维普资讯 http://www.cqvip.com

图的支配集若干问题的研究*)

李镇坚 葛 启 王海涛 朱 洪
(复旦大学计算机科学与工程系 上海 200433)

摘 要 本文提出了两个图支配集问题的变形即C强支配集和完全支配集问题，这两个问题都有重要的实际应用背景。我们证明了它们的判定问题是NP完全的，并且给出了它们相应优化问题的近似算法以及算法的近似度分析。

关键词 支配集问题，C强支配集，完全支配集，NPC，NP-hard，近似算法

Some Variations of Dominating Set Problem

LI Zhen-Jian GE Qi WANG Hai-Tao ZHU Hong
(Dept. of Computer Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract Two variations of the dominating set problem are presented, both of which have corresponding application background. In this paper, we prove the decision problems of the two variations are NPC. Furthermore, the approximation algorithms for their corresponding optimization problems as well as their approximation ratios are also given.

Keywords Dominating set problem, Cstrong dominating set problem, Complete dominating set problem, NPC, NP-hard, Approximation algorithm

1 引言

图的支配集问题在计算机网络和通信领域中有着重要的应用。形式上，支配集可描述如下：给定无向图 $G=\langle V,E\rangle$，其中 V 是大小为 n 的点集，E 是边集，那么 V 的一个子集 S 称为支配集当且仅当对于 $V-S$ 中任何一个点 v，都有 S 中的某个定点 u，使得 $(u,v)\in E$。这时我们称点 u 支配点 v 并把 S 中的点称为支配点。支配集的判定问题就是判定图 G 中是否有大小不大于正整数 $k(k\leqslant n)$ 的支配集。其优化问题就是求出规模最小的支配集。支配集的判定问题是NPC(即NP完全)的[1,2]。在这篇文章里，我们研究支配集问题的两个变形。首先给出与这些问题相关的定义。

定义1 在图 $G=\langle V,E\rangle$ 中，V 的一个子集 S 称为 C 强支配集(C 是某个固定的常正整数)当且仅当对任何一个大小不小于 $|S|-C$ 的 S 的一个子集 S'，对于 $V-S$ 中任何一个顶点 v，都有 S' 中的某个定点 u，使得 $(u,v)\in E$。

定义2 在图 $G=\langle V,E\rangle$ 中，V 的一个子集 S 称为完全支配集当且仅当对于 V 中任何一个点 v，都有 $S-\{v\}$ 的某个点 u，使得 $(u,v)\in E$。

由此，得到 C 强支配集(完全支配集)的判定问题：在图 G 中是否有大小不大于正整数 $k(k\leqslant n)$ 的 C 强支配集(完全支配集)。这两个问题都有着相应的应用背景，简单说就是：当支配集 S 中某些点(点数不大于 C)失效即不能支配其它点了但是支配集 S 剩下的支配点仍能够支配 $V-S$ 的点，这时支配集的求解就是 C 强支配集问题；对于完全支配集问题，当要求支配集 S 中的点自身没有对自己的支配权而须由别的点支配的时候，这时支配集的求解就是完全支配集问题。C 强支配集和完全支配集的优化问题都是求解最小的相应支配集。

C 强支配集和完全支配集的判定问题都是NPC的。本文的第2节给出这两个问题的NPC证明。第3节则给出这两个优化问题的近似算法和近似度分析。

2 C 强支配集和完全支配集判定问题的NPC证明

在这节里，我们先证明 C 强支配集和完全支配集判定问题的NPC证明，它们都是通过3SAT判定问题多项式规约来证明其NPC。

定理1 C 强支配集判定问题是NPC的。

证明：首先我们先证明该问题是NP的。对于一个无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 和一个整数 k，我们给出的一个验证是 V 的一个子集 S。这时验证算法首先验证 $|S|\leqslant k$，然后验证以下是否正确：任何一个大小不小于 $|S|-C$ 的 S 的一个子集 S'，使得对于 $V-S$ 中任何一个顶点 v，都有 S' 中的某个定点 u，使得 $(u,v)\in E$。容易知道这个验证算法是在多项式时间内完成的，因此该判定问题是NP的。

