

模糊推理三 I 算法的连续性和逼近性^{*})

潘海玉 裴道武 黄阿敏

(浙江理工大学信电学院 杭州 310018)

摘要 三 I 算法是一种新的模糊推理方法, 可以作为传统的模糊推理方法的修改和补充。系统地研究了三 I 支持度算法和反向三 I 支持度算法的连续性问题, 并指出了基于一些常用的蕴涵算子的三 I 算法具有逼近性。此结果对构建模糊控制系统和模糊专家系统时选用三 I 推理算法具有一定的指导作用。

关键词 三 I 算法, 反向三 I 算法, 模糊推理, 模糊专家系统, 模糊控制系统

Continuity and Approximation Property of Triple I Method

PAN Hai-yu PEI Dao-wu HUANG A-min

(College of Informatics & Electronics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract The triple I method is a new kind of fuzzy reasoning method with respect to FMP and FMT models. We investigated systematically whether or not triple I sustention degree method and reverse triple I sustention degree method may hold continuity property. We also pointed out that triple I methods based on the some commonly used implication operators hold approximation property. The results of the paper are useful for the selection and analysis of algorithms for fuzzy reasoning when practical fuzzy control and expert systems are designed.

Keywords Triple I method, Reverse triple I method, Fuzzy reasoning, Fuzzy expert system, Fuzzy control system

1 引言

众所周知, 在模糊推理中, 最基本的推理形式是 FMP 和 FMT。

FMP: 由 $A \rightarrow B$ 和 A^* 推得 B^* ;

FMT: 由 $A \rightarrow B$ 和 B^* 推得 A^* 。

其中 A 和 A^* 是论域 X 上的模糊集, B 和 B^* 是论域 Y 上的模糊集^[1-9]。

模糊推理算法是设计和分析模糊专家系统和模糊控制系统的理论基础和重要工具。1973 年, 美国控制论专家 Zadeh 针对推理形式 FMP 提出了合成推理方法 (compositional rules of inference), 简称为 CRI 算法。由于其运算比较简便, 便于实际应用, 因此该算法已成为模糊推理的基本算法, 并且被广泛地应用于各种模糊技术的设计之中^[10]。但由于 CRI 算法缺乏严格的逻辑依据, 因而不可避免地受到学术界以及领域专家的怀疑与批评^[1,2,6]。不过, 近年来, 以王国俊教授为首的一批学者成功地将模糊逻辑和模糊推理结合起来, 创建了模糊推理的三 I 算法等一系列漂亮的工作^[1-9,11-17], 从根本上修正了 CRI 算法, 将模糊推理重新引入到逻辑语义蕴涵的正确轨道, 极大地推动了这一领域向理论和应用的纵深发展。

经过众多学者对三 I 算法 8 年的研究, 已经取得了相当丰富的研究成果。这些成果表明: 三 I 算法比 CRI 算法有更好的逻辑背景和更优的性质。并且, 三 I 算法已经得到了初步的应用^[11,16]。我们知道, 在模糊专家系统和模糊控制系统中要求推理方法满足逼近原则。该原则是指, 对于推理形式 FMP, 当 A^* 充分逼近 A 时, 推理方法能够保证所得结果 B^*

也充分逼近 B ; 对于推理形式 FMT, 当 B^* 充分逼近 B 时, 推理方法能够保证所得结果 A^* 也充分逼近 A 。目前虽已有文献讨论了由左连续三角模诱导的剩余型三 I 算法的连续性和逼近性, 但对其他一些常用的蕴涵算子没有进行研究^[8,9]。在实际应用中, 三 I 支持度算法比三 I 算法可能更有意义。故本文系统地讨论三 I 和反向三 I 的支持度算法的连续性, 并指出对于 FMP 问题来说, 基于 Zadeh 算子、Mamdani 算子、Gaines-Rescher 算子的三 I 算法也具有逼近性, 有关文献中的结果都可以作为本文的推论。

2 预备知识

本节我们简要介绍一些与本文有关的概念和术语。下文的 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 分别表示 X 与 Y 上的模糊集全体。

三 I 方法是基于以下的三 I 原则而设计的模糊推理方法^[1,2]。

三 I 原则: 假设算子 R 关于第二变量不减, 那么 FMP 问题的解 B^* 应为论域 Y 上使得以下公式对于任何 $x \in X, y \in Y$ 恒取最大值的最小模糊集:

$$(A(x) \rightarrow B(y)) \rightarrow (A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \quad (1)$$

假设算子 R 关于第一变量不减, 那么 FMT 问题的解 A^* 应为论域 X 上使得(1)式对于任何 $x \in X, y \in Y$ 恒取最大值的最大模糊集。

进一步, 基于支持度的三 I 方法的优化问题为: 对于 $a \in (0, 1)$, 在已知 $A \in F(X), B \in F(Y)$ 和 $A^* \in F(X)$ (或 $B^* \in F(Y)$) 时, 寻求最优的 $B^* \in F(Y)$ (或 $A^* \in F(X)$), 使得

$$(A(x) \rightarrow B(y)) \rightarrow (A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \geq a \quad (2)$$

