

赋范格 H 蕴涵代数和模糊格 H 蕴涵代数^{*}

赖家俊¹ 徐扬² 乔全喜¹

(西南交通大学智能控制开发中心 成都 610031)¹ (西南交通大学数学系 成都 610031)²

摘要 在范数的条件下扩充了格 H 蕴涵代数的概念,即赋范格 H 蕴涵代数,并讨论一些性质。然后将模糊集合论运用于赋范格 H 蕴涵代数,给出了模糊赋范格 H 蕴涵代数的定义,得到了一些基本性质。通过使用两个赋范格 H 蕴涵代数之间的映射定义了赋范格 H 蕴涵代数同态,且得到了一些性质。最后得到了在赋范格 H 蕴涵代数中的数列对于蕴涵距离是有界的结论。

关键词 赋范格 H 蕴涵代数,模糊赋范格 H 蕴涵代数,赋范格 H 蕴涵代数同态,数列

Normed Lattice H Implication Algebras and Fuzzy Lattice H Implication Algebras

LAI Jia-jun¹ XU Yang² QIAO Quan-xi¹

(Intelligent Control Development Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)¹

(Department of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)²

Abstract Extended the notion of lattice H implication algebra L under a norm situation (i. e., normed lattice H implication algebras), and some properties were discussed. At the other hand, by applying the fuzzy set concept to normed lattice H implication algebras, introduced the notion of fuzzy normed lattice H implication algebras and discussed some of the basic properties. Defined a normed lattice H implication homomorphism by use of a mapping f which has two normed lattice H implication algebras L_1 and L_2 , and obtain its properties. It is shown that sequences operations to implication distance in a normed lattice H implication algebra are bounded.

Keywords Normed lattice H implication algebra, Fuzzy normed lattice H implication algebra, Lattice H implication homomorphism, Sequence

1 引言

非经典逻辑为智能控制处理不确定信息和自动推理提供了有意义的形式工具。而多值逻辑是经典逻辑的扩充^[1],并且为经典逻辑的推理和模型提供了一种变化形式。Goguen^[4], Pavelka^[5]和 Novak^[6]对格值逻辑形式系统的研究,发现格值在多值逻辑这一领域里起着重要作用^[2,3]。因此,为了研究在一个格里面给出命题值的多值逻辑系统,徐扬^[7,8]在1990年提出了格蕴涵代数并得到了许多有用的性质。自那以后,经过多位学者的研究,这一逻辑代数得到了很大的扩充^[9-14]。在文献^[15]中,徐扬和秦克云提出了一类重要的格蕴涵代数,即格 H 蕴涵代数。在文献^[16]中,秦克云等提出了赋范格蕴涵代数并得到了一些性质。在文献^[17,18]中,赖家俊等对格蕴涵代数以及相关代数进行研究,得到了一些性质。本文作为以上工作的扩充,提出了赋范格 H 蕴涵代数、模糊赋范格 H 蕴涵代数以及相应的蕴涵同态的概念,同时研究了它们的性质。

2 预备知识

定义 2.1^[7] 设 $(L, \vee, \wedge, ', \rightarrow, 0, I)$ 是一个带有逆序对合'和二元运算 \rightarrow 的有界格, 0 和 I 分别是它的最小元和最大元。 $(L, \vee, \wedge, ', \rightarrow, 0, I)$ 称为格蕴涵代数,如果映射 $\rightarrow: L \times L \rightarrow L$ 满足下列条件:对 L 中的任意元素 x, y, z 有:

- (L1) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$,
- (L2) $x \rightarrow x = I$,
- (L3) $x \rightarrow y = y' \rightarrow x'$,
- (L4) 如果 $x \rightarrow y = y \rightarrow x = I$, 那么 $x = y$,
- (L5) $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$,
- (L6) $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$,
- (L7) $(x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$.

定义 2.2^[15] 设 L 是一个格蕴涵代数,对于任意的 $x, y, z \in L$, 如果满足

$$x \vee y \vee ((x \wedge y) \rightarrow z) = 1$$

则称格蕴涵代数 L 是一个格 H 蕴涵代数。

定义 2.3^[16] 设 L 是一个格蕴涵代数,如果 L 中的每一个元素 x 都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应的函数满足以下公理:

- (N1) $(\forall x \in L)(\|x\| \geq 0)$
- (N2) $(\forall x \in L)(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 1)$
- (N3) $(\forall x, y, z \in L)(\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|)$

