变精度覆盖粗糙集模型的推广研究*)

孙士保[1,2] 秦克云[2]
(河南科技大学电子信息工程学院 洛阳 471003)[1] (西南交通大学智能控制开发中心 成都 610031)[2]

摘 要 基于多数包含关系及误差参数 $\beta(0\leqslant\beta<0.5)$，提出了两种基于对象邻域的变精度覆盖粗糙集模型，讨论了模型中 β 上、下近似算子的性质；从对偶性角度出发推广了 β 上近似、β 下近似算子 $\underline{apc}_\beta(X)$ 与 $\overline{apc}_\beta(X)$，得到了两对对偶的上、下近似算子 $\underline{apc}'_\beta(X)$ 与 $\overline{apc}'_\beta(X)$ 和 $\underline{apc}''_\beta(X)$ 与 $\overline{apc}''_\beta(X)$；研究了这些近似算子的性质及相互关系。

关键词 变精度粗糙集模型，近似算子，覆盖，邻域

On the Generalization of Variable Precision Covering Rough Set Model

SUN Shi-bao[1,2] QIN Ke-yun[2]
(Electronic Information Engineering College, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China)[1]
(Intelligent Control Development Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)[2]

Abstract Based on majority inclusion relation and error parameter $\beta(0\leqslant\beta<0.5)$, the generalized variable precision rough set model was proposed with the help of successor neighbor. The basic properties of approximation operators were investigated. Two pairs of dual approximation operators $\underline{apc}'_\beta(X)$ and $\overline{apc}'_\beta(X)$ together with $\underline{apc}''_\beta(X)$ and $\overline{apc}''_\beta(X)$ were proposed from generalizing $\underline{apc}_\beta(X)$ and $\overline{apc}_\beta(X)$. Finally, the properties of two pairs of dual approximation operators were discussed, the relationship among these approximation operators were analyzed in detail.

Keywords Variable precision rough set model, Approximation operators, Covering, Neighbor

1 引言

粗糙集(Rough Sets)理论是 Z. Pawlak 教授于 1982 年提出的一种研究不完整、不确定知识和数据的表达、学习、归纳的理论方法[1]。该理论已经成为智能计算领域的研究热点，并在信息处理、数据挖掘(DM)和数据库知识发现(KDD)等认知领域获得了成功的应用[2,3]。但 Pawlak 粗糙集模型具有一定的局限性：一方面它所处理的分类必须是完全正确的或肯定的，因而它的分类是精确的，亦即只考虑完全“包含”和“不包含”，而没有某种程度上的“包含”和“属于”；另一方面它所处理的对象是已知的，且从模型中得到的结论仅适用于这些对象。但在实际应用中，往往需要把从小规模对象集中得到的结论应用于大规模对象集。Pawlak 粗糙集模型的这些局限性限制了它的应用。为了克服这些局限性，Ziarko 提出了变精度粗糙集模型[4](VPRS 模型，Variable Precision Rough Set Model)，它是 Pawlak 粗糙集模型的扩展，其基本思想是在 Pawlak 粗糙集模型中引入参数 $\beta(0\leqslant\beta<0.5)$，即允许一定程度的错误分类率存在，它可以解决属性间无函数关系的数据分类问题。当 $\beta=0$ 时，变精度粗糙集就退化为 Pawlak 粗糙集。这种推广的模型有利于从看似不相关的数据中发现潜在的相关数据。目前变精度粗糙集模型已经在很多领域得到了广泛的应用[5]。

然而，基于变精度粗糙集模型的推广工作还需要进一步完善。到目前为止，有关变精度粗糙集模型的研究主要集中在等价关系下的约简方法和模型推广两个方面。等价关系下的约简方法有 β 约简[6]、β 上(下)近似(分布)约简[7]、基于结构的约简[8]等。在很多实际问题中，对象之间的等价关系很难构造，或者对象之间本质上不存在等价关系，因此需要对等价关系进行推广。变精度粗糙集模型的推广是把等价关系推广为论域上的模糊关系[9,10]、一般二元关系[11]或覆盖关系[12]。文献[9,10]把变精度方法引入到模糊粗糙集并探讨其理论和应用；文献[11]把变精度粗糙集模型中的等价关系推广为论域 U 上的一般二元关系 R，从而得到广义的变精度粗糙集模型。在粗糙集模型中，当论域上的等价关系推广为论域上的覆盖时可以得到覆盖粗糙集模型[13]。同样，在变精度粗糙集模型中，我们可以把论域上的关系推广到论域上的覆盖，从而得到变精度覆盖粗糙集模型[12]。文献[12]从对象的最小描述方面定义了变精度覆盖粗糙集。