对一切 $x \in X$ 与 $y \in Y$ 成立。

^{*}) 国家 973 项目(2006CB708304)资助。潘海玉 硕士研究生, 从事非经典逻辑与近似推理研究; 裴道武 博士(后), 教授, 博士生导师, 从事非经典逻辑与近似推理、粗糙集研究; 黄阿敏 硕士研究生, 从事非经典逻辑与近似推理研究。

反向三 I 支持度算法的思想^[7]: 在(1)式的前提假设下, 寻求最优的 $B^* \in F(Y)$ (或 $A^* \in F(X)$), 使得 $A^* \rightarrow B^*$ 最大程度地支持 $A \rightarrow B$, 即

$$(A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) \quad (3)$$

对一切 $x \in X, y \in Y$ 具有最大的可能值。

进一步, 基于支持度的反向三 I 方法的优化问题为^[7]: 对于 $\alpha \in (0, 1)$, 在已知 $A \in F(X), B \in F(Y)$ 和 $A^* \in F(X)$ (或 $B^* \in F(Y)$) 时, 寻求最优的 $B^* \in F(Y)$ (或 $A^* \in F(X)$), 使得

$$(A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) \geq \alpha \quad (4)$$

对一切 $x \in X, y \in Y$ 成立。

本文主要用到的蕴涵算子如下^[2] (以下的 $x, y \in [0, 1]$):

$$(1) \text{Lukasiewicz 蕴涵算子}(R_L): x \rightarrow_L y = (1-x+y) \wedge 1$$

$$(2) R_0 \text{ 蕴涵算子}: x \rightarrow_0 y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ (1-x) \vee y, & x > y \end{cases}$$

$$(3) \text{Gödel 蕴涵算子}(R_G): x \rightarrow_G y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$$

$$(4) \text{Goguen 蕴涵算子}(R_G): x \rightarrow_{\Pi} y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$$

$$(5) \text{Zadeh 蕴涵算子}(R_Z): x \rightarrow_Z y = (1-x) \vee (x \wedge y)$$

$$(6) \text{Mamdani 蕴涵算子}(R_M): x \rightarrow_M y = x \wedge y$$

$$(7) \text{Gaines-Rescher 蕴涵算子}(R_{GR}): x \rightarrow_{GR} y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & x > y \end{cases}$$

注 1: 在不至于混淆的前提下, 为简便起见, 以下的蕴涵算子都用 \rightarrow 表示。

定义 1^[1-5] 如果当 A, B 满足条件(P)时, 对于求解 FMP 问题的一种算法, 由 $A^* = A$ 求得 $B^* = B$, 则称这种算法为 P-还原算法。特别地, 如果条件(P)为: A 是正规模糊集, 即存在 $x_0 \in X$, 使得 $A(x_0) = 1$, 那么 P-还原算法简称为还原算法。如果当 A, B 满足条件(P)时, 对于求解 FMT 题的一种算法, 由 $B^* = B$ 求得 $A^* = A$, 则称这种算法为 P-还原算法。特别地, 如果条件(P)为: B 是余正规模糊集, 即存在 $y_0 \in Y$, 使得 $B(y_0) = 0$, 那么 P-还原算法简称为还原算法。

模糊推理方法本质上是基于模糊规则 $A \rightarrow B$, 提供了一种从论域 X 上的模糊集全体 $F(X)$ 到论域 Y 上的模糊集全体 $F(Y)$ 之间的映射方法^[2] (本文记作 $f(A^*)$, 其中 $A, A^* \in F(X), B \in F(Y)$)。本文用海明距离来度量两个模糊集间的贴近程度, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 是非空有限论域, $\|A - A^*\| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |A(u_i) - A^*(u_i)|$ 。

定义 2^[8] 设 X, Y 为非空有限论域, $A \rightarrow B$ 是已知规则, FMP 模型的模糊推理方法 $f(A^*)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 上的一个模糊变换, 此处 $A, A^* \in F(X), |X| = n, |Y| = m$; 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $\|A^* - A\| < \delta$ 时,

$$f(A^*) - f(A) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |f(A^*)(y_i) - f(A)(y_i)| < \epsilon$$

成立, 则称 $f(A^*)$ 在 A 处是连续的; 若使得 $\|f(A^*) - B\| = \frac{1}{m}$

$\sum_{i=1}^m |f(A^*)(y_i) - B(y_i)| < \epsilon$ 成立, 则称 $f(A^*)$ 在 B 处具有逼近性。

定义 3^[8] 设 X, Y 为非空有限论域, $A \rightarrow B$ 是已知规则, FMT 模型的模糊推理方法 $g(B^*)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 上的一个模糊变换, 此处 $B, B^* \in F(Y), |X| = n, |Y| = m$; 若 $\forall \epsilon > 0$,

