一些新的 Hamilton 图的必要条件*)

文中华[1,2]　黄　巍[1]　姜云飞[1]

(中山大学软件研究所　广州 510275)[1]　(湘潭大学信息工程学院　湘潭 411105)[2]

摘　要　寻求 Hamilton 图的适当的特征刻画是图论的一个重大未解决问题，根据图的结构特征，设计了图的顶点的分层方法，研究了 Hamilton 图中层与层间对外顶点数和对外边数应该满足的关系，分析了 Hamilton 图中每层顶点数与每层对外顶点数的关系，探讨了图与其 Hamilton 演化图的 Hamilton 性关系，最后得到一些新的 Hamilton 图的必要条件。所获得的新的 Hamilton 图的必要条件实用性强，使用方便，能判断一些原必要条件不能判断的非 Hamilton 图。

关键词　Hamilton 图，必要条件，分层方法，Hamilton 演化图

A Series of New Necessary Conditions for a Graph to Be Hamiltonian

WEN Zhong-Hua[1,2]　HUANG Wei[1]　JIANG Yun-Fei[1]

(Institute of Software, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275)[1]

(College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105)[2]

Abstract　It is not solved what specific property of a Hamiltonian graph is. Depending on structural properties of a graph, a way to divide vertices of the graph into several groups is designed. It is studied that the relationship between number of vertices and bounds of the before layer and number of vertices and bounds of the next layer. The relationship between a graph and its Hamiltonian evolutionary graph is researched. Some results concerning necessary condition for a graph to be Hamiltonian are proved. It is proved that the new necessary conditions for a graph to be Hamiltonian are not only efficient but also convenient. We show how the results give an easy proof of the nonexistence of a Hamiltonian cycle in the Petersen graph.

Keywords　Hamiltonian graph, Necessary condition, Hierarchical method, Hamiltonian evolution graph

1　引言

设 $G=(V,E)$ 是一个图，如果 G 中存在经过所有顶点一次且仅一次的回路，则称 G 为 Hamilton 图，该回路称为 Hamilton 回路，判定任意给定的图是否为 Hamilton 图的问题称为 Hamilton 回路问题[1]。目前对 Hamilton 回路问题的研究有很多[2~12]，判定任意给定的图是否为 Hamilton 图是 NP 完全问题[13]，这一问题是计算机科学的重大难题之一，拓展 Hamilton 图的实用特征仍然被认为是图论的一个重大问题[14]。研究 Hamilton 图的必要条件对 Hamilton 图的判定有很好的实用作用。现有的关于 Hamilton 图的必要条件的研究成果有很多[15~18]。对文[15]中的 Hamilton 图的必要条件来说，检验给定的图是否满足该必要条件本身就是很难的；文[16]中的 Hamilton 图的必要条件是针对一类特殊的图(正则图)展开的研究；文[17]中的 Hamilton 图的必要条件的研究是利用图的矩阵的本征值而得到的，不易检验，也有大量本身不是 Hamilton 图的图满足文[17]中的 Hamilton 图的必要条件；其它各种各样的对 Hamilton 图的必要条件的研究都有各自的特点，也都有各自的局限性。总的说来，以往的 Hamilton 图的必要条件中的条件如果易于检验，则往往条件很弱，很多不是 Hamilton 图的图都满足这些必要条件，如果条件较强，往往不易检验。因此，我们有必要对 Hamilton 图的必要条件作进一步的研究。

本文对 Hamilton 图的必要条件的研究采用与已有的对 Hamilton 图的必要条件的研究完全不同的方法，首先设计了将图的顶点分成若干层的方法，得到了 Hamilton 图分层后的层与层之间的对外顶点数的关系，对外边数的关系以及每层内部顶点的关系，获得了图与其 Hamilton 演化图的关系，最后得到了一些新的 Hamilton 图的必要条件。这些新的 Hamilton 图的必要条件可以反复使用在图和其 Hamilton 演化图上。对所得到的新的 Hamilton 图的必要条件，检验给定的图是否满足该必要条件比较方便，实用性强，并且一些客观上不是 Hamilton 图的图，满足原有的 Hamilton 图的必要条件，但利用本文的必要条件能给出它们不是 Hamilton 图的判定。

由于一个图 G 是 Hamilton 图当且仅当 G 的基础简单图是 Hamilton 图，因此下面我们只考虑简单图。

2　顶点的分层方法

定理 2.1[15]　若 $G=(V,E)$ 是一个 Hamilton 图，则对于 $V(G)$ 的每个非空真子集 S，$k(G-S)\leqslant|S|$。这里 $k(G-S)$ 表示 $G-S$ 的分支数。