本文首先借助对象的邻域定义两种类型的变精度覆盖粗糙集模型的 β 上近似、β 下近似、β 边界和 β 负域等相关概念。经分析知，变精度覆盖粗糙集模型Ⅰ就是文献[12]中定义的模型；然后讨论变精度覆盖粗糙集模型Ⅱ中 β 上、下近似算子的性质。另外，从对偶性要求出发对这种变精度覆盖粗糙集模型进行进一步的推广，即从下近似出发找它的对偶上近似和从上近似出发找它的对偶下近似，这样就形成了两对对偶的上、下近似算子 $\underline{apc}'_\beta X$ 与 $\overline{apc}'_\beta X$ 和 $\underline{apc}''_\beta X$ 与 $\overline{apc}''_\beta X$。最后分析了推广后的两对上、下近似算子 $\underline{apc}'_\beta X$ 与 $\overline{apc}''_\beta X$ 和 $\underline{apc}''_\beta X$ 与 $\overline{apc}''_\beta X$ 的性质及它们同本文中定义的广义变精度粗糙集模

*)国家自然科学基金资助项目(60474022)，高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20060613007)，河南科技大学人才科学研究基金资助项目(09001172)。**孙士保** 博士，副教授，研究方向为智能信息处理、人工智能、决策理论及应用；**秦克云** 博士，教授，博士生导师，研究方向为智能信息处理、人工智能、决策理论及应用。

型中上、下近似算子$\underline{apc}_\beta X$与$\overline{apc}_\beta X$以及文献[12]中的变精度覆盖粗糙集模型中上、下近似$\underline{C}_\beta X$与$\overline{C}_\beta X$的关系。

2 变精度覆盖粗糙集模型Ⅰ

定义1 令

$$P(X,Y)=\begin{cases}1-|X\cap Y|/|X|, & |X|>0\\ 0, & |X|=0\end{cases}$$

其中$|X|$表示集合X的基数。称$P(X,Y)$为集合X关于集合Y的相对错误分类率，即如果我们将集合X中的元素分到集合Y中，则出现分类错误的比例为$P(X,Y)\times 100\%$。

定义2 设U是有限非空的论域，C是U的一个子集族，即$C\subseteq P(U)$。如果C中任意一个子集非空且$\bigcup C=U$，则称C为U的一个覆盖，(U,C)为一个覆盖近似空间。

定义3 设(U,C)为一个覆盖近似空间，对于任意$x\in U$，称

$$N(x)=\bigcap\{K\in C\mid x\in K\}$$

为x的邻域。

定义4 设(U,C)为覆盖近似空间，对于任意集合$X\subseteq U$，$0\leqslant\beta<0.5$，定义集合X关于覆盖近似空间(U,C)的β下近似为

$$\underline{C}_\beta(X)=\{x\in U\mid P(N(x),X)\leqslant\beta\}$$

β上近似为

$$\overline{C}_\beta(X)=\{x\in U\mid P(N(x),X)<1-\beta\}$$

β边界为

$$BNC_\beta(X)=\{x\in U\mid\beta<P(N(x),X)<1-\beta\}$$

β负域为

$$NEGC_\beta(X)=\{x\in U\mid P(N(x),X)\geqslant 1-\beta\}$$

直观上讲，X的β下近似可理解为将U中的对象以它的邻域关于X不大于β的错误分类率分于X的集合；X的β负区域相应理解为将U中的对象以它的邻域关于X不大于β的错误分类率分于X的补集(即$\sim X$)的集合；X的β边界域是由那些它的邻域关于X不大于β的错误分类率既不能分类于X又不能分类于$\sim X$的U中对象所构成的集合；X的β上近似是由那些以它的邻域关于X不大于β的错误分类率不能分类于$\sim X$的U中对象所构成的集合。如果$BNC_\beta(X)=\emptyset$，则$\underline{C}_\beta(X)=\overline{C}_\beta(X)$且$\underline{C}_\beta(X)\cup NEGC_\beta(X)=U$。