$\exists \delta > 0$, 使得当 $\|B^* - B\| < \delta$ 时,

$$\|g(B^*) - g(B)\| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |g(B^*)(x_i) - g(B)(x_i)| < \epsilon$$

成立, 则称 $g(B^*)$ 在 B 处是连续的; 若使得 $\|g(B^*) - g(B)\| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |g(B^*)(x_i) - A(x_i)| < \epsilon$ 成立, 则称 $g(B^*)$ 在 A 处具有逼近性。

由以上两个定义知, 当 $f(A^*)$ 在 A 处连续, 且 $f(A) = B$, 则 $f(A^*)$ 在 A 处具有逼近性; 当 $g(B^*)$ 在 B 处连续, 且 $g(B) = A$, 则 $g(B^*)$ 在 B 处具有逼近性。

引理 1^[8,9] (1) $|a \wedge b - a \wedge c| \leq |b - c|$;

(2) $|a \vee b - a \vee c| \leq |b - c|$;

(3) $|\bigvee_{i \in I} a_i - \bigvee_{i \in I} b_i| \leq \bigvee_{i \in I} |a_i - b_i|$;

(4) 若 $\delta > 0, \forall i \in I$, 有 $|a_i - b_i| < \delta$, 则 $|\bigwedge_{i \in I} a_i - \bigwedge_{i \in I} b_i| < \delta$ 。

3 三 I 支持度算法的连续性

在这一部分我们主要讨论三 I 支持度算法的连续性和三 I 算法的逼近性。在具体讨论之前, 我们先给出一些基于常见的蕴涵算子的 FMP 问题的三 I 支持度算法的计算公式^[5]。

$$R_L: B^*(y) = \bigvee_{x \in E_y \cap K_y} (A^*(x) + R_L(A(x), B(y))) + \alpha -$$

2), $y \in Y$

其中 $E_y = \{x \in X | 1 - A^*(x) < R_L(A(x), B(y))\}$,

$$K_y = \{x \in X | A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) - 1 > 1 - \alpha\}。$$

$$R_0: B^*(y) = \bigvee_{x \in E_y \cap K_y} (A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y)) \wedge \alpha),$$

$y \in Y$

其中 $E_y = \{x \in X | 1 - A^*(x) < R_0(A(x), B(y))\}$,

$$K_y = \{x \in X | A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y)) > 1 - \alpha\},$$

$$R_G: B^*(y) = \bigvee_{x \in X} (A^*(x) \wedge R_G(A(x), B(y)) \wedge \alpha), y \in Y,$$

$$R_G: B^*(y) = \bigvee_{x \in X} (A^*(x) \cdot R_G(A(x), B(y)) \cdot \alpha), y \in Y。$$

FMP 问题的基于 R_Z 的三 I 支持度算法有解的充分必要条件是^[13]

$$R_Z(A(x), B(y)) - (A^*(x) \vee (1 - A^*(x))) \geq \alpha$$

其计算公式如下:

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in E_y \cap K_y} (A^*(x) \wedge R_Z(A(x), B(y)) \wedge \alpha), y \in Y$$

其中 $E_y = \{x \in X | 1 - A^*(x) < R_Z(A(x), B(y))\}$,

$$K_y = \{x \in X | A^*(x) \wedge R_Z(A(x), B(y)) > 1 - \alpha\}。$$

我们先讨论 FMP 模型的基于 R_L 三 I 支持度算法的连续性。要证基于 R_L 三 I 支持度算法具有连续性, 先证下面的引理成立。

引理 2 设 X, Y 为非空有限论域, $A, A^* \in F(X), B \in F(Y)$, 则存在 $\delta_0 > 0$ 。当 $\|A^* - A\| < \delta_0$ 时, 使得 $\forall y \in Y, EA_y^* = EA_y$ 成立。其中

$$EA_y^* = \{x \in X | 1 - A^*(x) < R_L(A(x), B(y))\},$$

$$EA_y = \{x \in X | 1 - A(x) < R_L(A(x), B(y))\}。$$

证明: 先设任一固定的 $y \in Y$ 。若取 $\delta_1 = \bigwedge_{x \in EA_y^*}$

$[\frac{R_L(A(x), B(y)) - (1 - A^*(x))}{2(n+1)}]$, 由 $x \in EA_y^*$, 有 $\delta_1 > 0$ 。

当 $\|A^* - A\| < \delta_1$ 时, 根据海明距离公式, 我们可得 $\|A^* - A\| = \frac{1}{n} \sum_{x \in X} |A^*(x) - A(x)| < \delta_1$, 所以 $\forall x \in X,$