则称这个函数是 L 的一个范数。

命题 2.4^[16] 设 d_{\rightarrow} 是格蕴涵代数 L 的蕴涵距离, d_{\vee} 是 L 的 \vee -距离, 则有以下结论成立:

- (1) $(\forall x \in L)(d_{\rightarrow}(x, 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1)$
- (2) $(\forall x \in L)(d_{\rightarrow}(x, x) = 0)$
- (3) $(\forall x \in L)(d_{\rightarrow}(1, x) = 0)$

^{*}国家自然科学基金资助项目(60474022),教育部博士点专项基金资助项目(20060613007)。赖家俊 博士研究生,研究方向为逻辑代数、智能信息处理;徐扬 教授,博士生导师,主要研究方向为逻辑代数、智能信息处理、不确定性推理和自动推理等。

- (4) $(\forall x, y, z \in L)(x \leq y \Rightarrow d_-(y, z) \leq d_-(x, z), d_-(x, z) < \epsilon \Rightarrow d_-(x, y) < \epsilon)$
 (5) $(\forall x, y, z \in L)(d_-(x \rightarrow y, z) \leq d_-(y, z))$
 (6) $(\forall x \in L)(d_V(x, 1) = 0)$
 (7) $(\forall x, y, z \in L)(x \leq y \Rightarrow d_V(y, z) \leq d_V(x, z))$

3 赋范格 H 蕴涵代数与模糊赋范格 H 蕴涵代数

定义 3.1^[16] 设 L 是一个格 H 蕴涵代数, 如果 L 中的一个元素 x 都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应的函数满足以下公理:

- (N1) $(\forall x \in L)(\|x\| \geq 0)$
 (N2) $(\forall x \in L)(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 1)$
 (N3) $(\forall x, y, z \in L)(\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|)$

则将具有范数的格 H 蕴涵代数 L 称为一个赋范格 H 蕴涵代数. 实数 $\|x\|$ 就称为 x 的范数. L 的蕴涵距离定义为一个函数 $d_-: L \times L \rightarrow R$, 且对任意 $(x, y) \in L \times L$ 有 $d_-(x, y) = \|y - x\|$, L 的 \vee -距离定义为一个函数 $d_V: L \times L \rightarrow R$, 且对任意 $(x, y) \in L \times L$ 有 $d_V(x, y) = \|x \vee y\|$. L 的 \wedge -距离定义为一个函数 $d_\wedge: L \times L \rightarrow R$, 且对任意 $(x, y) \in L \times L$ 有 $d_\wedge(x, y) = \|x \wedge y\|$.

注: $d_V(x, y) = d_V(y, x)$, $d_\wedge(x, y) = d_\wedge(y, x)$, 但一般情况下 $d_-(x, y) \neq d_-(y, x)$; 除特别说明之外, 我们设 L 是一个赋范格 H 蕴涵代数.

定义 3.2 设 L 是一个赋范格 H 蕴涵代数, 对任意 $x \in L$ 和一个正实数 ϵ , $S_-(x, \epsilon)$ 表示与 x 的蕴涵距离小于 ϵ 的所有内点集合, 即 $S_-(x, \epsilon) = \{y \in L | d_-(y, x) < \epsilon\}$. 则称 $S_-(x, \epsilon)$ 以 x 为中心, ϵ 为半径的蕴涵开球. 集合 $\bar{S}_-(x, \epsilon) = \{y \in L | d_-(y, x) \leq \epsilon\}$ 称为以 x 为中心, ϵ 为半径的蕴涵闭球.

定义 3.3 设 L 是一个赋范格 H 蕴涵代数. $S \subseteq L$ 称为赋范格 H 蕴涵代数子代数, 如果下列条件成立:

- (1) $(S, \vee, \wedge, ')$ 是 (L, \vee, \wedge) 带有逆序对合“'”的一个有界子格;
 (2) 若 $x, y \in S$, 则 $x \rightarrow y \in S$.

定理 3.4 若 L 是一个赋范格 H 蕴涵代数, 则对任意 $x \in L$ 和一个正实数 ϵ , 蕴涵开(或闭)球 $S_-(x, \epsilon)$ (或 $\bar{S}_-(x, \epsilon)$) 是 L 的一个拟子代数.

证明: 假设 $a, b \in S_-(x, \epsilon)$, 则有 $d_-(a, x) < \epsilon$. 因为 $a \leq b \rightarrow a$, 所以就有

$$d_-(b \rightarrow a, x) \leq d_-(a, x) < \epsilon$$

因此 $b \rightarrow a \in S_-(x, \epsilon)$. 故我们得到 $S_-(x, \epsilon)$ 是 L 的子代数. 类似上述证明过程, 我们也可以得到 $\bar{S}_-(x, \epsilon)$ 是 L 的一个拟子代数.

