{array}{c}p_1\\ \cdots\\ p_k\\ \cdots\\ p_n\\ \bar p_{n-k+2}\\ \cdots\\ \bar p_r\end{array} & \left[\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & \bar A\end{array}\right]\end{array} \tag{3.1.3}$$

对于 A_U 的第 1 列至第 m 列和第 1 行至第 n 行的元素，因为 N 是结构有界的，所以由(3.1.1)得，

$$\begin{cases} y_1a_{11}+y_2a_{21}+\cdots+y_na_{n1}\leqslant 0\\ y_1a_{12}+y_2a_{22}+\cdots+y_na_{n2}\leqslant 0\\ \cdots\cdots\\ y_1a_{1m}+y_2a_{2m}+\cdots+y_na_{nm}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.1.4}$$

因为 $\bar N_T$ 是结构有界的，所以由(3.1.2)得，

$$\begin{cases} \bar y_1\,\bar a_{11}+\bar y_2\,\bar a_{21}+\cdots+\bar y_r\,\bar a_{r1}\leqslant 0\\ \bar y_1\,\bar a_{12}+\bar y_2\,\bar a_{22}+\cdots+\bar y_r\,\bar a_{r2}\leqslant 0\\ \cdots\cdots\\ \bar y_1\,\bar a_{1s}+\bar y_2\,\bar a_{2s}+\cdots+\bar y_r\,\bar a_{rs}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.1.5}$$

由于 $[y_k,y_{k+1}\cdots,y_n]$ 与 $[\bar y_1,\bar y_2,\cdots,\bar y_{n-k+1}]$ 线性相关，故存在正常数 d，使得

$$[y_k,y_{k+1}\cdots,y_n]=d[\bar y_1,\bar y_2,\cdots,\bar y_{n-k+1}]。 \tag{3.1.6}$$

对(3.1.5)中各式的两边分别乘以正常数 d，各不等式的符号不变。此时，

$$\begin{cases} d\,\bar y_1\,\bar a_{11}+d\,\bar y_2\,\bar a_{21}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{r1}\leqslant 0\\ d\,\bar y_1\,\bar a_{12}+d\,\bar y_2\,\bar a_{22}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{r2}\leqslant 0\\ \cdots\cdots\\ d\,\bar y_1\,\bar a_{1s}+d\,\bar y_2\,\bar a_{2s}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{rs}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.1.7}$$

由(3.1.6)得，(3.1.7)的第一式和第二式（分别对应着 $\bar t_1$ 所对应的列和 $\bar t_2$ 所对应的列）变为：

$$\begin{cases} y_k\,\bar a_{11}+\cdots+y_n\,\bar a_{n-k+1,1}+d\bar y_{n-k+2}a_{n-k+2,1}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{r1}\leqslant 0\\ y_k\,\bar a_{12}+\cdots+y_n\,\bar a_{n-k+1,2}+d\bar y_{n-k+2}a_{n-k+2,2}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{r2}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.1.8}$$

对于 A_U 的 $\bar t_3$ 所对应的列到 $\bar t_s$ 所对应的列的元素，由矩阵 $\bar A$ 的特点知，$\bar a_{13}=\bar a_{23}=\cdots=\bar a_{n-k+1,3}=0,\cdots,\bar a_{1,s-1}=\bar a_{2,s-1}=\cdots=\bar a_{n-k+1,s-1}=0$。故有，

$$\begin{cases} d\,\bar y_{n-k+2}\bar a_{n-k+2,3}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{r3}\leqslant 0\\ \cdots\cdots\\ d\,\bar y_{n-k+2}\bar a_{n-k+2,s-1}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{r,s-1}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.1.9}$$

由(3.1.4)、(3.1.8)和(3.1.9)得，

$$\begin{cases} y_1a_{11}+y_2a_{21}+\cdots+y_na_{n1}\leqslant 0\\ \cdots\cdots\\ y_1a_{1,m-1}+y_2a_{2,m-1}+\cdots+y_na_{n,m-1}\leqslant 0\\ y_k\,\bar a_{11}+\cdots+y_n\,\bar a_{n-k+1,1}+d\bar y_{n-k+2}\bar a_{n-k+2,1}+\cdots+d\bar y_r\,\bar a_{r1}\leqslant 0\\ y_k\,\bar a_{12}+\cdots+y_n\,\bar a_{n+k-1,2}+d\bar y_{n-k+2}\bar a_{n-k+2,2}+\cdots+d\bar y_r\,\bar a_{r2}\leqslant 0\\ d\,\bar y_{n-k+2}\bar a_{n-k+2,3}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{r3}\leqslant 0\\ \cdots\cdots\\ d\,\bar y_{n-k+2}a_{n-k+2,s-1}+\cdots+d\,\bar y_r\,\bar a_{r,s-1}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.1.10}$$