从上面邻域的定义知变精度覆盖粗糙集模型Ⅰ就是文献[12]中的变精度覆盖粗糙集模型，所以它们具有相同的性质子。

3 变精度覆盖粗糙集模型Ⅱ

定义5 设(U,C)为覆盖近似空间，对于任意集合$X\subseteq U$，$0\leqslant\beta<0.5$，定义集合X关于覆盖近似空间(U,C)的β下近似为

$$\underline{apc}_\beta(X)=\bigcup\{N(x)\mid P(N(x),X)\leqslant\beta\}$$

β上近似为

$$\overline{apc}_\beta(X)=\bigcup\{N(x)\mid P(N(x),X)<1-\beta\}$$

β边界为

$$bnc_\beta(X)=\bigcup\{N(x)\mid\beta<P(N(x),X)<1-\beta\}$$

β负域为

$$negc_\beta(X)=\bigcup\{N(x)\mid P(N(x),X)\geqslant 1-\beta\}$$

直观上说，X的β下近似可理解为将U中对象的邻域关于X不大于β的错误分类率分于X的集合；X的β负区域相应理解为将U中对象的邻域关于X不大于β的错误分类率分于X的补集(即$\sim X$)的集合；X的β边界域是由那些它的邻域关于X不大于β的错误分类率既不能分类于X又不能分类于$\sim X$的U中对象的邻域所构成的集合；X的β上近似是由那些以它的邻域关于X不大于β的错误分类率不能分类于$\sim X$的U中对象的邻域所构成的集合。如果$bnc_\beta(X)=\emptyset$，则$\underline{apc}_\beta(X)=\overline{apc}_\beta(X)$且$\underline{apc}_\beta(X)\cup negc_\beta(X)=U$。

定理1 设(U,C)是覆盖近似空间，对于$\forall X\subseteq U$，$\underline{apc}_\beta(X)=negc_\beta(\sim X)$，其中$\sim X=U-X$。

证明：注意到对于任意$x\in U$，$N(x)\neq\emptyset$，故

$\underline{apc}_\beta(X)=\bigcup\{N(x)\mid P(N(x),X)\leqslant\beta\}=\bigcup\{N(x)\mid 1-\dfrac{|N(x)\cap X|}{|N(x)|}\leqslant\beta\}=\bigcup\{N(x)\mid\dfrac{|N(x)\cap(\sim X)|}{|N(x)|}\leqslant\beta\}=\bigcup\{N(x)\mid 1-\dfrac{|N(x)\cap(\sim X)|}{|N(x)|}\geqslant 1-\beta\}=\bigcup\{N(x)\mid P(N(x),\sim X)\geqslant 1-\beta\}=negc_\beta(\sim X)$。

定理2 设(U,C)是覆盖近似空间，$X,Y\subseteq U$，$0\leqslant\alpha,\beta<0.5$，则

(1)$\overline{apc}_\beta(U)=\underline{apc}_\beta(U)=U$，$\overline{apc}_\beta(\emptyset)=\underline{apc}_\beta(\emptyset)=\emptyset$；

(2)$X\subseteq Y\Rightarrow\underline{apc}_\beta(X)\subseteq\underline{apc}_\beta(Y)$，$\overline{apc}_\beta(X)\subseteq\overline{apc}_\beta(Y)$；

(3)$\underline{apc}_\beta(X\cap Y)\subseteq\underline{apc}_\beta(X)\cap\underline{apc}_\beta(Y)$，$\overline{apc}_\beta(X\cup Y)\supseteq\overline{apc}_\beta(X)\cup\overline{apc}_\beta(Y)$，$\underline{apc}_\beta(X\cup Y)\supseteq\underline{apc}_\beta(X)\cup\underline{apc}_\beta(Y)$，$\overline{apc}_\beta(X\cap Y)\subseteq\overline{apc}_\beta(X)\cap\overline{apc}_\beta(Y)$；

(4)$\underline{apc}_\beta(X)\subseteq\overline{apc}_\beta(X)$；

(5)$\alpha\geqslant\beta\Rightarrow\underline{apc}_\alpha(X)\supseteq\underline{apc}_\beta(X)$，$\overline{apc}_\alpha(X)\subseteq\overline{apc}_\beta(X)$；

(6)$\underline{apc}_\beta(X)\subseteq\underline{apc}_\beta(\underline{apc}_\beta(X))$，$\overline{apc}_\beta(X)\subseteq\overline{apc}_\beta(\overline{apc}_\beta(X))$；

(7)$\overline{apc}_\beta(X)\subseteq\underline{apc}_\beta(\overline{apc}_\beta(X))$，$\underline{apc}_\beta(X)\subseteq\overline{apc}_\beta(\underline{apc}_\beta(X))$。