定理 3.5 设 d_- 一个赋范格 H 蕴涵代数的蕴涵距离. 对任意 $a \in L$ 和一个正实数 ϵ , 则有集合 $F = \{b \in L | d_-(a, b) < \epsilon\}$ 是 L 的一个蕴涵滤子.

证明: 因为 $(d_-(1 \rightarrow x, 1) = \|1 \rightarrow (1 \rightarrow x)\| = \|1 \rightarrow x\| = \|x\| < \epsilon)$, 故我们可以得到 $1 \in F$.

假设对任意的 $x, y, z \in L$ 使得 $x \rightarrow y \in F, x \rightarrow (y \rightarrow z) \in F$ 成立. 由于

$$x \rightarrow z \leq (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = x \rightarrow (y \rightarrow z)$$

$$(x \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow a) = (x \rightarrow z) \rightarrow a$$

$$(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow a) = (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow a$$

根据命题 2.4^[16] 可得

$$d_-(x \rightarrow z, a) \leq d_-(x \rightarrow (y \rightarrow z), a), x \rightarrow (y \rightarrow z) \in F$$

因此就有 $x \rightarrow z \in F$. 故 F 是 L 的一个蕴涵滤子.

定理 3.6 若 L 是一个赋范格 H 蕴涵代数, 则对 L 中的任意一个蕴涵距离 d_- , 集合 $S_-(x, \epsilon) = \{y \in L | d_-(x \rightarrow y, x) < \epsilon\}$ 和 $\bar{S}_-(x, \epsilon) = \{y \in L | d_-(x \rightarrow y, x) \leq \epsilon\}$ 在运算“ \rightarrow ”下都是闭的.

证明: 假设 $a, b \in S_-(x, \epsilon)$, 则有

$$d_-(x \rightarrow a, x) = \|x \rightarrow (x \rightarrow a)\| = \|x \rightarrow a\| < \epsilon$$

$$d_-(x \rightarrow b, x) = \|x \rightarrow (x \rightarrow b)\| = \|x \rightarrow b\| < \epsilon$$

因此就可以得到 $d_-(x \rightarrow a, x) < \epsilon, d_-(x \rightarrow b, x) < \epsilon$. 因为

$$d_-(x \rightarrow (a \rightarrow b), x) = \|x \rightarrow (x \rightarrow (a \rightarrow b))\| = \|x \rightarrow (a \rightarrow b)\|, a \leq b \rightarrow a$$

由命题 2.4 可以得到 $d_-(a \rightarrow b, x) \leq d_-(b, x) < \epsilon$. 所以 $d_-(x \rightarrow (a \rightarrow b), x) < \epsilon$, 即 $a \rightarrow b \in S_-(x, \epsilon)$. 这就证明了 $S_-(x, \epsilon)$ 在运算“ \rightarrow ”下是闭的. 类似可证 $\bar{S}_-(x, \epsilon)$ 在运算“ \rightarrow ”下是闭的.

由前面的一些结论很容易得到下面这个命题.

定理 3.7 若 L 是一个赋范格 H 蕴涵代数, 则对 L 中的任意一个蕴涵距离 d_- , 下列命题是等价的:

- (1) L 是一个赋范格 H 蕴涵代数;
 (2) 对任意 $x, y \in L$, 则有 $d_-(x \rightarrow y, x) = d_-(y, x)$;
 (3) 对任意 $x, y, z \in L$, 则有 $d_-(x \rightarrow z, y) = d_-(x \rightarrow z, x \rightarrow y)$;
 (4) 对任意 $x, y, z \in L$, 则有 $d_-(x \rightarrow z, y) = d_-(z, x \wedge y)$.

定理 3.8 若 d_- 是一个赋范格 H 蕴涵代数 L 的一个蕴涵距离, 则有 L 是赋范格 H 蕴涵代数的充分必要条件是 $d_-(x', x) = d_-(o, x)$.

证明: 根据格蕴涵代数的性质, 我们可得到 L 是格蕴涵代数的充分必要条件为: 对任意 $x \in L$ 都有 $x' \vee x = I$ 成立. 又因为

$$\begin{aligned} d_-(x', x) = d_-(o, x) &\Leftrightarrow \|x \rightarrow x'\| = \|x \rightarrow o\| \Leftrightarrow x \rightarrow x' = x' \\ &\Leftrightarrow (x \rightarrow x') \rightarrow x' = x' \rightarrow x' \\ &\Leftrightarrow x \vee x' = I \end{aligned}$$

从而可知命题成立. 证毕.