取 $Y'=[y_1,y_2,\cdots,y_n,d\,\bar y_{n-k+2},\cdots,d\,\bar y_r]$，由(3.1.10)得，$Y'A'\leqslant 0$，所以，$N'$ 是结构有界的。

推论 3.1 设 N' 是由 N 经 T-型子网精细化操作 $\mathrm{Re}\,f(\tilde t,N_T)$ 得到的 Petri 网，如果 N 与 $\bar N_T$ 都是守恒的，并且 $[y_k,y_{k+1},\cdots,y_n]$ 与 $[\bar y_1,\bar y_2,\cdots,\bar y_{n-k+1}]$ 线性相关，则 N' 是守恒的。

推论 3.2 设 N' 是由 N 经 T-型子网精细化操作 $\mathrm{Re}\,f(\tilde t,N_T)$ 得到的 Petri 网，如果 $Y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$ 是 N 的一个 $P-$ 不变量，$\bar Y=[\bar y_1,\bar y_2,\cdots,\bar y_r]$ 是 $\bar N_T$ 的一个 $P-$ 不变量，并且 $[y_k,y_{k+1}\cdots,y_n]$ 与 $[\bar y_1,\bar y_2,\cdots,\bar y_{n-k+1}]$ 线性相关（即存在正常数 d，使得 $[y_k,y_{k+1},\cdots,y_n]=d[\bar y_1,\bar y_2,\cdots,\bar y_{n-k+1}]$），则 $Y'=[y_1,\cdots,y_n,d\,\bar y_{n-k+2},\cdots,d\,\bar y_r]$ 是 N' 的一个 $P-$ 不变量。

定理 3.2 设 N' 是由 N 经 T-型子网精细化操作 $\mathrm{Re}\,f(\tilde t,N_T)$ 得到的 Petri 网，如果 N 与 $\bar N_T$ 都是可重复的，则 N' 是可重复的。

证明：对于 N' 的关联矩阵 A'，寻找正整数向量 X'，使得 $A'X'^T\geqslant 0$，其中

$$A'=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t_1\cdots t_{m-1} & \bar t_1\,\bar t_2\cdots\bar t_{s-1}\end{array}\\ \begin{array}{c}p_1\\ \cdots\\ p_k\\ \cdots\\ p_n\\ \bar p_{n-k+2}\\ \cdots\\ \bar p_r\end{array} & \left[\begin{array}{c:c} A_1 & 0 \\ \hdashline 0 & \bar A_1\end{array}\right]\end{array}$$

其中 A_1 为由矩阵 A 去掉最后一列（t_m 所对应的列）后所得的矩阵；$\bar A_1$ 为由矩阵 $\bar A$ 去掉最后一列（$\bar t_s$ 所对应的列）后所得的矩阵。

设 $X'=[x'_1,x'_2,\cdots,x'_{m-1},\cdots,x'_{m+s-2}]$，以下来求正整数向量 X'。

因为 N 是可重复的，故存在正整数向量 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_m]$，使得，$AX^T\geqslant 0$，亦即，

$$AX^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{3.2.1}$$

因为 $\bar N_T$ 是可重复的，故存在正整数向量 $\bar X=[\bar x_1,\bar x_2,\cdots,\bar x_s]$，使得，$\overline{AX}^T\geqslant 0$，亦即，

$$\overline{A}\overline{X}^{T}=\begin{bmatrix}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{12}\cdots & \bar{a}_{1s}\\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22}\cdots & \bar{a}_{2s}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \bar{a}_{r1} & \bar{a}_{r2}\cdots & \bar{a}_{rs}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \cdots\\ \bar{x}_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{a}_{11}\bar{x}_1+\bar{a}_{12}\bar{x}_2+\cdots+\bar{a}_{1s}\bar{x}_s\\ \bar{a}_{21}\bar{x}_1+\bar{a}_{22}\bar{x}_2+\cdots+\bar{a}_{2s}\bar{x}_s\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{a}_{r1}\bar{x}_1+\bar{a}_{r2}\bar{x}_2+\cdots+\bar{a}_{rs}\bar{x}_s\end{bmatrix}\geqslant 0 \qquad (3.2.2)$$