由定理 2.1 可得到如下推论：

推论 2.1　若 G 是一个 Hamilton 图，则 G 是连通的且每个顶点的度大于等于 2。

定理 2.1 给出了一个图是 Hamilton 图的必要条件，应用

*)教育部科学技术研究重点项目(02149)。**文中华**　博士生，讲师，主要研究领域为图论及算法、智能规划；**黄　巍**　博士生，主要研究领域为图论及算法、智能规划；**姜云飞**　教授，博士生导师，主要研究领域为智能规划、模型诊断和自动推理。

这个定理，有时可以证明一个给定的图 G 不是 Hamilton 图，但这种方法并不是总是有效的。为了验证一个给定的图 G 是不是满足该必要条件，多数情况下，要一个个去找 $V(G)$ 的每个非空真子集 S，并要一个个比较 $k(G-S)$ 与 $|S|$ 的大小，这个工作量本身就非常大，因此，这个必要条件有它很大的局限性。

为了获得更实用的 Hamilton 图的必要条件，我们首先给出如下定义。

定义 2.1 设 $G=(V,E)$ 是一个含有 $n(n\geqslant 3)$ 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的连通图，M 是 G 的邻接矩阵（当顶点 v_i 到 v_j 有边相连时，M 的元素 m_{ij} 为 T，否则为 F，$m_{ii}=F$）。$R_k=M+M^2+\cdots+M^k(1\leqslant k<n)$，使 R^k 中除主对角线以外的元素全为 T 的最小的 k 称为 G 的连通长度。

定理 2.2 设 $G=(V,E)$ 是一个含有 $n(n\geqslant 3)$ 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的连通图，k 是 G 的连通长度，如果 $k>n/2$，则 G 不是 Hamilton 图。

证明：采用反证法，假设 G 是 Hamilton 图，则 G 中存在一条 Hamilton 回路 cycle，对于 cycle 回路中的任何两点 v_i 和 v_j，按顺时针方向转圈，如果从 v_i 到 v_j 要走大于 $n/2$ 步，则从 v_j 到 v_i 所要走的步数必小于 $n/2$，如果从 v_i 到 v_j 要走 $n/2$ 步，则从 v_j 到 v_i 也要走 $n/2$ 步，在此情况下，根据定义 2.1，G 的连通长度 k 不可能大于 $n/2$，这与已知条件矛盾，所以，假设错误，即原结论成立。

设 $G=(V,E)$ 是一个含有 $n(n\geqslant 3)$ 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的连通图，如果 G 的连通长度是 1，则 G 是完全图，此时，G 是 Hamilton 图。

设 $G=(V,E)$ 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的连通图，G 的连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$，对 G 的顶点进行分层的 WZH 顶点分层方法如下：

设 $R_{k-1}=M+M^2+\cdots+M^{k-1}$，根据定义 2.1，$R_{k-1}$ 的非主对角线的元素中至少有一个值为 F，找出一个值为 F 的元素 $r_{ij}(i\neq j)$，将 v_i 作为第一层的唯一的顶点，v_j 作为最后一层的顶点（最后一层可能还有其它顶点）。

将与第一层的顶点通过边相连的顶点作为第二层顶点。

将与第 $s(2\leqslant s\leqslant k)$ 层的顶点通过边相连的而又不在第 s 层和第 $s-1$ 层的顶点作为第 $s+1$ 层的顶点。

按 WZH 顶点分层方法对含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点的且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的图 G 进行分层，G 的顶点被分成了 $k+1$ 层，其中第一层只有一个顶点。

对 G 的顶点按 WZH 顶点分层方法进行分层，不会增加边，也不会减少边，只是根据顶点间的相连关系将顶点分成了若干层，不会改变 G 的结构。

3 Hamilton 图中外部通讯应满足的关系

设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后，假设将 G 分层后得到的图为 G_1，设 G_1 的第 $s(1\leqslant s\leqslant k+1)$ 层的顶点个数为 z_s，则 $z_1+z_2+\cdots+z_{k+1}=n$，显然 $z_1=1$。

如果 G_1 是 Hamilton 图，则第一层的一个顶点只有通过与第二层的顶点相连构成 Hamilton 回路，第 $s(2\leqslant s\leqslant k)$ 层的 z_s 个顶点只有通过与第 s 层、第 $s-1$ 层和第 $s+1$ 层的顶点相连构成 Hamilton 回路，第 $k+1$ 层的 z_{k+1} 个顶点只有通过与第 $k+1$ 层和第 k 层的顶点相连构成 Hamilton 回路。