推论 3.9 假设 d_- 是一个赋范格 H 蕴涵代数 L 的一个蕴涵距离, 那么对任意 $x \in L$ 和 $n \in N^+$, 都有 $d_-(x', x^n) = d_-(o, x)$ 成立.

定理 3.10 假设 d_- 是一个赋范格 H 蕴涵代数 L 的一个蕴涵距离, 则有集合 $S_-(x, \epsilon) = \{y \in L | d_-(y, x) < \epsilon\}$ 和 $S_\wedge(x, \epsilon) = \{y \in L | d_\wedge(y, x) < \epsilon\}$ 在运算“ \vee ”下是闭的.

证明: 假设任意 $a, b \in S_-(x, \epsilon)$, 就可以得到 $d_-(a, x) < \epsilon$ 和 $d_-(b, x) < \epsilon$ 成立. 因为由格蕴涵代数的性质可得 $a \vee b \geq a$ 蕴涵着 $x \rightarrow (a \vee b) \geq x \rightarrow a$ 成立, 因此就有 $\|x \rightarrow (a \vee b)\| \leq \|x \rightarrow a\|$ 成立, 即 $d_-(a \vee b, x) \leq d_-(a, x) < \epsilon$ 成立. 所以就有 $a \vee b \in S_-(x, \epsilon)$.

设 $\forall a, b \in S_\wedge(x, \epsilon)$, 则可以得到 $d_\wedge(a, x) < \epsilon$ 和 $d_\wedge(b, x) < \epsilon$. 又因为 $(a \vee b) \wedge x = (a \wedge x) \vee (b \wedge x) \geq a \wedge x$ 蕴涵 $d_\wedge((a \vee b), x) \leq d_\wedge(a, x)$ 成立.

因此, $d_\wedge(a \vee b, x) \leq d_\wedge(a, x) < \epsilon$ 成立. 故可以得到 $a \vee b \in S_\wedge(x, \epsilon)$. 命题得到了证明.

下面, 我们用 $F_{(L)}$ 表示 L 中所有模糊子集的集合.

定义 3.11 设 L 是一个赋范格 H 蕴涵代数, $\mu \in F_{(L)}$, μ 就称为一个模糊赋范格 H 蕴涵代数, 如果 μ 满足下列条件:

- (1) $\mu(1) = \mu(0)$;
- (2) $\forall x, y \in L, \mu(x \rightarrow (x \rightarrow y)) = \mu(x \rightarrow y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

这里的 1 和 0 分别为 L 的最大元和最小元。

下面我们考虑模糊赋范格 H 蕴涵代数的性质。

定理 3.12 如果 μ 是一个模糊赋范格 H 蕴涵代数, 那么对任意 $x, y, z \in L$:

- (1) $\mu(1) = \mu(0) \geq \mu(x)$;
- (2) $\mu(x) = \mu(x')$;
- (3) $\mu(x \wedge y \rightarrow z) \geq \min\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\}$;
- (4) $\mu(x \vee x') = \mu(0)$;
- (5) $\mu(x \vee y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

证明: (1) 假设 μ 是一个模糊赋范格 H 蕴涵代数, 则对于任意的 $x, y \in L$ 就有 $\mu(1) = \mu(x \rightarrow x) \geq \min\{\mu(x), \mu(x)\} = \mu(x)$ 成立。

因此, 我们根据定义就可以得到 $\mu(1) = \mu(0) \geq \mu(x)$ 成立。

(2) 因为 $\mu(x') = \mu(x \rightarrow 0) \geq \min\{\mu(x), \mu(0)\} = \mu(x)$, 所以有 $\mu(x') \geq \mu(x)$ 成立。

另一方面, $\mu(x) = \mu(x' \rightarrow 0) \geq \min\{\mu(x'), \mu(0)\} = \mu(x')$, 即 $\mu(x) \geq \mu(x')$ 成立。

这就证明了 $\mu(x) = \mu(x')$ 成立。

(3) 根据格 H 蕴涵代数的性质, 我们可以得到 $\mu(x \wedge y \rightarrow z) = \mu(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \geq \min\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\}$ 因此命题得证。

(4) 对任意 $x \in L$, 根据格 H 蕴涵代数的性质 $x \vee x' = 1$, 我们得到 $\mu(x \vee x') = \mu(1)$ 。又因为 $\mu(1) = \mu(0)$, 所以就有 $\mu(x \vee x') = \mu(0)$ 。