为讨论方便,取

$$A_U X_U^{T}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccc} t_1 & t_2 & \cdots & t_m & \bar{t}_1 & \bar{t}_2 & \cdots & \bar{t}_s\end{array}\\ \begin{array}{c} p_1\\ \cdots\\ p_k\\ \cdots\\ p_n\\ \bar{p}_{n-k+2}\\ \cdots\\ \bar{p}_r\end{array} & \left[\begin{array}{c:c} A & 0\\ \hdashline 0 & \overline{A}\end{array}\right]\end{array}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_m\\ \bar{x}_1\\ \bar{x}_s\end{bmatrix}$$

根据定义 3.2 和定义 3.4,显然有 $A_U X_U^T\geqslant 0$,亦即:

$$\left\{\begin{array}{ll}
a_{11}x_1+\cdots+a_{1,m-1}x_{m-1}+a_{1m}x_m\geqslant 0 & (1)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{k-1,1}x_1+\cdots+a_{k-1,m-1}x_{m-1}+a_{k-1,m}x_m\geqslant 0 & (k-1)\\
a_{k1}x_1+\cdots+a_{k,m-1}x_{m-1}+a_{km}x_m+\bar{a}_{11}\bar{x}_1+\cdots+\bar{a}_{1,s-1}\bar{x}_{s-1}+\bar{a}_{1s}\bar{x}_s\geqslant 0 & (k)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{n1}x_1+\cdots+a_{n,m-1}x_{m-1}+a_{nm}x_m+\bar{a}_{n-k+1,1}\bar{x}_1+\cdots+\bar{a}_{n-k+1,s-1}\bar{x}_{s-1}+\bar{a}_{n-k+1,s}\bar{x}_s\geqslant 0 & (n)\\
\bar{a}_{n-k+2,1}\bar{x}_1+\cdots+\bar{a}_{n-k+2,s-1}\bar{x}_{s-1}+\bar{a}_{n-k+2,s}\bar{x}_s\geqslant 0 & (n-k+2)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\bar{a}_{r1}\bar{x}_1+\cdots+\bar{a}_{r,s-1}\bar{x}_{s-1}+\bar{a}_{rs}\bar{x}_s\geqslant 0 & (r)
\end{array}\right.$$

由于 $\forall p\in\{p_1,p_2,\cdots,p_{k-1}\}$,$({}^{\cdot}p\cup p^{\cdot})\cap\tilde{t}=\phi$,则在(1)至($k-1$)式中,$a_{im}x_m=0,i=1,\cdots,k-1$。同理,在($n-k+2$)至($r$)式中,$\bar{a}_{is}\bar{x}_s=0,i=n-k+2,\cdots,r$。由于 $\forall p\in\{p_k,\cdots,p_n\}$,在 N 中 $({}^{\cdot}p\cup p^{\cdot})\cap\tilde{t}\neq\phi$,在 $\overline{N}_T$ 中,$({}^{\cdot}p\cup p^{\cdot})\cap t_T\neq\phi$,但是当 ${}^{\cdot}p\in\tilde{t}\wedge p^{\cdot}\notin\tilde{t}$ 时,必有 $p^{\cdot}\in t_T\wedge{}^{\cdot}p\notin t_T$,当 $p^{\cdot}\in\tilde{t}\wedge{}^{\cdot}p\notin\tilde{t}$ 时,必有 ${}^{\cdot}p\in t_T\wedge p^{\cdot}\notin t_T$,反映在($k$)至($n$)式中即为 $a_{km}=-\bar{a}_{1s},\cdots,a_{nm}=-\bar{a}_{n-k+1,s}$。将向量$[x_1,x_2,\cdots,x_m]$乘以正整数$\bar{x}_s$,$[\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_s]$乘以正整数 x_m,并不改变(1)至(r)各式子的符号。此时,在(k)至(n)式中 $a_{km}x_m\bar{x}_s+\bar{a}_{1s}\bar{x}_s x_m=0,\cdots,a_{nm}x_m\bar{x}_s+\bar{a}_{n-k+1,s}\bar{x}_s x_m=0$。现将(1)至($r$)式改写如下:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1\bar{x}_s+\cdots+a_{1,m-1}x_{m-1}\bar{x}_s+a_{1m}x_m\bar{x}_s\geqslant 0\\
\cdots\cdots\cdots\\
a_{k-1,1}x_1\bar{x}_s+\cdots+a_{k-1,m-1}x_{m-1}\bar{x}_s+a_{k-1,m}x_m\bar{x}_s\geqslant 0\\
a_{k1}x_1\bar{x}_s+\cdots+a_{k,m-1}x_{m-1}\bar{x}_s+\bar{a}_{11}\bar{x}_1x_m+\cdots+\bar{a}_{1,s-1}\bar{x}_{s-1}x_m\geqslant 0\\
\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}x_1\bar{x}_s+\cdots+a_{n,m-1}x_{m-1}\bar{x}_s+\bar{a}_{n-k+1,1}\bar{x}_1x_m+\cdots+\bar{a}_{n-k+1,s-1}\bar{x}_{s-1}x_m\geqslant 0\\
\bar{a}_{n-k+2,1}\bar{x}_1x_m+\cdots+\bar{a}_{n-k+2,s-1}\bar{x}_{s-1}x_m+\bar{a}_{n-k+2,s}\bar{x}_s x_m\geqslant 0\\
\cdots\cdots\cdots\\
\bar{a}_{r1}\bar{x}_1x_m+\cdots+\bar{a}_{r,s-1}\bar{x}_{s-1}x_m+\bar{a}_{rs}\bar{x}_s x_m\geqslant 0
\end{array}\right. \qquad (3.2.3)$$