下面我们通过将3SAT问题多项式规约到该问题来证明其NP-hard。

令一个3SAT问题的实例是一个合取范式 ϕ，其含有 m 个变量即变量集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 和 l 个子句 $c_1,c_2,\cdots,c_l$(每个子句里含有三个互不相同的文字)。现在通过 ϕ 构造图 G：对于每个子句 $c_j(1\leqslant j\leqslant l)$，构造一个标志为 c_j 的点；对于每个变量 $x_i(1\leqslant i\leqslant m)$，构造含有 $3(C+1)$ 个点的子图 G_i：其中 $C+1$ 个标志为 x_i，$C+1$ 个标志为 $\overline{x_i}$，另还有剩下的 $C+1$ 个点没有标志，标志为 x_i 和 $\overline{x_i}$ 的任两个点有边相连，每个没有标志的点和每个有标志(x_i 或 $\overline{x_i}$)的点有边相连，而任两个有相同标志的点没有边相连(如图1显示了 $C=1$ 时 G_i 的构成)；最后对于每个子句 $c_j(1\leqslant j\leqslant l)$ 里面出现的文字 y，标志为 c_j 的点与 G_i 中标志为 y 的点有边相连。比如：

*)本研究受到国家自然科学基金第60496321和60373021号以及上海市科技发展基金第03JC14014号资助。**李镇坚** 硕士研究生，主要研究领域为算法设计与分析、计算复杂性。**葛 启**，**王海涛** 硕士研究生；**朱 洪** 教授，博士生导师。

维普资讯 http://www.cqvip.com

$\phi=(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$

$C=1$

对应的图 G 如图 2 所示。

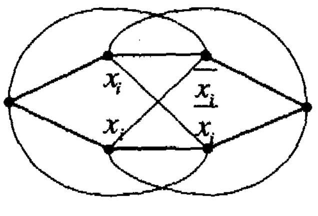

图 1　$C=1$ 时子图 G_i 的构成

易知每个子图 G_i 是多项式时间可构造的，所以图 G 的构造是多项式完成的。

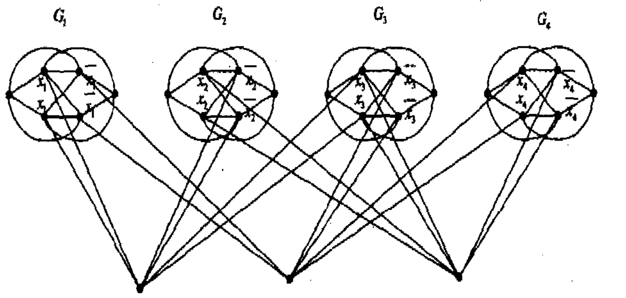

图 2　$C=1$ 时根据 ϕ 所构造的 G

现在证明 ϕ 是可满足的当且仅当图 G 有大小为 $(C+1)m$ 的 C 强支配集。

$\Rightarrow$　当 ϕ 是可满足时，这时在变量集 X 中有可满足赋值 θ 使 ϕ 为真，对于图 G 构造 $D=\{v|v$ 的标志是 y，并且在赋值 θ 中 y 值为真$\}$。容易验证 D 为图 G 的大小为 $(C+1)m$ 的 C 强支配集。

$\Leftarrow$　当图 G 有大小为 $(C+1)m$ 的 C 强支配集时，令其为 D。

引理 1　设 G 有大小为 $(C+1)m$ 的 C 强支配集，则每个子图 $G_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中恰有 $C+1$ 个支配点。

证明：假设在子图 $G_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中的支配点个数小于 $C+1$ 即不大于 C。因为子图 G_i 中含有 $C+1$ 个没有标志的点，那么如果在子图 G_i 中的所有支配点失效时，至少有一个未标志的点没有被支配到，与 C 强支配集的定义矛盾，所以每个子图 G_i 中含有的支配点不小于 $C+1$。又因为 $|D|=(C+1)m$ 和子图 G_i 共有 m 个，所以每个子图 $G_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中恰有 $C+1$ 个支配点。