(5) 由定义 2.1 可得到下列等式成立:

$$\begin{aligned} \mu(x \vee y) &= \mu((x \rightarrow y) \rightarrow y) \geq \min\{\mu(x \rightarrow y), \mu(y)\} \\ &= \min\{\min\{\mu(x), \mu(y)\}, \mu(y)\} \\ &= \min\{\mu(x), \mu(y)\} \end{aligned}$$

故有 $\mu(x \vee y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ 成立。

定理 3.13 如果 μ_i 是一个模糊赋范格 H 蕴涵代数, $i \in I$, I 是一个指标集, 那么 $\bigcup_{i \in I} \mu_i$ 和 $\bigcap_{i \in I} \mu_i$ 都是 L 的模糊赋范格 H 蕴涵代数。

证明: 对任意 $x, y, z \in L$, 我们都可以得到下面这些结论:

$$\begin{aligned} (\bigcup_{i \in I} \mu_i)(1) &= \bigvee_{i \in I} \mu_i(1) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(0) = (\bigcup_{i \in I} \mu_i)(0) \\ (\bigcap_{i \in I} \mu_i)(1) &= \bigwedge_{i \in I} \mu_i(1) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(0) = (\bigcap_{i \in I} \mu_i)(0) \\ (\bigcup_{i \in I} \mu_i)(x \rightarrow (x \rightarrow y)) &= \bigvee_{i \in I} \mu_i(x \rightarrow (x \rightarrow y)) = \bigvee_{i \in I} \mu_i((x \rightarrow y)) \\ &\geq \bigvee_{i \in I} \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\} = \min\{\bigvee_{i \in I} \mu_i(x), \bigvee_{i \in I} \mu_i(y)\} \\ &= \min\{(\bigcup_{i \in I} \mu_i)(x), (\bigcup_{i \in I} \mu_i)(y)\} \\ (\bigcap_{i \in I} \mu_i)(x \rightarrow (x \rightarrow y)) &= \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x \rightarrow (x \rightarrow y)) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i((x \rightarrow y)) \\ &\geq \bigwedge_{i \in I} \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\} = \min\{\bigwedge_{i \in I} \mu_i(x), \bigwedge_{i \in I} \mu_i(y)\} \\ &= \min\{(\bigcap_{i \in I} \mu_i)(x), (\bigcap_{i \in I} \mu_i)(y)\} \end{aligned}$$

因此, $\bigcup_{i \in I} \mu_i$ 和 $\bigcap_{i \in I} \mu_i$ 都是 L 的模糊赋范格 H 蕴涵代数。

我们很容易得到下列几个结论, 由于篇幅的限制, 其证明过程省略。

定理 3.14 如果 μ 是一个模糊赋范格 H 蕴涵代数, 对任意 $x \in L$ 有

$$\nu = \{x \mid x \in L, \mu(x) = \mu(1)\}$$

那么 ν 是 L 的一个模糊赋范格 H 蕴涵代数。

定理 3.15 如果 μ 是 $F_{(L)}$ 中的一个元素且 $\mu \neq \emptyset, t \in [0, 1]$, 那么 $\mu_t = [t, 1]$ 是 L 的一个模糊赋范格 H 蕴涵代数。

定义 3.16 假设 L_1 和 L_2 是赋范格 H 蕴涵代数, 如果映射 $f: L_1 \rightarrow L_2$ 对于任意 $x, y \in L$ 满足下列条件:

- (1) $f(x \rightarrow y) = f(x) \rightarrow f(y)$;
- (2) $f(d_{\rightarrow}(x, y)) = d_{\rightarrow}(f(x), f(y))$ 。

则称 f 是一个从 L_1 到 L_2 的赋范蕴涵同态。如果一个赋范蕴涵同态 f 是满射, 那么 f 就称为赋范蕴涵满态射。如果 f 是一个赋范蕴涵同态且满足:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y); f(d_{\vee}(x, y)) = d_{\vee}(f(x), f(y)),$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); f(d_{\wedge}(x, y)) = d_{\wedge}(f(x), f(y)),$$

$$f(x') = (f(x))'; \|f(x')\| = \|f(x)'\|。$$

那么称 f 是一个从 L_1 到 L_2 的赋范格 H 蕴涵同态。若存在一个从 L_1 到 L_2 的赋范格 H 蕴涵同构, 则就称 L_1 与 L_2 为赋范同构的, 且表示为 $L_1 \cong L_2$ 。