取 $X'=[x_1\bar{x}_s,\cdots,x_{m-1}\bar{x}_s,\bar{x}_1x_m,\cdots,\bar{x}_{s-1}x_m]$由(3.2.3)知,$A'X'^T\geqslant 0$,所以,$N'$是可重复的。

推论 3.3 设 N'是由 N 经 T-型子网精细化操作 Re $f(\tilde{t},N_T)$得到的 Petri 网,如果 N 与$\overline{N}_T$ 都是相容的,则 N'是相容的。

推论 3.4 设 N'是由 N 经 T-型子网精细化操作 Re $f(\tilde{t},N_T)$得到的 Petri 网,如果 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_m]$是 N 的一个 $T-$不变量,$\overline{X}=[\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_s]$是$\overline{N}_T$ 的一个 $T-$不变量,则 $X'=[x_1\bar{x}_s,\cdots,x_{m-1}\bar{x}_s,\bar{x}_1x_m,\cdots,\bar{x}_{s-1}x_m]$是 N'的一个 $T-$不变量。

定理 3.3 设(N',M'_0)是由(N,M_0)中经 T-型子网精细化操作 Re $f(\tilde{t},N_T)$得到的 Petri 网系统,如果(N,M_0)与$(\overline{N}_T,\overline{M}_{T0})$都是活的,则$(N',M'_0)$是活的。

证明:$\forall t'\in T'$,则 $t'\in T-\{\tilde{t}\}$或 $t'\in T_T-\{t_I,t_O\}$或 $t'\in\{t_I,t_O\}$。对 $\forall M'\in R(M'_0)$,令 $M'=[M,M_T]$,根据假定 3.1 有,$M\in R(M_0)$和 $M_T\in R(M_{T0})$。

(1)若 $t'\in T-\{\tilde{t}\}$,由Σ的活性知,$\exists\overline{M}\in R(M)$,使得$\overline{M}[t'>$。记 $M_0[\sigma_0>M[\sigma>\overline{M}[t'>$,其中,$\sigma_0$,$\sigma$ 为Σ的可引发变迁序列。

(1.1)若$\tilde{t}$不属于 σ_0 或 σ 中的变迁,则根据定义 3.2,令 $M'_0=[M_0,M_{T0}]$,$\overline{M}'=[\overline{M},M_{T0}]$,从而$\overline{M}\in R(M_0)$,$\overline{M}'\in R(M'_0)$,并且 $M'_0[\sigma_0>M'[\sigma>\overline{M}'[t'>$,即 t'在$\Sigma'=(N',M'_0)$中是活的;(1.2)若$\tilde{t}$属于 σ_0 或 σ 中的变迁,不妨设$\tilde{t}$属于 σ 的变迁集合,且记为 $M_0[\sigma_0>M[\sigma_1\tilde{t}\sigma_2>\overline{M}'[t'>$,由定义 3.2 及 Σ_T 的活性知,$M'_0[\sigma_0>M'[\sigma_1t_I\sigma_Tt_O\sigma_2>\overline{M}'[t'>$,其中 σ_T 是 T_T 上的步串,因此 t'在Σ'中仍是活的。