我们将同一层顶点之间的相连称为内部通讯，不同层顶点之间的相连称为外部通讯。根据 WZH 顶点分层方法，则 G_1 的第一层的顶点与第二层的顶点有外部通讯，第 $s(2\leqslant s\leqslant k)$ 层的顶点与第 $s-1$ 层和第 $s+1$ 层的顶点都有外部通讯，第 $k+1$ 层的顶点与第 k 层的顶点有外部通讯，也就是说每层都有外部通讯。如果图 G_1 中存在 Hamilton 回路，则外部通讯要满足相应的条件。

定义 3.1 设 $G=(V,E)$ 是一个已分层的 Hamilton 图，cycle 是 G 的一条 Hamilton 回路，$v_iv_{i1}v_{i2}\cdots v_{it}v_j$ 是 cycle 中的一段，$v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{it}$ 是 G 的同一层的 $t(t\geqslant 1)$ 个不同的顶点，v_i 与 v_{i1} 不在同一层，v_j 与 v_{it} 不在同一层，称 $\Gamma=v_{i1}v_{i2}\cdots v_{it}$（$t=1$ 时，Γ 中只有一个顶点 v_{i1}）为一个 Hamilton 外部顶点，cycle 在 G 的某一层的所有的 Hamilton 外部顶点称为 cycle 在该层的 Hamilton 外部顶点数。

由定义 3.1 可得：一个 Hamilton 外部顶点在构成 Hamilton 回路时有且仅有两条边与外层的 Hamilton 外部顶点相连。

设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后，对任何一个顶点来说，有可能有两条边（或两条以上）与外层顶点相连，有可能只有一条边与外层顶点相连，对这些具有不同外部通讯能力的顶点，我们给出如下的定义。

定义 3.2 设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后所得的图为 G_1，G_1 中有两条边（或两条以上）与外层顶点相连的顶点称为可能的外部顶点，只有一条边与外层顶点相连的顶点称为可能的半外部顶点。

根据定义 3.2，G_1 中任何一层的顶点要么是可能的外部顶点，要么是可能的半外部顶点。可能的半外部顶点只有一条边与它所在层的上一层相连，没有边与下一层顶点相连。

在 G_1 中第 $s(1\leqslant s\leqslant k+1)$ 层的可能的外部顶点的个数记为 a_s，显然，$a_1=1$。

在 G_1 中同层顶点之间也可能有边相连，如果两个同层的可能的半外部顶点之间有一条边相连，我们将它们合在一起看成一个点，称为这两个可能的半外部顶点的合成点。一个可能的半外部顶点参与一次合成之后，不能再次参与合成，求出 G_1 的第 $s(1\leqslant s\leqslant k+1)$ 层的合成点个数的最大值 b_s，显然，$b_1=0$。

定义 3.3 设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 k+1 层以后所得的图为 G_1，a_s 是 G_1 的第 $s(1\leqslant s\leqslant k+1)$ 层的可能的外部顶点的个数，b_s 是第 s 层的合成点个数的最大值，$c_s=a_s+b_s$ 称为 G_1 的第 s 层的最大可能外部顶点数。

定义 3.4 设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后所得的图为 G_1，如果 $v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{it},v_j$ 是 G_1 的同一层的 $t+1(t\geqslant 1)$ 个不同的顶点，且 $\Gamma=v_{i1}v_{i2}\cdots v_{it}$ 是 G_1 中的一条初级通路（$t=1$ 时，Γ 中只有一个顶点 v_{i1}），v_j 与 v_{i1}（或 v_{it}）有边相连，称 $v_jv_{i1}v_{i2}\cdots v_{it}$（或 $v_{i1}v_{i2}\cdots v_{it}v_j$）为该层的一个初级通路顶点，这个过程称为同层顶点溶合。

根据定义 3.4，初级通路顶点的起点和终点都至少有一条边与外层顶点相连，因此，初级通路顶点与外层相连的能力跟可能的外部顶点一样。

对 G_1 的第 $s(s=2,3,\cdots,k,k+1)$ 层的顶点尽可能多地进行同层顶点溶合，直到不能继续进行同层顶点溶合为止，将初级通路顶点看成一个可能的外部顶点(初级通路顶点中包含的所有顶点不再重复计算)，所得的可能的外部顶点个数的最小值计为 d_s。

定义 3.5 设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后所得的图为 G_1，v_j 是图 G_1 的第 $s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$ 层的顶点，v_j 与它所在层的下(上)一层共有 x 条边相连，如果 $0\leqslant x\leqslant 2$，则 $y=x$，如果 $x>2$，则 $y=2$，称 y 为顶点 v_j 的下(上)行能力。图 G_1 的第 s 层的所有顶点的下(上)行能力的和 $f_s(g_s)$ 称为该层顶点的下(上)行能力。