$|A^*(x) - A(x)| < n\delta_1$, 即 $A^*(x) - n\delta_1 < A(x) < A^*(x) +$

$n\delta_{1y}$ 。根据 $x \in EA_y^*$ 和以上的分析,我们有

$$\begin{aligned} 1-A(x) &< 1-(A^*(x)-n\delta_{1y})=1-A^*(x)+n\delta_{1y} < \\ 1-A^*(x) &+ n \cdot \frac{R_L(A(x),B(y))-(1-A^*(x))}{2(n+1)} < \\ 1-A^*(x) &+ \frac{R_L(A(x),B(y))-(1-A^*(x))}{2} < \\ \frac{R_L(A(x),B(y))+(1-A^*(x))}{2} &< R_L(A(x),B(y)) \end{aligned}$$

所以 $EA_y^* \subset EA_y$ 。若取 $\delta_{2y} = \bigwedge_{x \in EA_y} \left[\frac{R_L(A(x),B(y))-(1-A(x))}{2(n+1)} \right]$, 由 $x \in EA_y$, 有 $\delta_{2y} > 0$ 。当 $\|A^* - A\| < \delta_{2y}$ 时。我们根据海明距离公式,可得 $\|A^* - A\| = \frac{1}{n} \sum_{x \in X} |A^*(x) - A(x)| < \delta_{2y}$, 所以 $\forall x \in X, |A^*(x) - A(x)| < n\delta_{2y}$, 即 $A(x) - n\delta_{2y} < A^*(x) < A(x) + n\delta_{2y}$ 。我们根据 $x \in EA_y$ 和以上的分析知道:

$$\begin{aligned} 1-A(x) &< 1-(A(x)-n\delta_{2y})=1-A(x)+n\delta_{2y} < \\ 1-A(x) &+ n \cdot \frac{R_L(A(x),B(y))-(1-A(x))}{2(n+1)} < \\ 1-A(x) &+ \frac{R_L(A(x),B(y))-(1-A(x))}{2} < \\ \frac{R_L(A(x),B(y))+(1-A(x))}{2} &< R_L(A(x),B(y)) \end{aligned}$$

所以 $EA_y \subset EA_y^*$ 。我们可以取 $\delta_{0y} = \delta_{1y} \wedge \delta_{2y}$, 则当 $\|A^* - A\| < \delta_{0y}$ 时, $EA_y^* = EA_y$ 成立。再令 $\delta_0 = \bigwedge_{y \in Y} \delta_{0y}$, 引理 2 显然成立。至此我们完成证明。

引理 3 设 X, Y 为非空有限论域, $A, A^* \in F(X), B \in F(Y)$, 则存在 $\delta_1 > 0$, 当 $\|A^* - A\| < \delta_1$ 时, 使得 $\forall y \in Y, KA_y^* = KA_y$ 成立。其中

$$\begin{aligned} KA_y^* &= \{x \in X | A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) - 1 > 1 - \alpha\}, \\ KA_y &= \{x \in X | A(x) + R_L(A(x), B(y)) - 1 > 1 - \alpha\}. \end{aligned}$$

引理 3 与引理 2 的证明过程相似, 所以省略。从上面两个引理出发, 我们可以得到下面的结论。

推论 1 设 X, Y 为非空有限论域, $A, A^* \in F(X), B \in F(Y)$, 则存在 $\delta_2 > 0$ 。当 $\|A^* - A\| < \delta_2$ 时, 使得 $\forall y \in Y, EA_y^* \cap KA_y^* = EA_y \cap KA_y$ 成立。

事实上, 我们只需取 $\delta_2 = \delta_0 \wedge \delta_1$, 就能证明此推论。

定理 1 FMP 问题的基于 R_L 的三 I 支持度算法在 A 处具有连续性。

证明: 对于 FMP 问题, 由推论 1 知, 存在 $\delta_2 > 0$ 。当 $\|A^* - A\| < \delta_2$ 时, 使得 $\forall y \in Y, EA_y^* \cap KA_y^* = EA_y \cap KA_y$ 成立, 因此 $\forall \epsilon > 0$, 只需取 $\delta = \frac{\delta_2}{n+1} \wedge \frac{\epsilon}{n+1}$, 则当 $\|A^* - A\| < \delta$ 时, $\forall y \in Y, EA_y^* \cap KA_y^* = EA_y \cap KA_y$ 仍成立。此时, 我们有 $\forall x \in X, |A^*(x) - A(x)| < n\delta$, 我们根据引理 1-3, 可以得到

$$\begin{aligned} \|f(A^*) - f(A)\| &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} |f(A^*)(y) - f(A)(y)| \\ &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \left| \bigvee_{x \in EA_y^* \cap KA_y^*} (A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) - \bigvee_{x \in EA_y \cap KA_y} (A(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) \right| \\ &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \left| \bigvee_{x \in EA_y^* \cap KA_y^*} (A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) - \bigvee_{x \in EA_y \cap KA_y} (A(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) \right| \\ &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \bigvee_{x \in EA_y^* \cap KA_y^*} |A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2 - (A(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2)| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \bigvee_{x \in EA_y^* \cap KA_y^*} |A^*(x) - A(x)| \leq \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} n\delta = n\delta < \epsilon$$