证明：(1)由定义知，对于$\forall x\in U$，$x\in N(x)$且$P(N(x),U)=0$，从而

$\underline{apc}_\beta(U)=\bigcup\{N(x)\mid P(N(x),U)\leqslant\beta\}=U$

$\overline{apc}_\beta(X)=\bigcup\{N(x)\mid P(N(x),X)<1-\beta\}=U$

类似可证$\overline{apc}_\beta(\emptyset)=\underline{apc}_\beta(\emptyset)=\emptyset$。

(2)设$x\in\underline{apc}_\beta(X)$，则存在$y\in U$使得$x\in N(y)$且$P(N(y),X)\leqslant\beta$，故由$P(N(y),Y)\leqslant P(N(y),X)\leqslant\beta$知$x\in\underline{apc}_\beta(Y)$。因此，$\underline{apc}_\beta(X)\subseteq\underline{apc}_\beta(Y)$。

同理$\overline{apc}_\beta(X)\subseteq\overline{apc}_\beta(Y)$。

(3)由(2)知$\underline{apc}_\beta(X\cap Y)\subseteq\underline{apc}_\beta(X)$，$\underline{apc}_\beta(X\cap Y)\subseteq\underline{apc}_\beta(Y)$，从而有$\underline{apc}_\beta(X\cap Y)\subseteq\underline{apc}_\beta(X)\cap\underline{apc}_\beta(Y)$。

其余各式证明类似。

(4) 由上、下近似的定义可直接推出。

(5)若$x\in\underline{apc}_\beta(X)$，则存在$y\in U$使得$x\in N(y)$且$P(N(y),X)\leqslant\beta$，从而当$\alpha\geqslant\beta$时，有$P(N(y),X)\leqslant\alpha$，即$x\in\underline{apc}_\alpha(X)$。因此，$\underline{apc}_\alpha(X)\supseteq\underline{apc}_\beta(X)$。同理$\overline{apc}_\alpha(X)\subseteq\overline{apc}_\beta(X)$。

(6)若$x\in\underline{apc}_\beta(X)$，则存在$y\in U$使得$x\in N(y)$且$P(N(y),X)\leqslant\beta$，注意到$N(x)\subseteq N(y)\subseteq\underline{apc}_\beta(X)$，故$P(N(x),\underline{apc}_\beta(X))=0\leqslant\beta$，即$x\in N(x)\subseteq\underline{apc}_\beta(\underline{apc}_\beta(X))$。所以$\underline{apc}_\beta(X)\subseteq\underline{apc}_\beta(\underline{apc}_\beta(X))$。另一式证明类似。

(7)若$x\in\overline{apr}_\beta X$，则存在$y\in U$使得$x\in N(y)$且$P(N(y),X)<1-\beta$，故有$N(x)\subseteq N(y)\subseteq\overline{apc}_\beta(X)$，$P(N(x),\overline{apc}_\beta(X))=0\leqslant\beta$，即$x\in\underline{apc}_\beta(\overline{apc}_\beta(X))$，所以$\overline{apc}_\beta(X)\subseteq\underline{apc}_\beta(\overline{apc}_\beta(X))$。另一式证明类似。

从文献[12]和上面模型Ⅱ的性质可以看出：这两种模型既有相似之处，又各具特点。如模型Ⅰ不具有传递性，而模型Ⅱ不具有对偶性。模型Ⅰ用于对象元素比较分散的数据集处理方面，而模型Ⅱ可以很好地对块状数据进行处理，因为它是以对象的邻域(数据块)为基础来聚类的，这样可以大大提高数据处理的效率。

4 近似算子的其它定义形式及其性质

由上述性质可以看出变精度覆盖粗糙集模型Ⅱ中的上、下近似算子不是对偶的，这对于近似计算来说是很不方便的。为了解决这对近似算子不能构成对偶的缺陷，参照文献[14]可以用两种方法去推广变精度覆盖粗糙集模型Ⅱ中的近似算子：

①$\underline{apc_\beta}'(X) = \bigcup\{N(x) \mid P(N(x),X)\leqslant\beta\} = \{x\in U \mid \exists y[x\in N(y), P(N(y),X)\leqslant\beta]\}$

$\overline{apc_\beta}'(X) = \sim\underline{apc_\beta}'(\sim X) = \sim\{x\in U \mid \exists y[x\in N(y), P(N(y),\sim X)\leqslant\beta]\} = \{x\in U \mid \forall y[x\in N(y)\Rightarrow P(N(y),X)<1-\beta]\}$。