定义 3.6 设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后所得的图为 G_1，c_s、c_{s+1} 分别为图 G_1 的第 $s(s=2,3,\cdots,k)$ 层和第 $s+1$ 层最大可能外部顶点数，f_s 为 G_1 的第 s 层的顶点的下行能力，g_{s+1} 为 G_1 的第 $s+1$ 层的顶点的上行能力，f_s、g_{s+1}、$2\times c_s-2$ 和 $2\times c_{s+1}-2$ 的最小值 e_s 称为图 G_1 的第 s 层的下通讯能力(或第 $s+1$ 层的上通讯能力)。

定理 3.1 设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的 Hamilton 图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后所得的图为 G_1，G_1 的每层的最大外部顶点数为 $c_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$，每层的必须外部顶点数为 d_s，e_t 为 G_1 的第 $t(t=1,2,\cdots,k)$ 层的下通讯能力 $(e_1=2)$，则满足如下条件的数组 $x_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$ 有解：① x_s 是一取值为正整数的数组，其中 $x_1=1$，$d_s\leqslant x_s\leqslant c_s$；当 $2\leqslant s\leqslant k$ 时，$x_s\geqslant 2$；② $x_s\leqslant x_{s+1}+x_{s-1}-2(s=3,\cdots,k-1)$，$x_k\leqslant x_{k+1}+x_{k-1}-1$，当 $k\geqslant 3$ 时，$x_2\leqslant x_3+x_1-1$($k=2$ 时，$x_2\leqslant x_3+x_1$)；③ $y_1=2$，当 $2\leqslant s\leqslant k$ 时，$y_s=2\times x_s-y_{s-1}$，$2\leqslant y_s\leqslant e_s$。

证明：设 cycle1 是 G 的一条 Hamilton 回路，则 cycle1 也是 G_1 的一条 Hamilton 回路，设 h_s 是 cycle1 在第 $s(1\leqslant s\leqslant k+1)$ 层的 Hamilton 外部顶点数。

① 显然，根据定义 3.1，$h_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$ 是一取值为正整数的数组，且 $h_1=1$。

因为 cycle1 是 G_1 的一条 Hamilton 回路，且 cycle1 的 $s(1\leqslant s\leqslant k+1)$ 层的 Hamilton 外部顶点数是 h_s，当 $2\leqslant s\leqslant k$ 时，在 cycle1 中，第 s 层与其上一层至少有两条边相连，第 s 层与其下一层至少有两条边相连，而一个 Hamilton 外部顶点在构成 Hamilton 回路时有且仅有两条边与外层 Hamilton 外部顶点相连，所以，$h_s\geqslant 2$。

因为 h_s 是 cycle1 在第 s 层的 Hamilton 外部顶点数，所以 h_s 中的每一个 Hamilton 外部顶点要么是可能的外部顶点，要么是初级通路顶点，根据定义 3.4，一个初级通路顶点 Γ 至少含有 G_1 的两个顶点，当 Γ 中含有第 s 层的 $z(1\leqslant z)$ 个可能的外部顶点时，h_s 为统计这个初级通路顶点 Γ，则比 c_s 至少减少了 $z-1$ 个可能的外部顶点的统计，当 Γ 中没有第 s 层的一个可能的外部顶点时，则至少有两个可能的半外部顶点，当 Γ 中有两个可能的半外部顶点时，Γ 在 h_s 中与在 c_s 中的统计方式是一样的，当 Γ 中有三个可能的半外部顶点时，Γ 在 h_s 中与在 c_s 中的统计方式是一样的或 h_s 比 c_s 减少了一个可能的外部顶点的统计，当 Γ 中至少有四个可能的半外部顶点时，h_s 为统计这个初级通路顶点 Γ，则比 c_s 至少减少了一个可能的外部顶点的统计。综上所述，所以，$h_s\leqslant c_s$。

根据 d_s 的定义可得：d_s 是 G_1 的第 s 层和外层相连的可能的外部顶点数的最小值(初级通路顶点中包含的所有顶点不再重复计算)，而 h_s 是实际构成 Hamilton 回路的外部顶点数(初级通路顶点中包含的所有顶点不再重复计算)，所以，$d_s\leqslant h_s$。