定理 3.17 如果 L_1 和 L_2 是赋范格 H 蕴涵代数, f 是一个从 L_1 到 L_2 的赋范蕴涵同态。那么对任意的 $x, y, z \in L_1$, 下列结论成立:

- (1) $f(d_{\vee}(x, y) \vee d_{\vee}(x, z)) = d_{\vee}(f(x), f(y)) \vee d_{\vee}(f(x), f(z))$;
- (2) $f(d_{\vee}(x, y) \wedge d_{\vee}(x, z)) = d_{\vee}(f(x), f(y)) \wedge d_{\vee}(f(x), f(z))$;
- (3) $f(d_{\vee}(x, y) \rightarrow (d_{\vee}(x, y) \rightarrow d_{\vee}(x, z))) = d_{\vee}(f(x), f(y)) \rightarrow d_{\vee}(f(x), f(z))$;
- (4) $f(d_{\wedge}(x, y) \vee d_{\wedge}(x, z)) = d_{\wedge}(f(x), f(y)) \vee d_{\wedge}(f(x), f(z))$;
- (5) $f(d_{\wedge}(x, y) \wedge d_{\wedge}(x, z)) = d_{\wedge}(f(x), f(y)) \wedge d_{\wedge}(f(x), f(z))$;
- (6) $f(d_{\wedge}(x, y) \rightarrow (d_{\wedge}(x, y) \rightarrow d_{\wedge}(x, z))) = d_{\wedge}(f(x), f(y)) \rightarrow d_{\wedge}(f(x), f(z))$ 。

证明: (1) 对任意的 $x, y, z \in L_1$, 假设 f 是一个从 L_1 到 L_2 的赋范蕴涵同态, 我们就可以得到

$$\begin{aligned} f(d_{\vee}(x, y) \vee d_{\vee}(x, z)) &= f((d_{\vee}(x, y) \rightarrow d_{\vee}(x, z)) \rightarrow d_{\vee}(x, z)) \\ &= (f(d_{\vee}(x, y) \rightarrow f(d_{\vee}(x, z)))) \rightarrow f(d_{\vee}(x, z)) \\ &= (d_{\vee}(f(x), f(y)) \rightarrow d_{\vee}(f(x), f(z))) \rightarrow d_{\vee}(f(x), f(z)) \\ &= d_{\vee}(f(x), f(y)) \vee d_{\vee}(f(x), f(z)) \end{aligned}$$

(2) 对任意的 $x, y, z \in L_1$, 设 f 是一个从 L_1 到 L_2 的赋范蕴涵同态, 我们就有

$$\begin{aligned} f(d_{\vee}(x, y) \wedge d_{\vee}(x, z)) &= f((d_{\vee}(x, y))' \vee (d_{\vee}(x, z))')' \\ &= (f((d_{\vee}(x, y))' \vee (d_{\vee}(x, z))'))' \\ &= ((f(d_{\vee}(x, y)))' \vee (f(d_{\vee}(x, z))))' \\ &= ((d_{\vee}(f(x), f(y)))' \vee (d_{\vee}(f(x), f(z))))' \\ &= d_{\vee}(f(x), f(y)) \wedge d_{\vee}(f(x), f(z)) \end{aligned}$$

(3) 对任意的 $x, y, z \in L_1$, 设 f 是一个从 L_1 到 L_2 的赋范蕴涵同态, 因此有

$$\begin{aligned} & f(d_V(x, y) \rightarrow (d_V(x, y) \rightarrow d_V(x, z))) \\ &= f(d_V(x, y) \rightarrow d_V(x, z)) \\ &= f(d_V(x, y)) \rightarrow f(d_V(x, z)) \\ &= d_V(f(x), f(y)) \rightarrow d_V(f(x), f(z)) \end{aligned}$$

剩下的(4),(5)和(6)三个结论类似,可以证明。

定理 3.18 假设对任意的 $x, y, z \in L_1$, 如果 L_1 和 L_2 是赋范格 H 蕴涵代数, f 是一个从 L_1 到 L_2 的赋范蕴涵同态, 则有:

(1) 若 $\ker(f(d_V(x, a))) = \{x \mid f(d_V(x, a)) = 0, x \in L_1\}$, 则 $\ker(f(d_V(x, a))) \neq \emptyset$ 当且仅当 $1 \in \ker(f(d_V(x, a)))$;