(2)若 $t'\in T_T-\{t_I,t_O\}$,由 $M_0[\sigma>M$,即$[M_0,M_{T0}][\sigma'>[\overline{M}_2,M_T]$,记 $M_{T0}[\sigma_{T0}>M_T$。

(2.1)若 t'不属于 σ_{T0} 的变迁,则由Σ_T 的活性知,$\exists\overline{M}_T\in R(M_T)$使得 $M_{T0}[\sigma_{T0}>M_T[\sigma_T>\overline{M}_T[t'>$,考虑到$\Sigma$活性,因

此$[M_0,M_{T0}][\sigma_0>[M_2,M_T][\sigma_{T0}>[M_2,M_T'][\sigma_T>[M_2,\overline{M}_T][t'>$，令$\overline{M'}=[M_2,\overline{M}_T]$，则有，$M'_0[\sigma_0\sigma_{T0}>M'[\sigma_T>\overline{M'}[t'>$，因此$t'$在$\Sigma'$中是活的。

(2.2)若t'属于σ_{T0}的变迁，则有$[M_0,M_{T0}][\sigma_0 t_I>[M_1,M_T][\sigma_{T0}>[M_1,M_{T1}][\sigma_1>[M_2,M_{T1}]$，根据$\Sigma_T$的活性，$\exists\sigma''$使得$[M_2,M_{T1}][\sigma''t_O>[M_3,M_{T0}]$，又根据$\Sigma$的活性知，$\exists\sigma_2$使得，$[M_3,M_{T0}][\sigma_2 t_I>[M_1,M_T]$，再根据$\Sigma_T$的活性，$\exists\sigma_T$使得，$[M_1,M_T][\sigma_T>[M_1,\overline{M}_{T1}][t'>$（其中$\sigma_T$是$\sigma_{T0}$的前缀子串）。亦即，$[M_0,M_{T0}][\sigma_0 t_I\sigma_{T0}\sigma_1>[M_2,M_{T1}][\sigma''t_O\sigma_2 t_I\sigma_T>[M_1,\overline{M}_{T1}][t'>$，即$M'_0[\sigma_0 t_I\sigma_{T0}\sigma_1>M'[\sigma''t_O\sigma_2 t_I\sigma_T>\overline{M'}[t'>$，因此$t'$在$\Sigma'$中是活的。

(3)若$t'\in\{t_I,t_O\}$不妨设$t'=t_I$，对$\forall M'\in R(M'_0)$，其中$M'=[M,M_T]$，$M\in R(M_0)$，$M_T\in R(M_{T0})$。

(3.1)若$M_T=\theta_T$，则由Σ的活性知，$\exists\sigma$使得$M[\sigma>\overline{M}[\tilde{t}>$，而$\cdot\tilde{t}=\cdot t'$，因此在$\Sigma'$中$\exists\overline{M'}=[\overline{M},\theta_T]$，使得$M_0'[\sigma_0>M'[\sigma>\overline{M'}[t'>$，即$t'$在$\Sigma'$上是活的。

(3.2)若$M_T\neq\theta_T$，则由Σ_T的活性知，$\exists\sigma_T$使得$M_T[\sigma_T>M_{T1}$，由Σ的活性知，$\exists\sigma_0$使得$M_{T1}[t_O\sigma_0>\overline{M}[\tilde{t}>$，而$\cdot\tilde{t}=\cdot t'$，从而在$\Sigma'$中有$M_0'[\sigma'_0>M'[\sigma_T t_O\sigma_0>\overline{M'}[t'>$，从而$t'$在$\Sigma'$上是活的。

由(1)，(2)，(3)可知，t'在Σ'上是活的，由t'的任意性知，Σ'是活的。

4 应用

以下将用本文中刚才提到的方法对一个“顾客投诉”过程进行描述和处理。投诉处理过程为：仲裁机构把刚收到的顾客投诉记录下来，然后联系投诉的顾客和与投诉相关的部门，如果要向顾客询问更多的信息，还要通知被投诉的部门并询问它们的最初反应。这两个任务可以并行执行（也就是说同时或任意次序执行）。之后，就可以根据搜集的数据作出决策或进一步调查取证作出决策。根据决策，进行处理（或者支付赔偿或者拒绝赔偿）。最后与投诉有关的材料被归档。