②$\overline{apc''_\beta}(X) = \bigcup\{N(x) \mid P(N(x),X)<1-\beta\} = \{x\in U \mid \exists y[x\in N(y), P(N(y),X)<1-\beta]\}$，

$\underline{apc''_\beta}(X) = \sim\overline{apc''_\beta}(\sim X) = \sim\{x\in U \mid \exists y[x\in N(y), P(N(y),\sim X)<1-\beta]\} = \{x\in U \mid \forall y[x\in N(y)\Rightarrow P(N(y),X)\leqslant\beta]\}$。

定理 3 设(U,C)是覆盖近似空间，对于任意的子集 X，$Y\subseteq U$，$0\leqslant\beta<0.5$。X 关于覆盖近似空间(U,C)的 β 下近似 $\underline{apc_\beta}'(X)$和 β 上近似$\overline{apc_\beta}'(X)$分别满足下列性质：

(1)$\overline{apc_\beta}'(X) = \sim\underline{apc_\beta}'(\sim X)$，$\underline{apc_\beta}'(X) = \sim\overline{apc_\beta}'(\sim X)$；

(2)$X\subseteq Y\Rightarrow\underline{apc_\beta}'(X)\subseteq\underline{apc_\beta}'(Y)$，$\overline{apc_\beta}'(X)\subseteq\overline{apc_\beta}'(Y)$；

(3)$\underline{apc_\beta}'(X\cap Y)\subseteq\underline{apc_\beta}'(X)\cap\underline{apc_\beta}'(Y)$，$\overline{apc_\beta}'(X\cup Y)\supseteq\overline{apc_\beta}'(X)\cup\overline{apc_\beta}'(Y)$；

(4)$\underline{apc_\beta}'(X\cup Y)\supseteq\underline{apc_\beta}'(X)\cup\underline{apc_\beta}'(Y)$，$\overline{apc_\beta}'(X\cap Y)\subseteq\overline{apc_\beta}'(X)\cap\overline{apc_\beta}'(Y)$；

(5)$\underline{apc_\beta}'(X)\subseteq\underline{apc_\beta}'(\underline{apc_\beta}'(X))$，$\overline{apc_\beta}'(X)\supseteq\overline{apc_\beta}'(\overline{apc_\beta}'(X))$；

(6)$\alpha\geqslant\beta\Rightarrow\underline{apc_\alpha}'(X)\supseteq\underline{apc_\beta}'(X)$，$\overline{apc_\alpha}'(X)\subseteq\overline{apc_\beta}'(X)$；

(7)$\underline{apc_\beta}'(U) = \overline{apc_\beta}'(U) = U$，$\underline{apc_\beta}'(\varnothing) = \overline{apc_\beta}'(\varnothing) = \varnothing$。

证明：(1)由定义直接可得。

(2)设 $x\in\underline{apc_\beta}'(X)$，由定义知$\exists y\in U$，$x\in N(y)$且 $P(N(y),X)\leqslant\beta$。显然，对于 $X\subseteq Y$，有 $P(N(y),Y)\leqslant\beta$，结合 $x\in N(y)$，可知 $x\in\underline{apc_\beta}'(Y)$，于是$\underline{apc_\beta}'(X)\subseteq\underline{apc_\beta}'(Y)$。

由对偶性可证$\overline{apc_\beta}'(X)\subseteq\overline{apc_\beta}'(Y)$。

(3)由$\underline{apc_\beta}'(X\cap Y)\subseteq\underline{apc_\beta}'(X)$，$\underline{apc_\beta}'(X\cap Y)\subseteq\underline{apc_\beta}'(Y)$，故$\underline{apc_\beta}'(X\cap Y)\subseteq\underline{apc_\beta}'(X)\cap\underline{apc_\beta}'(Y)$。

$\overline{apc_\beta}'(X\cup Y)\supseteq\overline{apc_\beta}'(X)\cup\overline{apc_\beta}'(Y)$类似可证。

(4)证明类似于(3)。

(5) $\underline{apc_\beta}'(X)\subseteq\underline{apc_\beta}'(\underline{apc_\beta}'(X))$即为定理 2 中(6)。由对偶性

$\overline{apc_\beta}'(\overline{apc_\beta}'(X)) = \sim\underline{apc_\beta}'(\sim\sim\underline{apc_\beta}'(\sim X)) = \sim\underline{apc_\beta}'(\underline{apc_\beta}'(\sim X))\subseteq\sim\underline{apc_\beta}'(\sim X) = \overline{apc_\beta}'(X)$。