(2) 若 $\ker(f(d_{\rightarrow}(x, a))) = \{x \mid f(d_{\rightarrow}(x, a)) = 0, x \in L_1\}$, 则 $\ker(f(d_{\rightarrow}(x, a))) \neq \emptyset$ 当且仅当 $0 \in \ker(f(d_V(x, a)))$ 。

证明:(1)假设 $1 \in \ker(f(d_V(x, a)))$, 显然就有 $d_V(1, a) = 0$ 蕴涵 $f(d_V(1, a)) = f(0) = 0$ 成立。因此, $\ker(f(d_V(x, a))) \neq \emptyset$ 。

反之, 如果 $\ker(f(d_V(x, a))) \neq \emptyset$, 那么就存在 $x \in L_1$ 使得 $f(d_V(x, a)) = 0$ 成立, 且有 $d_V(x, a) = 0$ 。通过 $d_V(1, a) = 0$ 我们可以得到 $x=1$, 即 $1 \in \ker(f(d_V(x, a)))$ 。

类似可以证得 (2) 也成立。

定义 3.19 设 L 是一个赋范格 H 蕴涵代数。如果 L 中的数列 $\{x_n\}$ 对任意的 $\epsilon > 0$ 都不存在一个正整数 n_0 使得 $n > n_0$ 蕴涵 $d_{\rightarrow}(x_n, a) < \epsilon$ 和 $d_{\rightarrow}(a, x_n) < \epsilon$ 成立, 则称数列 $\{x_n\}$ 对于 $a \in L$ 收敛, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

定理 3.20 设 $\{x_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 是一个赋范格 H 蕴涵代数 L 中的数列, 且收敛于 $a \in L$ 。如果 L 中的一个数列 $\{y_n\}$ 满足 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ 成立。

证明: 因为数列 $\{x_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 收敛于 $a \in L$, 所以对任意的 ϵ 不存在 n_0 使得 $n > n_0$ 蕴涵

$$d_{\rightarrow}(a, x_n) < \epsilon \text{ 和 } d_{\rightarrow}(x_n, a) < \epsilon \text{ 成立;}$$

$$d_{\rightarrow}(a, z_n) < \epsilon \text{ 和 } d_{\rightarrow}(z_n, a) < \epsilon \text{ 成立。}$$

假设 $y_n \leq z_n$, 就可以得到 $z_n \rightarrow a \leq y_n \rightarrow a$ 蕴涵 $\|y_n \rightarrow a\| \leq \|z_n \rightarrow a\| < \epsilon$ 成立。

假设 $x_n \leq y_n$, 那么就有 $a \rightarrow x_n \leq a \rightarrow y_n$ 蕴涵 $\|a \rightarrow y_n\| \leq \|a \rightarrow x_n\| < \epsilon$ 成立。

因此对任意的 $\epsilon > 0$ 存在 n_0 使得 $n > n_0$ 蕴涵 $d_{\rightarrow}(a, y_n) < \epsilon$ 和 $d_{\rightarrow}(y_n, a) < \epsilon$ 成立。所以我们证得 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ 成立。

推论 3.21 设 $\{x_n\}$ 是一个赋范格 H 蕴涵代数 L 中的数列且是一个链, 则 $\{x_n\}$ 是收敛的。

定理 3.22 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是一个赋范格 H 蕴涵代数 L 中的数列且收敛 $a \in L$, 则对任意的 $a \in L$ 集合 $\{d_{\rightarrow}(x_n \vee y_n, a)\}$, $\{d_{\rightarrow}(a, x_n \wedge y_n)\}$ 和 $\{d_{\rightarrow}(x_n \rightarrow y_n, a)\}$ 是有界的。

证明: 因为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛于 $a \in L$, 则有集合 $\{d_{\rightarrow}(x_n, a)\}$, $\{d_{\rightarrow}(a, y_n)\}$ 以及 $\{d_{\rightarrow}(y_n, a)\}$ 是有界的。

因此存在 $A > 0, B > 0$ 和 $C > 0$ 使得 $\{d_{\rightarrow}(x_n, a)\} \leq A$, $\{d_{\rightarrow}(a, y_n)\} \leq B$ 和 $\{d_{\rightarrow}(y_n, a)\} \leq C$ 成立。根据性质有:

$$(1) a \rightarrow (x_n \vee y_n) = (a \rightarrow x_n) \vee (a \rightarrow y_n) \geq a \rightarrow x_n \text{ 蕴涵}$$

$$\|a \rightarrow (x_n \vee y_n)\| \leq \|a \rightarrow x_n\| \text{ 成立, 即有 } d_{\rightarrow}(x_n \vee y_n, a) \leq$$