至此我们完成定理 1 的证明。

同理, 我们可以得到:

定理 2 FMP 问题的基于 R_0, R_Z 的三 I 支持度算法在 A 处具有连续性。

下面我们讨论基于 R_G, R_{G_0} 的三 I 支持度算法的连续性。

定理 3 FMP 问题的基于 R_G, R_{G_0} 的三 I 支持度算法在 A 处具有连续性。

证明: 由于 FMP 问题的基于 R_G 与 R_{G_0} 的三 I 支持度算法在 A 处具有连续性的证明方法类似, 因此我们只给出基于 R_{G_0} 的三 I 支持度算法在 A 处具有连续性的证明方法。 $\forall \epsilon >$

0, 只需取 $\delta = \frac{\epsilon}{n+1}$, 则当 $\|A^* - A\| < \delta$ 时, 有 $\forall x \in X,$

$|A^*(x) - A(x)| < n\delta$, 根据

$$R_{G_0}(A(x), B(y)) \leq 1, \alpha \leq 1 \text{ 和引理 1, 我们可以得到}$$

$$\begin{aligned} \|f(A^*) - f(A)\| &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} |f(A^*)(y) - f(A)(y)| \\ &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \left| \bigvee_{x \in X} (A^*(x) \cdot R_{G_0}(A(x), B(y)) \cdot \alpha) - \bigvee_{x \in X} (A(x) \cdot R_{G_0}(A(x), B(y)) \cdot \alpha) \right| \\ &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} |A^*(x) \cdot R_{G_0}(A(x), B(y)) \cdot \alpha - (A(x) \cdot R_{G_0}(A(x), B(y)) \cdot \alpha)| \\ &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} |(A^*(x) - A(x)) \cdot |R_{G_0}(A(x), B(y)) \cdot \alpha| \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} |A^*(x) - A(x)| \leq \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} n\delta < \epsilon \end{aligned}$$

所以 FMP 问题的基于 R_{G_0} 的三 I 支持度算法在 A 处具有连续性。

由于 FMP 问题的基于剩余型蕴涵算子的三 I 算法是还原算法^[1,2,4,5], 考虑到前面的讨论, 只需令 $\alpha = 1$, 我们有

推论 2 FMP 问题的基于剩余型蕴涵算子的三 I 算法在 A 处具有逼近性^[8,9]。

由于 FMP 问题的基于 R_M 的三 I 算法是还原算法, 基于 R_Z, R_{GR} 的三 I 算法是 (P) 还原算法^[1,4,5], 我们有

推论 3 FMP 问题的基于 R_M, R_Z, R_{GR} 的三 I 算法在 A 处具有逼近性。

下面我们来分析 FMP 问题的三 I 支持度算法的逐点误差, 这一特性对模糊控制尤为重要。我们先给出其定义。

定义 4^[8] 设 X 为非空有限论域, $A, A^* \in F(X)$, 称 $W(A^*, A) = \bigvee_{x \in X} |A^*(x) - A(x)|$ 为 A^* 与 A 的逐点误差最大值。

定理 4 FMP 问题的基于 R_L, R_0, R_Z 的三 I 支持度算法, 存在 $\delta_2 > 0$, 当输入 A 与 A^* 的逐点误差最大值小于 $\epsilon < \delta_2$, 那么输出 $f(A^*)$ 与 $f(A)$ 的误差及逐点误差最大值都小于 ϵ 。

证明: 我们只给出基于 R_L 三 I 支持度算法的证明, 基于其它的蕴涵算子的三 I 支持度算法证明方法类似, 所以省略。当 $W(A^*, A) = \bigvee_{x \in X} |A^*(x) - A(x)| < \epsilon$ 时, 显然有 $|A^*(x) - A(x)| < \epsilon$, 结合引理 1, 3, 这时的误差

$$\begin{aligned} \|f(A^*) - f(A)\| &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} |f(A^*)(y) - f(A)(y)| \\ &= \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \bigvee_{x \in EA_y^* \cap KA_y^*} (A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) - \bigvee_{x \in EA_y \cap KA_y} (A(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2) - \bigvee_{x \in EA_y \cap KA_y} (A(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) | \\
= & \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} | \bigvee_{x \in EA_y \cap KA_y} (A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - \\
& 2) - \bigvee_{x \in EA_y \cap KA_y} (A(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) | \\
= & \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \bigvee_{x \in EA_y \cap KA_y} | (A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - \\
& 2) - (A(x) + R_L(A(x), B(y)) + \alpha - 2) | \\
\leq & \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \bigvee_{x \in EA_y \cap KA_y} | A^*(x) - A(x) | \leq \frac{1}{m} \sum_{y \in Y} \delta_2 = \delta_2 < \epsilon
\end{aligned}$$

逐点误差最大值情形可类似证明。

根据 FMP 问题的基于 R_G, R_G, R_G 的三 I 支持度算法的计算公式, 参照定理 4, 我们可以得到:

定理 5 FMP 问题的基于 R_G, R_G, R_G 的三 I 支持度算法, 当输入 A 与 A^* 的逐点误差最大值小于 ϵ , 那么输出 $f(A^*)$ 与 $f(A)$ 的误差及逐点误差最大值都小于 ϵ 。

我们知道, 在模糊专家系统中, 经常用到依次根据不同的规则进行链式推理。根据定理 4 和 5, 我们得到下面的推论。

推论 4 设 X_1, X_2, \dots, X_k 为有限论域, $A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, \dots, A_{k-1} \rightarrow A_k$ 是已知规则, 用 FMP 问题的本文所提到的蕴涵算子的三 I 支持度算法作为其模糊推理算法。那么对于 $\epsilon > 0$, 当前件 A^* 满足 $W(A^*, A_1) < \epsilon$, 最终的推理结果 A_k^* 满足 $W(A_k^*, A_k) < \epsilon$ 。其中 $A_i \in F(X_i), i = 1, 2, \dots, k; A_1^* \in F(X_1), A_k^* \in F(X_k)$ 。

接下来我们讨论 FMT 问题的三 I 支持度算法的连续性。我们只讨论 FMT 问题的基于剩余型蕴涵算子的三 I 支持度算法的连续性。

FMT 问题的剩余型蕴涵算子的三 I 支持度算法的计算公式^[6]如下:

$$R_L: A^*(x) = \bigwedge_{y \in E_x \cap K_x} (B^*(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + 2), x \in X, \text{其中:}$$

$$E_x = \{y \in Y | B^*(y) < R_L(A(x), B(y))\}, K_x = \{y \in Y | B^*(y) - R_L(A(x), B(y)) + 1 < \alpha\}.$$

$$R_0: A^*(x) = \bigwedge_{y \in E_x \cap K_x} (B^*(y) \vee (1 - R_0(A(x), B(y)))) \vee (1 - \alpha), x \in X, \text{其中}$$

$$E_x = \{y \in Y | B^*(y) < R_0(A(x), B(y))\}, K_x = \{y \in Y | B^*(y) \vee (1 - R_0(A(x), B(y))) < \alpha\}.$$

$$R_G: A^*(x) = \bigwedge_{y \in E_x \cap K_x} (B^*(y)), x \in X$$

其中

$$E_x = \{y \in Y | B^*(y) < R_G(A(x), B(y))\}, K_x = \{y \in Y | B^*(y) < \alpha\}.$$

$$R_G: A^*(x) = \bigwedge_{y \in E_x \cap K_x} \left(\frac{B^*(y)}{\alpha * R_G(A(x), B(y))} \right), x \in X$$

其中

$$E_x = \{y \in Y | B^*(y) < R_G(A(x), B(y))\},$$

$$K_x = \{y \in Y | \frac{B^*(y)}{R_G(A(x), B(y))} < \alpha\}.$$

我们仍然先讨论 FMT 问题的基于 R_L 的三 I 支持度算法的连续性。若 FMT 问题的基于 R_L 的三 I 支持度算法具有连续性, 下面的引理也成立, 具体证明过程可参见引理 2 和 3 的证明。

引理 4 设 X, Y 为非空有限论域, $A, A^* \in F(X), B \in F(Y)$, 则存在 $\delta_2 > 0$ 。当 $\|B^* - B\| < \delta_2$ 时, 使得 $\forall x \in X, EA_x^* \cap KA_x^* = EA_x \cap KA_x$ 成立。

定理 6 FMT 问题的基于 R_L 的三 I 支持度算法在 B 处具有连续性。

证明: 对于 FMT 问题, 由引理 4 知, 存在 $\delta_2 > 0$ 。当 $\|B^* - B\| < \delta_2$ 时, 使得 $\forall x \in X, EA_x^* \cap KA_x^* = EA_x \cap KA_x$ 成立, 因此 $\forall \epsilon > 0$, 只需取 $\delta = \frac{\delta_2}{m+1} \wedge \frac{\epsilon}{m+1}$, 则当 $\|B^* - B\| < \delta$ 时, $\forall x \in X, EA_x^* \cap KA_x^* = EA_x \cap KA_x$ 仍成立, 此时, 有 $\forall y \in Y, |B^*(y) - B(y)| < m\delta$, 我们根据引理 1, 4, 可以得到