由引理 1 得知 C 强支配集 D 是由每个子图 $G_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中 $C+1$ 个支配点构成的，因此每个标志为 $c_j(1 \leqslant j \leqslant l)$ 的点都不属于 C 强支配集 D。

引理 2　设 G 有大小为 $(C+1)m$ 的 C 强支配集，则每个子图 $G_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中的 $C+1$ 个支配点要么都是有标志且都为相同标志的点，要么都是没有标志的点。

证明：假设这 $C+1$ 个支配点中既含没有标志的点又含有标志的点，那么这些有标志的支配点个数不大于 C，并且这些支配点中既有标志的也有没有标志的。当有标志的支配点都失效时，在 C 强支配集 D 中就没有点来支配在 G_i 中那些没有标志的非支配点，与 C 强支配集的定义矛盾，所以这些支配点要么都是没有标志的，要么都是有标志的。现在假设这些支配点都是有标志的但都不是同一标志，那么具有同一标志的支配点个数必不大于 C 并且剩下那些有标志的非支配点也都是不具有同一标志。不失一般性，假设在 G_i 中标志为 x_i 的那些支配点都失效时，那么就没有点来支配那些标志为 $\overline{x_i}$ 的非支配点，与 C 强支配集的定义矛盾，所以这些 $C+1$ 个支配点要么都是有标志的且都为相同标志的点，要么都是没有标志的点。

这样对于在每个图 G_i 中的这些支配点，如果是有标志的，那么令所标志的对应文字（x_i 或 $\overline{x_i}$）的真值为真，否则令 x_i 为任意真值。可以看出这样得到的 X 的赋值能使 ϕ 满足。

定理 2　完全支配集判定问题是 NPC 的。

证明：首先我们先证明该问题是 NP 的。对于一个无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 和一个整数 k，我们给出的一个验证是 V 的一个子集 S。这时验证算法也首先验证 $|S| \leqslant k$，然后验证以下是否正确：对于 V 中任何一个点 v，都有 $S-\{v\}$ 的某个点 u，使得 $(u,v) \in E$。容易知道这个验证算法也是在多项式时间完成的，因此该判定问题是 NP 的。

跟定理 1 类似，该问题 NP-hard 的证明也是通过 3SAT 来证明的。

令一个 3SAT 问题的实例是一个合取范式 ϕ，其含有 m 个变量即变量集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 和 l 个子句 $c_1,c_2,\cdots,c_l$（每个子句里含有三个互不相同的文字）。现在通过 ϕ 构造图 G：对于每个子句 $c_j(1 \leqslant j \leqslant l)$，构造两个标志为点 c_j 的点；对于每个变量 $x_i(1 \leqslant i \leqslant m)$，构造两个三角形 $\Delta_i^1,\Delta_i^2(1 \leqslant i \leqslant m)$，每个三角形各含有标志为 $x_i,\overline{x_i}$ 的点和没有标志的点，并且在这两个三角形之间具有相同文字的点有边相连；最后对于每个子句 $c_j(1 \leqslant j \leqslant l)$ 里面出现的文字 y，两个标志为 c_j 的点分别与两个 Δ_i 中标志为 y 的两个点相连。例如：

$\phi=(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$

构造的图 G 如图 3 所示。

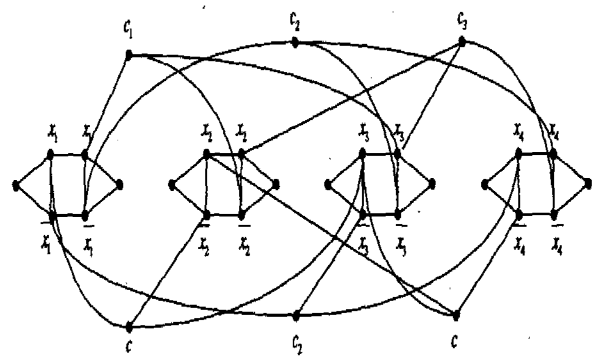

图 3　根据 ϕ 构造出来的 G

易验证图 G 的构造是多项式完成的。现在证明 ϕ 是可满足的当且仅当图 G 有大小为 $2m$ 的完全支配集。

$\Rightarrow$　当 ϕ 是可满足时，这时在变量集中有可满足赋值 θ 使 ϕ 为真，这时对于图 G 构造 $D=\{v|v$ 的标志是 y，并且在赋值 θ 中 y 值为真$\}$。容易验证 D 为图 G 的大小为 $2m$ 的完全支配集。