② 因为 cycle1 是 G_1 的一条 Hamilton 回路，所以 cycle1 中第二层的顶点有两条边与第一层的一个 Hamilton 外部顶点连起来，如果第三层不是最后一层，则 cycle1 中第三层的顶点至少有两条边与第四层通讯，而 cycle1 的第二层的所有 Hamilton 外部顶点只有与第一和第三层的 Hamilton 外部顶点通讯，所以，$h_2\leqslant h_3+h_1-1$；cycle1 的第 $s-1$ $(s=3,\cdots,k-1)$ 层至少要有两条边与第 $s-2$ 层通讯，第 $s+1$ 层至少要有两条边与第 $s+2$ 层通讯，而第 s 层的所有 Hamilton 外部顶点只有与第 $s-1$ 和第 $s+1$ 层通讯，所以，$h_s\leqslant h_{s+1}+h_{s-1}-2(s=3,\cdots,k-1)$；cycle1 的第 $k-1$ 层至少要有两条边与第 $k-2$ 层通讯，而第 k 层的所有 Hamilton 外部顶点只有与第 $k-1$ 和第 $k+1$ 层通讯，而第 $k+1$ 层的所有 Hamilton 外部顶点只有与第 k 层通讯，所以，$h_k\leqslant h_{k+1}+h_{k-1}-1$。

③ $y_s(1\leqslant s\leqslant k)$ 表示 cycle1 的第 s 层与第 $s+1$ 层之间相连的边数，显然，$2\leqslant y_s$，$y_1=2=2h_1$，由于第 s $(2\leqslant s\leqslant k)$ 层在与第 $s-1$ 层的通讯中用掉了 y_{s-1} 条边，因此，第 s 层与第 $s+1$ 层之间相连的边数 $y_s=2\times h_s-y_{s-1}$，根据定义 3.6，e_s 为图 G 的第 s 层的下通讯能力，所以 $y_s\leqslant e_s$。

综上所述，$h_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$ 就是 x_s 的一组解。

4 Hamilton 图中内部通讯应满足的关系

设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的 Hamilton 图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后所得的图为 G_1，cycle 是 G_1 的一条 Hamilton 回路，cycle 的每层的 Hamilton 外部顶点数为 $h_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$。因为 cycle 是 G 的一条 Hamilton 回路，所以，cycle 中不但不同层之间的顶点可以按 Hamilton 回路的要求连起来，而且同层顶点之间也可以按 Hamilton 回路的要求连起来。同层顶点相连是通过同层顶点溶合形成初级通路顶点达到的。

定理 4.1 设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant k\leqslant n/2)$ 的 Hamilton 图，按 WZH 顶点分层方法将 G 中的顶点分成 $k+1$ 层以后所得的图为 G_1，G_1 的每层的最大外部顶点数为 $c_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$。设 cycle 是 G_1 的一条 Hamilton 回路，cycle 的每层的 Hamilton 外部顶点数为 $h_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$，如果 $h_s\neq c_s$，则在 G_1 的第 $s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$ 层中可以通过同层顶点溶合获得 h_s 个可能的外部顶点(初级通路顶点作为一个可能的外部顶点，初级通路顶点中包含的所有顶点不再重复计算)。

证明：因为 cycle 的每层的 Hamilton 外部顶点数为 $h_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$，根据定义 3.1 和定义 3.4，一个 Hamilton 外部顶点不是一个可能的外部顶点，就是一个初级通路顶点，一个初级通路顶点只能通过同层顶点溶合获得，所以，cycle 的每层的 Hamilton 外部顶点的构成可以通过同层顶点溶合获得，而且每层的 Hamilton 外部顶点数为 $h_s(s=1,2,\cdots,k,k+1)$。