以下就用 Petri 网精细化操作描述这个过程。首先给出粗略模型，然后用 T-型子网对粗略模型进行细化，得到细化 Petri 网模型。

首先给出粗略模型 N（图 1），然后用 T-型子网 N_T（图 2）对 N 中的变迁 t_3 进行细化，得到精细化模型 N'（图 4）。当然还可以对图 4 中的某些变迁进一步细化，得到更为精细的 Petri 网模型。

图 1 中库所、变迁的含义如下：

p_1 等待接收投诉状态；　　t_1：准备接收投诉；

p_2：投诉材料（内容）；　　t_2：顾客对某种商品或服务进行投诉；

p_3：处理后的结果（档案文件）；　　t_3 接受投诉并进行处理（过程之一）；

p_4：顾客一次投诉结束状态；　　t_4：归档；

p_5：档案文件；

图 2 中 T-型子网中库所、变迁的含义如下：

p_{31}，p_{32}：登记的投诉材料；　　t_{31}：对顾客的投诉进行登记；

p_{33}：顾客投诉的信息；　　t_{32}：联系投诉的顾客并询问更多信息；

p_{34}：被投诉部门的反应信息；　　t_{33}：通知被投诉部门并询问其反应信息；

p_{35}：汇总后的信息（用于以后建立档案文件）；　　t_{34}：对顾客投诉信息和部门反应信息进行汇总；

p_{36}：汇总后的信息（等待作出处理的状态）；　　t_{35}：作出肯定决策（被投诉部门支付赔偿）；

p_{37}：进一步调查取证状态或完成处理状态；　　t_{36}：作出否定决策（通知顾客投诉失败）；

p_{38}：获得调查取证材料的状态；　　t_{37}：进一步调查取证；

p_{38}：进一步作出决策；　　t_{39}：案例材料归档；

图 3 给出了 T-型闭网$\overline{N}_T$，其中库所、变迁的含义同图 2 中相应库所和变迁的含义，t_T 为形成 T-型闭网而附加的变迁。图 4(N')中库所、变迁的含义同图 1、图 2 中相应库所和变迁的含义。

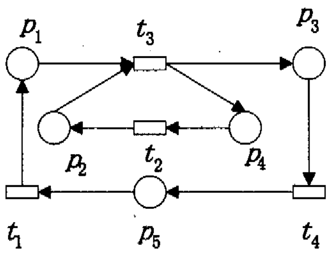


图 1 “处理投诉”过程 Petri 网原模型

4.1 结构性质分析

(1)因为 N（图 1）与$\overline{N}_T$（图 3）都是结构有界的、守恒的 Petri 网且满足相关条件，所以根据定理 3.1 和推论 3.1 得，N'是一个结构有界的、守恒的 Petri 网。

(2)因为 N（图 1）与$\overline{N}_T$（图 3）都是可重复的、相容的 Petri 网且满足相关条件，所以根据定理 3.2 和推论 3.3 得，N'是一个可重复的、相容的 Petri 网。

当然，N'的结构有界性、守恒性、可重复性和相容性也可以从图 4 中直接验证。

4.2 活性分析

对于 N，初始标识 $M_0=(M_0,(p_1),M_0(p_2),M_0(p_3),M_0(p_4),M_0(p_5))=(1,1,0,0,0)$，易知$\Sigma=(N,M_0)$是活的。

对于$\overline{N}_T$，初始标识 $M_{T0}=(M_{T0}(p_1),M_{T0}(p_2),M_{T0}(p_{31}),M_{T0}(p_{312}),M_{T0}(p_{33}),M_{T0}(p_{34}),M_{T0}(p_{35}),M_{T0}(p_{36}),M_{T0}(p_{37}),M_{T0}(p_{38}),M_{T0}(p_3),M_{T0}(p_4))=(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$，易知$\Sigma_T=(\overline{N}_T,\overline{M}_{0T})$，是活的。根据定理 3.3 知，$\Sigma''=(N'',M'_0)$是活的。