(6)由定理 2 中(5)及对偶性可得。

(7)类似于定理 2 中(1)式，由定义直接可证。

定理 4 设(U,C)是覆盖近似空间，对于任意的子集 $X\subseteq U$，$0\leqslant\beta<0.5$，X 关于覆盖近似空间(U,C)的 β 下近似$\underline{apc_\beta}''(X)$和上近似$\overline{apc_\beta}''(X)$分别满足下列性质：

(1)$\overline{apc_\beta}''(X) = \sim\underline{apc_\beta}''(\sim X)$，$\underline{apc_\beta}''(X) = \sim\overline{apc_\beta}''(\sim X)$；

(2)$X\subseteq Y\Rightarrow\underline{apc_\beta}''(X)\subseteq\underline{apc_\beta}''(Y)$，$\overline{apc_\beta}''(X)\subseteq\overline{apc_\beta}''\beta(Y)$；

(3)$\overline{apc_\beta}''(X\cup Y)\supseteq\overline{apc_\beta}''(X)\cup\overline{apc_\beta}''(Y)$，$\underline{apc_\beta}''(X\cap Y)\subseteq\underline{apc_\beta}''(X)\cap\underline{apc_\beta}''(Y)$；

(4)$\overline{apc_\beta}''(X\cap Y)\subseteq\overline{apc_\beta}''(X)\cap\overline{apc_\beta}''(Y)$，$\underline{apc_\beta}''(X\cup Y)\supseteq\underline{apc_\beta}''(X)\cup\underline{apc_\beta}''(Y)$；

(5)$\overline{apc_\beta}''(X)\subseteq\overline{apc_\beta}''(\overline{apc_\beta}''(X))$，$\underline{apc_\beta}''(X)\supseteq\underline{apc_\beta}''(\underline{apc_\beta}''(X))$；

(6)$\alpha\geqslant\beta\Rightarrow\underline{apc_\alpha}''(X)\supseteq\underline{apc_\beta}''(X)$，$\overline{apc_\alpha}''(X)\subseteq\overline{apc_\beta}''(X)$；

(7)$\underline{apc_\beta}''(U) = \overline{apc_\beta}''(U) = U$，$\underline{apc_\beta}''(\varnothing) = \overline{apc_\beta}''(\varnothing) = \varnothing$。

证明：(1)由定义直接可得。

(2)设 $x\in\overline{apc_\beta}''(X)$，由定义知$\exists y\in U$，$x\in N(y)$且 $P(N(y),X)<1-\beta$。显然对于 $X\subseteq Y$，有 $P(N(y),Y)<1-\beta$，结合 $x\in N(y)$，可知 $x\in\overline{apc_\beta}''(Y)$，于是$\overline{apc_\beta}''(X)\subseteq\overline{apc_\beta}''(Y)$。

由对偶性可证$\underline{apc_\beta}''(X)\subseteq\underline{apc_\beta}''(Y)$。

(3)由$\overline{apc_\beta}''(X)\subseteq\overline{apc_\beta}''(X\cup Y)$，$\overline{apc_\beta}''(Y)\subseteq\overline{apc_\beta}''(X\cup Y)$，故$\overline{apc_\beta}''(X\cup Y)\supseteq\overline{apc_\beta}''(X)\cup\overline{apc_\beta}''(Y)$。

$\underline{apc_\beta}''(X\cap Y)\subseteq\underline{apc_\beta}''(X)\cap\underline{apc_\beta}''(Y)$类似可证。

(4)证明类似于(3)。

(5)$\overline{apc_\beta}''(X)\subseteq\overline{apc_\beta}''(\overline{apc_\beta}''(X))$即为定理 2 中(6)。由对偶性

$\underline{apc_\beta}''(\underline{apc_\beta}''(X)) = \sim\overline{apc_\beta}''(\sim\sim\overline{apc_\beta}''(\sim X)) = \sim\overline{apc_\beta}''(\overline{apc_\beta}''(\sim X))\subseteq\sim\overline{apc_\beta}''(\sim X) = \underline{apc_\beta}''(X)$。