5 顶点溶合后应满足的关系

设 G 是一个含有 $n(n\geqslant 4)$ 个顶点且连通长度为 $k(2\leqslant$

$k \leqslant n/2$)的图,如果图 G 能满足定理 3.1 和定理 4.1 的是 Hamilton 图的必要条件,则至少有一组 x_s(也可能有多组),它(们)是可能构成 Hamilton 回路的每层的外部顶点数,它(们)既能满足外部通讯的要求,也能满足内部通讯的要求。如果满足定理 3.1 和定理 4.1 的 x_s 有一组 $x_s = c_s$($s=1,2,\cdots,k,k+1$)的解,且原图 G_1 中存在可能的外部顶点之间的内部通讯,则将图 G_1 的每层可能的外部顶点之间的内部通讯去掉,得到原图 G_1 的一个 Hamilton 演化图。如果满足定理 3.1 和定理 4.1 的 x_s 只有一组 $x_s=c_s$($s=1,2,\cdots,k,k+1$)的解,而且原图 G_1 中每一层都不存在可能的外部顶点之间的内部通讯,则从原图 G_1 中选择另一个顶点作为第一层的顶点对 G_1 重新分层,得到原图 G_1 的一个 Hamilton 演化图。如果满足定理 3.1 和定理 4.1 的一组解 x_s($s=1,2,\cdots,k,k+1$),存在某一个确定的 i,$x_i \neq c_i$,由 c_i 个可能的外部顶点变成 x_i 个可能的外部顶点,只能通过同层顶点溶合,将需要溶合在一起的顶点作为一个外部顶点,如果刚溶合所得到的一个外部顶点(初级通路顶点)必须参与构成图 G_1 的 Hamilton 回路,则这个初级通路顶点会排斥原图 G_1 中的很多边参与构成图 G_1 的 Hamilton 回路,将这些被排斥的边去掉,由 G_1 得到它的一个 Hamilton 演化图,在此情况下,每一个由 c_i 个可能的外部顶点变成 x_i 个可能的外部顶点的方法都对应着一个或几个 G_1 的 Hamilton 演化图。对每一组满足定理 3.1 和定理 4.1 的解,求出 G_1 的 Hamilton 演化图,从而得到 G_1 的所有 Hamilton 演化图。

定理 5.1 如果 G 是 Hamilton 图,则 G 的所有 Hamilton 演化图中至少有一个是 Hamilton 图。

证明:如果 G 是 Hamilton 图,则 G 中至少存在一条 Hamilton 回路,设为 cycle,则 cycle 就是 G 的一个 Hamilton 演化图,cycle 本身就是一个 Hamilton 图。

6 举例

如图 1(Petersen 图),它不是 Hamilton 图,但它满足定理 2.1 中的必要条件,而它不满足本文的必要条件。

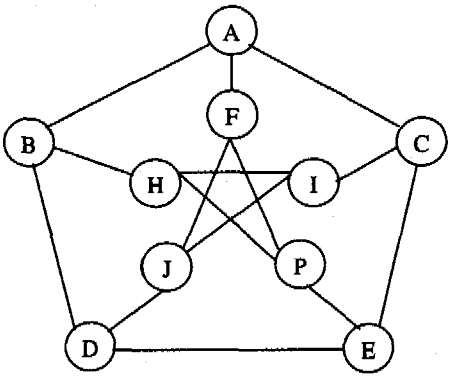

图 1 Petersen 图

从顶点 A 出发,有三条边 AB,AC 和 AF,由于图的对称性,有经过边 AF 和边 AB(或边 AC)的 Hamilton 回路,就一定有经过边 AB 和 AC 的 Hamilton 回路,因此只考虑如下图 2。

显然,G 是连通图,连通长度为 4,将 G 分层,得到 G 的分层图 G_1,如图 3。

应用定理 3.1 得,$x_3=2$,所以,将第三层 4 个可能的外部顶点溶合成 2 个可能的 Hamilton 外部顶点,应用定理 4.1 得,只有一种溶合方法,将 DE 溶合成一个可能的 Hamilton 外部顶点,将 HI 溶合成一个可能的 Hamilton 外部顶点,得到图 3 的所有 Hamilton 演化图,如图 4 和图 5。