$\Leftarrow$　当图 G 有大小为 $2m$ 的完全支配集时，令其为 D。由于在每个三角形 $\Delta_i^h(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant h \leqslant 2)$ 中含有没有标志的点，那么在每个三角形中必然至少有个支配点。又因为 $|D|=2m$，所以每个三角形恰有一个支配点并且是有标志的点（否则该点不能被其它的支配点支配）。根据完全支配集的定义知道在 $\Delta_i^1,\Delta_i^2(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中的两个支配点必有边相连，由 G 的构成可以看出这两个支配点的标志是同一的。这样令所有

（下转第 186 页）

维普资讯 http://www.cqvip.com

2002

2 Lee H C, Gaensslen R E. Advanceds in Fingerprint Technology. New York: Elsevier, 1991

3 Maio D, Maltoni D, Cappelli R, Wayman J L, et al. FVC2000: fingerprint verification competition. TPAMI, 24(3): 402~412

4 Prabhakar S, Wang J, Jain A K, et al. Verification and classification for fingerprint matching. ICPR, 1: 25~29

5 Ratha N, Chen S, Jain A K. Adaptive flow orientation bases feature extraction in fingerprint images. Pattern Recognition, 1995, 28(11): 1657~1672

6 Wu Chenyu, Zhou Jie, Bian Zhao-qi, et al. Robust crease detection in fingerprint images. In: The 2003 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'03)

7 Hong L, Wan Y, Jain A K. Fingerprint Image Enhancement: Algorithm and Performance Evaluation. IEEE Trans Pattern Anal, and MachineIntell, 1998, 20(8): 777~789

8 Gabor D. Theory of communication[J]. Journal of the Institute of Electrical Engineers, 1946, 93(26): 429~457

9 Hui Hong, Zhou Hong, Wang Le-yu. Optimal Gabor filters design for fingerprint recognition[A]. In: Proceedings of SPIE[C]. Bellingham, WA, USA: SPIE, 2002, 4790: 559~565

10 Hui H, Zhou H, Wang Le-yu. Structure-based fingerprint matching using optimal Gabor filters[A]. In: Proceedings of SPIE [C]. Bellingham, WA, USA: SPIE, 2002, 4925: 22~28

11 Jain A, Hong L, Pankanti S, et al. An identity authentication system using fingerprints. In: Proc. of IEEE, 1997, 85(9): 1365~1388

12 刘循,游志胜. 多尺度形态学图像边缘检测方法. 光电工程, 2003, 30(3)

(上接第 178 页)

Δ_i^j $(1\leqslant i\leqslant m)$的支配点的标志文字 y 的真值为真,可以看出这样得到的 X 的赋值能使 ϕ 满足。

3 C强支配集和完全支配集优化问题的近似算法

首先我们考虑一下几个跟集合相关的问题。

给定多重集合簇 $X=\{S_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$, $\bigcup_{i=1}^{n} S_i=U$,现有如下几个优化问题:

问题 1 对于常整数 C,在 X 中求出规模最小的子集 X' 使得 $\bigcup_{S_i\in X'}S_i=U$ 且满足:对于 X' 的任何子集 X'',当 $|X''|\leqslant C$ 时都有 $\bigcup_{S_i\in X'-X''}S_i=U$。

问题 2 对于常整数 C,在 X 中求出规模最小的子集 X' 使得 $\bigcup_{S_i\in X'}S_i=U$ 且满足:对于任何元素 $e\in U$,在 X' 中至少有 $C+1$ 个 S_i 都含有 e。

问题 3 在 X 中求出规模最小的子集 X' 使得 $\bigcup_{S_i\in X'}S_i=U$ 且满足:对于 X 中的任何元素 S_i,在 X' 中都存在一个不为 S_i 的元素 S_j,使得 $S_i\cap S_j\neq\varnothing$。