$$d_{\rightarrow}(x_n, a);$$

$$(2) (x_n \wedge y_n) \rightarrow a = (x_n \rightarrow a) \vee (y_n \rightarrow a) \geq y_n \rightarrow a \text{ 蕴涵}$$

$$\|(x_n \wedge y_n) \rightarrow a\| \leq \|y_n \rightarrow a\| \text{ 成立, 即有 } d_{\rightarrow}(a, x_n \wedge$$

$$y_n) \leq d_{\rightarrow}(a, y_n);$$

$$(3) a \rightarrow (x_n \rightarrow y_n) = (a \rightarrow x_n) \rightarrow (a \rightarrow y_n) \geq a \rightarrow y_n \text{ 蕴涵}$$

$$\|a \rightarrow (x_n \rightarrow y_n)\| \leq \|a \rightarrow y_n\| \text{ 成立, 即有 } d_{\rightarrow}(x_n \rightarrow y_n, a) \leq d_{\rightarrow}(y_n, a)。$$

所以集合 $\{d_{\rightarrow}(x_n, a)\}$, $\{d_{\rightarrow}(a, y_n)\}$ 和 $\{d_{\rightarrow}(y_n, a)\}$ 是有界的。

结束语 为了给具有模糊性和不可比较性的不确定信息推理提供一个逻辑基础, 徐扬教授提出了格蕴涵代数。为了推动这一非经典逻辑代数的发展, 我们必须弄清楚格蕴涵代数的结构。本文提出了赋范格 H 蕴涵代数、数列以及模糊赋范格 H 蕴涵代数的概念, 并得到一些性质。

另文中将会研究赋范格 H 蕴涵代数和模糊赋范格 H 蕴涵代数中的滤子结构。

参考文献

- [1] Borns D W, Mack J M. An Algebraic Introduction on Mathematical Logic[M]. Berlin: Springer, 1975
- [2] Bolc L, Borowik P. Many-valued Logics. Springer-Verlag, 1992
- [3] Ben-Eliyahu R, Dechter R. Default reasoning using classical logic. Artificial Intelligence, 1996, 84: 113-150
- [4] Goguen J A. The logic of inexact concepts. Synthese, 1969, 19: 325-373
- [5] Pavelka J. On fuzzy logic I, II, III. Zeitschr F. Math. Logic and Grundlagend. Math., 1979, 25: 45-52, 119-134, 447-464
- [6] Novak V. First-order fuzzy logic. Studia Logica, 1982, 46(1): 87-109
- [7] 徐扬. 格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报, 1993, 28(1): 20-27
- [8] Xu Y, Ruan D, Qin K Y, et al. Lattice-Valued Logic[M]. Berlin: Springer, 2003
- [9] 刘军, 徐扬. 格蕴涵代数的滤子结构[J]. 科学通报, 1997, 42(10): 1049-1052
- [10] Xu Y, Qin K Y, Liu J, et al. L-valued propositional logic L_{vpl} . Information Sci., 1999, 114: 205-235
- [11] Xu Y, Kerre E E, Ruan D, et al. Fuzzy reasoning based on the extension principle[J]. Int. J. Intelligent System, 2001, 16(4): 469-495
- [12] Xu Y, Ruan D, Kerre E E, et al. α -Resolution principle based on first-order lattice-valued logic LF(X). Information Sci., 2001, 132: 221-239
- [13] Lai Jia jun, Xu Y, et al. WLI-ideals in lattice implication algebra [J]. Inter. J. of Computer Science and Network Security, 2006, 6(9): 28-32
- [14] 赖家俊, 徐扬, 宋振明. Logical Properties of Lattice Filter of Lattice Implication Algebra. 西南交通大学学报(英文版), 2007, 15(4): 353-356
- [15] 徐扬, 秦克云. 格 H 蕴涵代数和格蕴涵代数类[J]. 河北煤炭工程学院学报, 1992(3): 139-143
- [16] Qin K Y, Pei Z, Jun Y B. On Normed Lattice Implication Algebras[J]. J. Fuzzy Mathematics, 2006, 14(3): 673-681
- [17] 赖家俊, 徐扬. On Relations between Lattice Implication Algebras and Zero-Symmetric BZ=algebras. International Journal of Computing and Mathematical Applications, 2007, 1(1): 11-18
- [18] 赖家俊, 徐扬, 潘小东, 等. Congruence Relations Induced by Weak-filters and FWLI-ideals in Lattice Implication Algebra. International Journal of Modern Mathematics, 2007, 2(1): 135-142