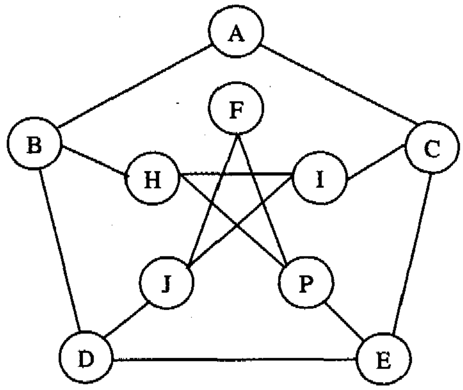

图 2 G

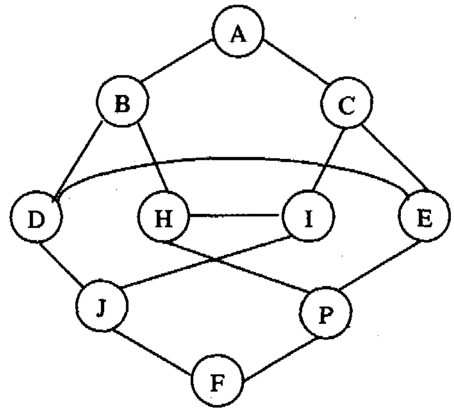

图 3 分层图 G_1

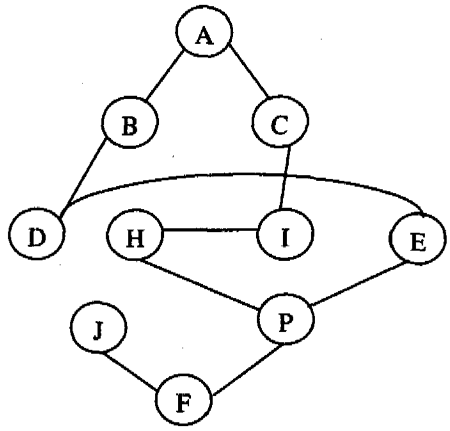

图 4 G_1 的 Hamilton 演化图

根据推论 2.1,图 4 和图 5 都不是 Hamilton 图,根据定理 5.1,G_1 不是 Hamilton 图,所以 G 不是 Hamilton 图,所以,原图 1 不是 Hamilton 图,即 Petersen 图不是 Hamilton 图。

结论 本文首先通过对图的顶点进行分层,然后研究层与层顶点之间的关系和每层内部顶点之间的关系,从而得到了新的 Hamilton 图的必要条件。这些新的 Hamilton 图的必要条件可以反复使用在图和其 Hamilton 演化图上。应用这些新的 Hamilton 图的必要条件,对于一些客观上不是 Hamilton 图的图可以方便地证明是非 Hamilton 图,还能够证明利

用原必要条件不能证明的一些图是非 Hamilton 图。利用本文 Hamilton 图的必要条件，可以进一步研究定出一类或几类非 Hamilton 图；利用本文研究必要条件的方法，可以探索在图和其 Hamilton 演化图中构造一条 Hamilton 回路，从而研究新的 Hamilton 图的充分条件和充要条件。

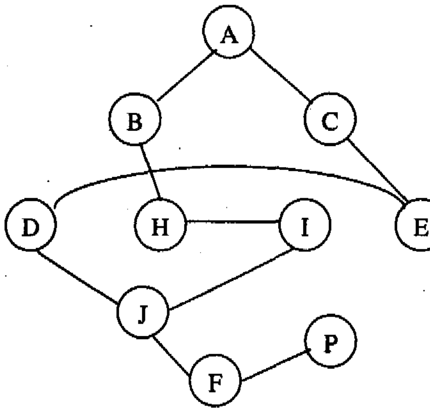

图 5　G_1 的 Hamilton 演化图

参 考 文 献

1　Tambouratzis T. Solving the Hamiltonian cycle problem via an artificial neural network. Information Processing Letters, 2000, 75(6): 237～242
2　Vladimir G D, Bettina Klinz, et al. Exact algorithms for the Hamiltonian cycle problem in planar graphs. Operations Research Letters, 2006, 34(3): 269～274
3　Ruo W H, Maw S C. Linear-time algorithms for the Hamiltonian problems on distance-hereditary graphs. Theoretical Computer Science, 2005, 341(1-3): 411～440
4　Sohel R M, Kaykobad M. Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths. Information Processing Letters, 2005, 94(1): 37～41
5　Nikolopolos S D. Parallel algorithms for Hamiltonian Problems on quasi-threshold graphs. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2004, 64(1): 48～67
6　Dimakopolos V V, Palios L, et al. On the Hamiltonicity of the Cartesian product. Information Processing Letters, 2005, 31(2): 49～53
7　Amar D, Flandrin E, Gancarzewicz G. Hamiltonian cycles and paths through matchings. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2005, 22: 543～547
8　Kaneko A, Kawarabayashi K, et al. On a Hamiltonian cycle in which specified vertices are not isolated. Discrete Mathematics, 2002, 258(1-3): 85～91
9　Frieze A, Krivelevich M. On Packing Hamilton cycle in ε-regular graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2005, 94(1): 159～172
10　Li X W, Wei B, Yu Z G, et al. Hamilton cycles in 1-tough triangle-free graphs. Discrete Mathematics, 2002, 254(1-3): 275～287
11　Li G J, Lu M, Liu Z. Hamiltonian cycles in 3-connected Claw-free graphs. Discrete Mathematics, 2002, 250(1-3): 137～151
12　Kawarabayashi K, Ota K, Saito A. Hamiltonian cycles in n-factor-critical graphs. Discrete Mathematics, 2001, 240(1-3): 71～82
13　王树和. 图论. 北京：科学出版社，2004
14　孙惠泉. 图论及其应用. 北京：科学出版社，2004
15　傅彦，顾小丰，刘启和. 离散数学. 北京：机械工业出版社，2004
16　Mohar B. A domain monotonicity theorem for graphs and Hamiltonicity. Discrete Applied Mathematics, 1992, 36(2): 169～177
17　Van den Heuvel J. Hamilton cycles and Eigenvalues of Graphs. Linear Algebra and Its Applications, 1995, 226-228: 723～730
18　Plotnikov A D. One Criterion of Existence of a Hamiltonian Cycle. Reliable Computing, 1998, 4(2): 199～202