为了方便对后面近似算法的近似度分析,我们给出 (U,X) 多重集合覆盖优化问题的定义:在 X 中求出规模最小的子集 X' 使得 $\bigcup_{S_i\in X'}S_i=U$。另外也可以看出问题 2 是多重集合覆盖优化问题的扩展即多重集合多重覆盖优化问题。

如果对每个点 u 构造集合 $S_u=\{u\}\cup\{v\mid(u,v)\in E\}$,那么 C 强支配集和完全支配集优化问题就是问题 1 和问题 3 的特殊情形。这样这两个支配集的优化问题就可以转化为问题 1 和问题 3 的优化问题。

容易看出,问题 1 和问题 2 这两个问题是等价的。Vazirani 对于问题 2 即多重集合多重覆盖优化问题在文[3]中给出了对于这一问题的近似度为 $1+\ln\alpha$ 其中($\alpha=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|$)的近似算法。所以基于多重集合多重覆盖的 C 强支配集优化问题的近似算法近似度也为 $1+\ln\alpha$。

而对于问题 3,我们给出跟集合覆盖问题类似的贪心算法,算法描述如下:

GREEDY(U,X)

1 if(对于 X 中的任何元素 S_i,在 X 中都存在一个不为 S_i 的元素 S_j,使得 $S_i\cap S_j\neq\varnothing$)

2 then goto 3
else return false

3 $Z\leftarrow U$

4 $X'\leftarrow\varnothing$

5 while $Z\neq\varnothing$

6 在 X 中选出能使 $|S\cap Z|$ 最大的一个元素 S

7 $Z\leftarrow Z-S$

8 $X'\leftarrow X'\cup\{S\}$

9 end while

10 $Y\leftarrow X-X'$

11 while (如果在 X' 中存在某个 $S_i(1\leqslant i\leqslant|X'|)$,使得 X' 中每个不为 S_i 的元素 S_j,都有 $S_i\cap S_j=\varnothing$)

12 在 Y 中选取一个 S' 使得 $S'\cap S_i\neq\varnothing$

13 $X'\leftarrow X'\cup\{S'\}$

14 $Y\leftarrow Y-\{S'\}$

15 end while

16 return X'

容易看出 GREEDY 算法是在多项式时间内完成的。现在来分析该算法的近似度。令问题 3 的最优解是 OPT, GREEDY 算法终了时所给解的大小为 t。又令实例 (U,X) 上的多重集合覆盖问题的最优解是 OPT',GREEDY 算法中在第 9 步结束时所产生的 X' 的大小为 t'。

根据 GREEDY 算法得知最终得到的解 X' 有两部分构成:首先是在算法第 5~9 步生成的;其次是在算法第 11~15 步生成的。根据算法第 11~15 步的描述我们可以看出第二部分产生的元素个数不会超过第一部分(因为对于第一部分生成的 X' 中的每个元素根据算法第 11 和 12 步的描述最多会有一个新元素产生),所以容易得知

$$t\leqslant 2t' \tag{1}$$

根据类似文[4]中的集合覆盖近似算法的分析,得到

$$t'\leqslant(\ln\alpha+1)OPT' \tag{2}$$

由于 OPT 本身也是集合覆盖,因此有

$$OPT'\leqslant OPT \tag{3}$$

结合以上的(1),(2),(3),容易得出 $t\leqslant 2(\ln\alpha+1)OPT$,因此 GREEDY 算法的近似度为 $2(\ln\alpha+1)$。

结束语 本文对图支配集问题的两个有应用背景的变形进行了研究。关于如何获得更好的近似度和下界则需要进一步的研究。

参考文献

1 Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP- Completeness. W. H. Freeman and Company, 1979

2 Karp R M. Reducibility Among Combinatorial Problems. In: Proc. of a Symposium on the Complexity of Computer Computations, 1972. 85~103

3 Vazirani V. Approximation Algorithms. Springer-Verlag, July 2001

4 Cormen T H, Leiserson C E, Rivest R L, Stein C. Introduction to Algorithms. The MIT Press, May 2001