(6)由定理 2 中(5)及对偶性可得。

(7)类似于定理 2 中(1)式，由定义直接可证。

5 近似算子之间的关系

本节讨论上述近似算子之间的关系。

定理 5 设(U,C)是覆盖近似空间，对于$\forall X\subseteq U$，$0\leqslant\beta<0.5$，若集合类$\{N(x) \mid x\in U\}$构成了 U 的一个划分，则变精度覆盖粗糙集模型Ⅱ中近似算子的推广式①和②定义的两对近似算子是等价的。

证明：设集合类$\{N(x) \mid x\in U\}$构成了 U 的一个划分，对于$\forall X\subseteq U$，$0\leqslant\beta<0.5$，显然$\overline{apc_\beta}'(X)\subseteq\overline{apc_\beta}''(X)$。下证$\overline{apc_\beta}'(X)\supseteq\overline{apc_\beta}''(X)$。若不然，则存在 $x\in\overline{apc_\beta}''(X)-\overline{apc_\beta}'(X)$。由 $x\in\overline{apc_\beta}''(X)$知$\exists y\in U$ 使 $x\in N(y)$，$P(N(y),X)<1-\beta$；而由 $x\notin\overline{apc_\beta}'(X)$知$\exists z\in U$ 使 $x\in N(z)$但 $P(N(z),X)\geqslant1-\beta$。因为 $x\in N(y)\cap N(z)\neq\phi$，故 $N(y)=N(z)$，从而 $P(N(y),X)<1-\beta$ 与 $P(N(z),X)\geqslant1-\beta$ 是矛盾的，所以$\overline{apc_\beta}'(X)\supseteq\overline{apc_\beta}''(X)$。

由对偶性可证$\underline{apc_\beta}''(X) = \underline{apc_\beta}'(X)$。

定理 6 设(U,C)是覆盖近似空间，对于$\forall X\subseteq U$，$0\leqslant\beta<0.5$，则变精度覆盖粗糙集模型Ⅰ中的近似算子与变精度覆盖粗糙集模型Ⅱ中近似算子的推广式①满足关系式：

$\underline{apc_\beta}''(X)\subseteq\underline{C}_\beta(X)\subseteq\underline{apc_\beta}'(X)$，$\overline{apc_\beta}'(X)\subseteq\overline{C}_\beta(X)\subseteq\overline{apc_\beta}''(X)$。

证明：若 $x\in \underline{apc_\beta}''(X)$，则对于任意 $y\in U, x\in N(y)$ 时，有 $P(N(y),X)\leqslant\beta$。因 $x\in N(x)$，故 $P(N(x),X)\leqslant\beta$，即 $x\in \underline{C_\beta}(X)$。故 $\underline{apc_\beta}''(X)\subseteq\underline{C_\beta}(X)$。再由 $x\in N(x)$ 即得 $\underline{C_\beta}(X)\subseteq\underline{apc_\beta}'(X)$。另一式子类似可证。

推论 设 (U,C) 是覆盖近似空间，$0\leqslant\beta<0.5$，若集合类 $\{N(x)\mid x\in U\}$ 构成了 U 的一个划分，则变精度覆盖粗糙集模型Ⅰ中的近似算子、模型Ⅱ中的近似算子、推广式①和推广式②等价，即覆盖近似空间 (U,C) 中近似算子满足：

$$\underline{apc_\beta}''(X)=\underline{C_\beta}(X)=\underline{apc_\beta}(X)=\underline{apc_\beta}'(X),$$

$$\overline{apc_\beta}'(X)=\overline{C}_\beta(X)=\overline{apc_\beta}(X)=\overline{apc_\beta}''(X)。$$

结束语 粗糙集模型的推广研究主要包括两方面的内容：一是推广近似空间中的等价关系，另一种方法是拓广被近似的对象。本文把论域上的等价关系扩展为论域上的覆盖，定义了两种类型的变精度覆盖粗糙集模型，并讨论了它们的基本性质。由于变精度覆盖粗糙集模型Ⅱ的上、下近似算子不满足对偶性，所以从对偶性的角度出发又对变精度覆盖粗糙集模型Ⅱ进一步进行推广，得到了两对对偶的上、下近似算子，讨论了它们之间的关系。如何将相关理论研究结果应用于信息系统知识发现是我们下一步要解决的问题。

参考文献

[1] Pawlak Z, Skowron A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007,177:3-27

[2] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets: Some extensions[J]. Information Sciences, 2007,177:28-40

[3] Pawlak Z, Skowron A. Rough Sets and Boolean Reasoning[J]. Information Sciences, 2007,177:41-73

[4] Ziarko W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer System Science,1993, 46(1): 39-59