结论 本文讨论了 Petri 网的一种精细化操作的性质保持问题。给出了经精细化操作后得到的目标网保持结构有界性、守恒性、可重复性、相容性和活性的充分条件。文中的实例进一步展示了该方法的实际价值。本文的结果对于复杂大系统的分析具有重要的指导意义。下一步的研究工作是进一步推广精细化操作满足性质的保持性条件，并研究精细化操作对其它性质的保持性问题。

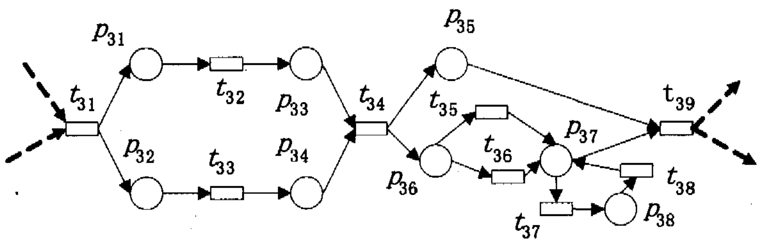


图 2　T-型子网

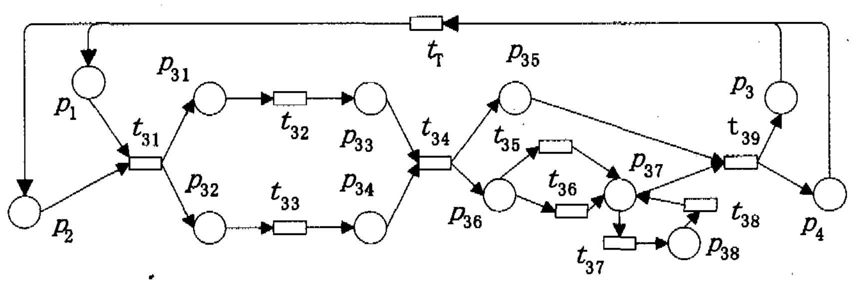


图 3　T-型闭网

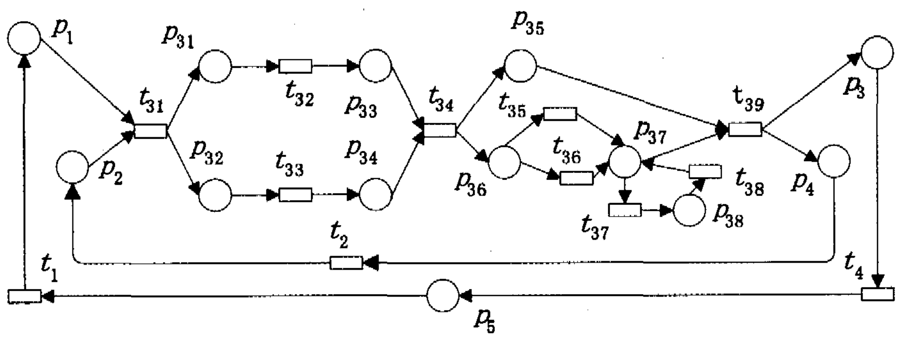


图 4　对图 1 进行精细化后的 Petri 网模型

参 考 文 献

1 Betous-Almeida C, Kanoun K. Construction and stepwise refinement of dependability models. Performance Evaluation, 2004, 56: 277～306

2 Nketsa A, Valette R. Rapid and modular prototyping-based Petri nets and distributed simulation for manufacturing systems. Applid Mathematics and Computation, 2001, 120: 265～278

3 Padberg J, Gajewsky M, Ermel C. Rule-based refinement of high-level nets preserving safty properties. Science of Computer Programming, 2001, 40: 97～118

4 Völzer H. Refinement-Robust fairness. In: Brim L, et al. Eds. CONCUR 2002, LNCS 2421. 547～562

5 van Hee K, Sidorova N, et al. Soundness and separability of workflow nets in the stepwise refinement. In: Proc. the 24th International Conference on Application and Theory of Petri Nets. Eindhoven, The Netherlands, 2003. 337～356

6 Peuker S. Property preserving transition refinement with concurrent runs: An example. In: International Conference on Application of Concurrency to System Design, IEEE Computer Society, 2001. 77～86

7 Peuker S. Transition refinement for deriving a distributed minimum weight spanning tree algorithm. In: Proc. the 23rd International Conference on Application and Theory of Petri Nets. Adelaide, Australia, 2002. 374～393

8 Murata T. Petri nets: properties, analysis, and applications. Proc IEEE, 1989, 77(4): 541～580