$$\begin{aligned}
\|f(B^*) - f(B)\| &= \frac{1}{n} \sum_{y \in Y} |f(B^*)(x) - f(B)(x)| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{y \in Y} | \bigwedge_{y \in EA_x^* \cap KA_x^*} (B^*(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + \\
& 2) - \bigwedge_{y \in EA_x \cap KA_x} (B(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + 2) | \\
&= \frac{1}{n} \sum_{y \in Y} | \bigwedge_{y \in EA_x \cap KA_x} (B^*(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + \\
& 2) - \bigwedge_{y \in EA_x \cap KA_x} (B(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + 2) |
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
& |(B^*(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + 2) - (B(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + 2)| \leq |B^*(y) - B(y)| < m\delta, \text{所以由引理 1,} \\
& \text{我们有 } | \bigwedge_{y \in EA_x \cap KA_x} (B^*(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + 2) - \\
& \bigwedge_{y \in EA_x \cap KA_x} (B(y) - R_L(A(x), B(y)) - \alpha + 2) | < m\delta, \text{所以有 } \|f \\
& (B^*) - f(B)\| = \frac{1}{n} \sum_{y \in Y} |f(B^*)(x) - f(B)(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{y \in Y} m\delta < \epsilon.
\end{aligned}$$

至此我们完成定理 5 的证明。

因为 FMT 问题的基于 R_0, R_G, R_G 的三 I 支持度算法在 B 处具有连续性问题, 其证明方法与定理 5 的证明方法相似, 因篇幅有限, 所以我们只以推论形式给出。

推论 5 FMT 问题的基于 R_0, R_G, R_G 的三 I 支持度算法在 B 处具有连续性。

由于 FMT 问题的基于剩余型蕴涵算子的三 I 算法是还原算法^[1-5], 我们根据定义 3 和前面讨论的结果, 很容易得到下面的结论:

推论 6 FMT 问题的基于 R_L, R_0, R_G, R_G 的三 I 算法在 B 处具有逼近性^[8,9]。

注 2: FMP 问题的基于本文所提到的蕴涵算子的 CRI 算法在 A 处都不具有逼近性, FMT 问题的基于 R_L, R_0, R_G, R_G 的 CRI 算法在 B 处不具有逼近性^[8], 因此从逼近性来说, 三 I 算法比 CRI 算法具有更优的性质。

接下来我们分析 FMT 问题的三 I 支持度算法的逐点误差。参照定理 4 的证明思路, 显然下面的结论成立:

定理 6 FMT 问题的基于 R_L, R_0, R_G, R_G 的三 I 支持度算法, 存在 $\delta_2 > 0$ 。当输入的 B 与 B^* 逐点误差最大值小于 $\epsilon < \delta_2$, 那么输出的误差 $g(B^*)$ 与 $g(B)$ 及逐点误差最大值都小于 ϵ 。

4 反向三 I 支持度算法的连续性

反向三 I 支持度算法是对三 I 算法跟踪研究的重要成果之一。在实际应用中, 特别是在设计模糊系统中, 有一定的实际指导作用, 因此我们有必要对反向三 I 支持度算法的连续性问题进行研究。在这一部分我们先考虑基于算子 R_L 的反向三 I 支持度算法的连续性问题。FMP 问题的基于算子 R_L 的反向三 I 支持度算法的计算公式^[14]如下:

$$B^*(y) = \bigwedge_{x \in E_y} (A^*(x) + R_L(A(x), B(y)) - \alpha) \vee 0, y \in Y$$

其中 $E_\alpha = \{x \in X | R_L(A(x), B(y)) < \alpha\}$ 。我们通过对公式的分析,参照前文解决基于算子 R_L 的三 I 支持度算法连续性问题的方法,可以得到以下的结论:

定理 7 FMP 问题的基于算子 R_L 的反向三 I 支持度算法在 A 处具有连续性。

因为 FMP 问题的基于算子 R_L 的反向三 I 算法是还原算法^[14],所以同样有下面的推论:

推论 7 FMP 问题的基于 R_L 的反向三 I 算法在 A 处具有逼近性。

接下来我们讨论 FMT 问题的基于 R_L 的反向三 I 支持度算法的连续性问题。FMT 问题的基于 R_L 的反向三 I 支持度算法的计算公式^[14],如下:

$$A^*(x) = \bigvee_{y \in K_x} (B^*(y) - R_L(A(x), B(y)) + \alpha), x \in X$$

其中: $K_x = \{y \in Y | R_L(A(x), B(y)) < \alpha\}$ 。同理可以得到:

定理 8 FMT 问题的基于 R_L 的反向三 I 支持度算法在 B 处具有连续性。

因为 FMT 问题的基于 R_L 的反向三 I 算法是还原算法^[14],所以下面的推论也成立:

推论 8 FMT 问题的基于 R_L 的反向三 I 算法在 B 处具有逼近性。

根据 FMP 和 FMT 问题的基于 R_0 的反向三 I 算法的计算公式^[7],我们有:

推论 9 FMP 问题的基于 R_0 的反向三 I 支持度算法在 A 处具有连续性。

推论 10 FMT 问题的基于 R_0 的反向三 I 支持度算法在 B 处具有连续性。

关于模糊控制系统中使用较多的几个蕴涵算子的 FMP 和 FMT 问题的反向三 I 算法的计算公式,已经得出^[15]。我们从这些计算公式可以得到下面两个结论:

推论 11 FMP 问题的基于 R_G , Yager 算子 $(R(x, y) = y^x, x, y \in [0, 1])$, Reichenbach 算子 $(R(x, y) = (1-x) + xy, x, y \in [0, 1])$, Kleene-Dienes 算子 $(R(x, y) = (1-x) \vee y, x, y \in [0, 1])$ 的反向三 I 算法在 A 处具有连续性。

推论 12 FMT 问题的基于 R_G , Yager 算子、Reichenbach 算子、Kleene-Dienes 算子的反向三 I 算法在 B 处具有连续

性。

参 考 文 献

- [1] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 中国科学(E 辑), 1999, 29(1): 43-53
- [2] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京: 科学出版社, 2000
- [3] 裴道武. FMT 问题的两种三 I 算法及其还原性. 模糊系统与数学, 2001, 15(4): 1-7
- [4] 裴道武. 模糊推理全蕴涵算法及其还原性. 数学研究与评论, 2004, 24(2): 359-368
- [5] Pei D W. Unified full implication algorithms of fuzzy reasoning. Information Sciences, 2008, 178(2): 520-530
- [6] 裴道武. 关于模糊逻辑与模糊推理逻辑基础问题的十年研究综述. 工程数学学报, 2004, 21(2): 249-258
- [7] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法. 中国科学(E 辑), 2002, 32(2): 230-246
- [8] 徐蔚鸿, 谢中科, 等. 两类模糊推理算法的连续性和逼近性. 软件学报, 2004, 15(10): 1485-1492
- [9] 于鹏, 王国俊. 基于正则蕴涵算子的三 I 算法的性质. 陕西师范大学学报(自), 2007, 35(2): 14-17
- [10] 吴望名. 模糊推理的原理和方法. 贵阳: 贵州科技出版社, 1994
- [11] 李绍稳, 熊范纶, 等. 专家系统中的特征展开三 I 算法模糊推理模型及其应用. 模式识别与人工智能, 2001, 14(3): 272-275
- [12] 马盈仓, 何华灿. 一类剩余格上的三 I 算法. 计算机科学, 2004, 31(5): 127-129
- [13] 彭家寅, 侯健, 李洪兴. 基于某些常用蕴涵算子的反向三 I 算法. 自然科学进展, 2005, 15(4): 404-410
- [14] 侯健, 尤飞, 李洪兴. 由三 I 算法构造的一些模糊控制器及其响应能力. 自然科学进展, 2005, 15(1): 29-37
- [15] Song S J, Feng C, Lee E S. Triple I method of fuzzy reasoning. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 44(2): 1567-1579
- [16] 何映思, 全海金, 邓辉文. 具有还原性的多重多维模糊推理算法. 计算机科学, 2007, 34(4): 145-148
- [17] Zhao Z H, Li Y J. Reverse triple I method of fuzzy reasoning for the implication operator R_L . Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53: 1020-1028
- [3] Paxson V, Floyd S. Wide area traffic; the failure of poisson modeling[C]//Proc. ACM Sigcomm'94. 1994: 257-268
- [4] Hu G, Dolzer K, Gauger C M. Does Burst Assembly Really Reduce the self-similarity[J]//Conference on Optical Fiber Communication(OFC 2003). Technical Digest Series, 2003, 86: 124-126
- [5] 何慧, 张宏莉, 张伟哲, 等. 一种基于相似度的 DDoS 攻击检测方法[J]. 通信学报, 2004, 25(7): 176-184
- [6] 李金明, 王汝传. 基于 VTP 方法的 DDoS 攻击实时检测技术研究[J]. 电子学报, 2007, 35(4): 791-796
- [7] Garrett M. Contribution toward real-time service on packet switched networks[D]. New York: Columbia University, 1993
- [8] Wornell G W, Oppenheim A V. Estimation of fractal signals from noisy measurements using wavelets[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1992, 40(3): 611-623
- [9] Zhang H F, Shu Y T, Yang O. Estimation of Hurst parameter by variance-time plots Communications[C]// IEEE Pacific Rim Conference on Computers and Signals Proceeding '10 years PACRIM 1987-1997-Networking the Pacific Rim'. 1997(2): 883-886
- [10] Jung J, Krishnamurthy B, Rabinovich M. Flash Crowds and Denial of Service Attacks; Characterization and Implications for CDNs and Web Sites. Honolulu, Hawaii, USA 2002
- [11] Hagiwara T, Doi H, et al. High-speed calculation method of the Hurst parameter based on real traffic[C]// LCN 2000, Proceedings 25th Annual IEEE Conference on Local Computer Network. 2000: 662-669
- [12] http://www.ll.mit.edu/IST/ideval/data/2000/2000_data_index.htm
- [13] Paxson V. Fast Approximation of Self-similar Network Traffic [R]. Technical Report, LBL36750. University of California, Berkeley, Apr. 1995

(上接第 113 页)