[5] 陶志，许宝栋，汪定伟，等. 基于变精度粗糙集理论的粗糙规则挖掘算法[J]. 信息与控制，2004,33(1):18-22

[6] Beynon M . Reducts within the variable precision rough sets model: A further investigation[J]. European Journal of Operational Research,2001, 134: 592-605

[7] 张文修，梁怡，吴伟志，等. 信息系统与知识发现[M]. 北京：科学出版社，2003:56-67

[8] Inuiguchi M. Structure-Based Approaches to Attribute Reduction in Variable Precision Rough Set Models[A]//Proceeding of 2005 IEEE International Conference on Granular Computing [C]. Beijing,China, IEEE GrC2005, 2005:34-39

[9] Mieszkowicz - Rolka A , Rolka L . Remarks on approximation quality in variable precision fuzzy rough sets model[A]//Rough Sets and Current Trends in Computing. 4th International Conference, RSCTC 2004[C]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2004: 402-411

[10] Mieszkowicz-Rolka A, Rolka L. Fuzzy implication operators in variable precision fuzzy rough sets model[A]//Artifical Intelligence and Soft Computing- ICAISC 2004(volume 3070)[C]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2004: 498-503

[11] 巩增泰，孙秉珍，邵亚斌，等. 一般关系下的变精度粗糙集模型[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2005,41(6):110-114

[12] 张亚军，王艳平. 基于覆盖的变精度粗糙集模型[J]. 辽宁工学院学报，2006,26(4):274-276

[13] Zhu W,Wang F Y. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. Information Sciences,2003 ,152: 217-230

[14] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2003:41-131

(上接第 202 页)

大规模种群范围内进一步改善搜索结果，可借助于量子行为的研究成果来发展粒子群算法，例如，在位置更新中可采用矢量法[16]来实现两个或多个目标的分别更新，这将是该算法下一步的改进目标。

参考文献

[1] Zhang Hong, Li Xiaodong, Li heng, et al. particle swarm optimization-based schemes for resource-constrained project scheduling [J]. Automation in Construction, 2005, 14:393-404

[2] Pan Q K,Tasgetiren M F,Liang Y C. A discrete particle swarm optimization algorithm for the no-wait flowshop scheduling problem with makespan criterion[c]//Proceedings of the International Workshop on UK Planning and Scheduling Special Interest Group. London,UK:City University,2005:31-41

[3] Kennedy J,Eberhard R C,Particle swarm optimization//Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway, NJ, USA, 1995:1942-1948

[4] 王凌，刘波. 微粒群优化与调度算法[M]. 北京：清华大学出版社，2008

[5] Li Xiaoping , Wang Qian , Wu Cheng . An Efficient Method for No-Wait Flow Shop Scheduling to Minimize Makespan[J]//Proceedings of the 10th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design. 2006

[6] Nawaz M,Enscore E, Ham I. A heuristic algorithm for the m-machine , n-job flow-shop sequencing problem. Omega, 1983, 11:91-95

[7] Hansen P , Mladenovic N . Variable neighborhood search [J] . Computers in Operations Research,1997,24: 1097-1100

[8] Carlier J. Ordonnancements a contraints disjonctives. R. A. I. R. O. RechercheOperationelle/Oper. Res. ,1978,12:333-351

[9] Rajendran C. A no-wait flowshop scheduling heuristic to minimize makespan. Oper Res soc. ,1994,45:472-478

[10] 窦全胜，周春光，马铭，等. 群核进化粒子群优化方法. 计算机科学[J],2005,32(8):134-137

[11] 童璧，吴智铭，童争雄. 一种自适应的微粒群算法. 计算机科学[J],2007,34(9):198-199,252

[12] 曾立平，黄文奇. 一种求解车间作业调度问题的混合邻域结构搜索算法. 计算机科学[J],2005,32(5):177-180,189

[13] 张居阳，孙吉贵. 组合优化调度问题求解方法. 计算机科学[J],2003,30(2):9-16

[14] Grabowski J,Pempera J. Some local search algorithms for no-wait flow-shop problem with makespan criterion [J]. Computers& Operations Research,2005,32(8): 2197-2212

[15] Aldowaisan T , Allahverdi A . New heuristic for no - wait flow - shops to minimize makespan [J]. Computer& Operation research,2003,30(8):1219-1231

[16] Sun J,Feng B,Xu W B. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior//Proc. Of the IEEE CEC. 2004: 325-331