（上接第 114 页）

发现。即使 H_{i+m+1} 和 H_i 互谋，也很快会被其后最近的诚实主机发现。

2. 如果 H_i 没有向"集"中的部分主机发送信息，不妨设 H_i 没有给主机 $H_{i+k'}$ 发送信息。由于 H_{i+m+1} 收到"集"中任一主机 H_{i+k} 发来的信息后，就知道"集"中包含主机 H_{i+1} ～ H_{i+m}。那么，H_{i+m+1} 等待一个较长时间后，H_{i+m+1} 会与 $H_{i+k'}$ 进行联系，要求 $H_{i+k'}$ 发送信息。这样，当 $H_{i+k'}$ 发现自己没有收到前驱主机的信息时，$H_{i+k'}$ 会联合 H_{i+m+1} 向 H_0 报告相应的错误信息。

3.3　计算复杂度分析

由于杂凑函数的计算复杂度远远小于公钥体制，因此协议的计算复杂度主要由公钥体制下的计算量来决定。为方便讨论，假设路由协议中采用的公钥体制（如 RSA）对于同样长度的消息，加密和验证签字的计算复杂度相同，解密则和签字的计算复杂度相同。同时，这里也省去了公钥加密和签字的基本数据长度单位（如采用 RSA，可取单位长度为模长度 1024 比特）。

1. 用户方面：从（1）式看到，由于"集"中的 m 个主机的路由信息需要被嵌入到用户签名的 H_i 的路由信息中，因此对于用户 H_0 来说，加密和签字的计算复杂度均为 $n+m+1$。

2. 路由主机方面：从协议中可以看出，除了主机 H_i 和 H_{i+m+1} 外，其他主机 $H_l(l\neq i,i+m+1)$ 只需进行两次基本解密、两次验证签字、一次签字以及一次加密；对于主机 H_i，由于需要向"集"中所有主机传递信息，因此它需要进行两次基本解密、两次验证签字、一次签字和 m 次加密；而对于主机 H_{i+m+1}，由于需要对"集"中所有主机传递来信息进行解密和验证，因此它需要进行 $2m$ 次基本解密、$2m$ 次验证签字、一次签字和一次加密。所以，我们得出路由主机加密（验证签字）的复杂度为：$3(n-2)+(m+2)+(2m+1)=3(n+m-1)$；签字（解密）的复杂度为 $3(n-2)+(2+1)+(2m+1)=3n+2m-2$。

表 1 是协议与 Mir J 方案的计算复杂度比较。

表 1　路由协议计算复杂度比较

路由方案 / 计算复杂度	用户		路由主机	
	加密	签字	加密（验证签字）	签字（解密）
Mir J 方案[3]	$\frac{n(n+1)}{2}+m$	$n+m$	$n+m$	$\frac{n(n+1)}{2}+m$
本文方案	$n+m+1$	$n+m+1$	$3(n+m-1)$	$3n+2n-2$

结论　移动代理技术是一种新兴的技术，为分布式系统带来了更大的灵活性、更好的性能等诸多优点，尤其是应用在大型的异构网络上，如 Internet。移动代理虽然带来了很多网络应用的优点，但同时伴随着也带来了许多新的安全问题。本文提出了一个新的移动代理集式路由协议，在安全性和计算复杂度方面对协议进行了详细的分析。结果表明，协议满足移动代理路由的所有安全要求，与已有方案相比，不仅具有较低的计算复杂度，而且去除了原方案中拥有"完全可信主机"的假设，具有更好的适用性。

参 考 文 献

1　Borselius N. Mobile agent security[J]. Electronics & Communication Engineering Journal, 2002, 14(5): 211～218
2　柳毅，伍前红，王育民. 基于移动代理的可变路由安全协议[J]. 计算机学报，2005，28(7): 1118～1122
3　Mir J, Borrell J. Protecting General Flexible Itineraries of Mobile Agents [A]. LNCS 2288[C], Berlin: Springer-Verlag, 2002. 382～396
4　Domingo-Ferrer J. Mobile Agent Route Protection through Hash-Based Mechanisms[A]. LNCS 2247[C], Berlin: Springer-Verlag, 2001. 17～29
5　Westhoff D, Schneider M, Unger C, Kaderali F. Methods for Protecting a Mobile Agent's Route[A]. LNCS 1729[C], Berlin: Springer-Verlag, 1999. 57～71