直觉模糊三角模的剩余蕴涵及其性质*)

徐小来　雷英杰　雷　阳

（空军工程大学导弹学院　三原 713800）

摘　要　研究了直觉模糊三角模的剩余蕴涵及其性质。首先，定义了直觉模糊三角模的剩余蕴涵；其次，推导了直觉模糊三角模的剩余蕴涵与三角模的剩余蕴涵的关系；最后，证明了直觉模糊三角模的剩余蕴涵的16条性质。直觉模糊三角模的剩余蕴涵及其性质在直觉模糊推理、群决策等领域具有广阔的应用前景。

关键词　直觉模糊集合，直觉模糊三角模，剩余蕴涵

Residual Implication of Intuitionistic Fuzzy Triangle Norm and its Properties

XU Xiao-lai　LEI Ying-jie　LEI Yang

(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)

Abstract　Residual implication of intuitionistic fuzzy triangle norm and its properties were researched. Residual implication of intuitionistic fuzzy triangle norm was defined. The relation between residual implication of intuitionistic fuzzy triangle norm and residual implication of triangle norm was deduced. Some properties of residual implication of intuitionistic fuzzy triangle norm were proved. Residual implication of intuitionistic fuzzy triangle norm and its properties have a broad application prospect in intuitionistic fuzzy reasoning and swarm decision and so on.

Keywords　Intuitionistic fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy triangle norm, Residual implication

1　引言

在 Zadeh 模糊集中，模糊三角模的剩余蕴涵占有重要的地位，是模糊逻辑、模糊推理和模糊粗糙集等的理论基础。而 Atanassov 直觉模糊集(Intuitionistic fuzzy sets，IFS)是对模糊集最有影响的扩展，IFS 增加了一个新的属性参数——非隶属函数，能够更加细腻地刻画客观世界模糊性的本质，因此，研究直觉模糊三角模的剩余蕴涵及其性质具有重要的理论与应用价值。文献[1]研究了直觉模糊三角模的构造，文献[2]研究了区间模糊集上的三角模的剩余蕴涵，文献[3]研究了直觉模糊三角模的剩余蕴涵在群决策中的应用。上述文献奠定了直觉模糊三角模及其剩余蕴涵的理论基础。本文主要研究直觉模糊三角模的剩余蕴涵与三角模的剩余蕴涵的关系和直觉模糊三角模的剩余蕴涵的性质。

2　直觉模糊集

定义 1[4]　设 X 是一个给定论域，则 X 上的一个直觉模糊集 A 为

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle \mid x\in X\} \tag{1}$$

其中 $\mu_A(x):X\to[0,1]$ 和 $\gamma_A(x):X\to[0,1]$ 分别代表 A 的隶属函数和非隶属函数，且对于 A 上的所有 $x\in X$，$0\leqslant\mu_A(x)+\gamma_A(x)\leqslant 1$ 成立。直觉模糊集 A 可以简记为 $A(x)=(\mu_A(x),\gamma_A(x))$。

定义 2[4]　设 A 和 B 是给定论域 X 上的直觉模糊子集，则有

(1) $A\cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\gamma_A(x)\vee\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in X\}$

(2) $A\cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in X\}$

(3) $\bar{A}=A^c=\{\langle x,\gamma_A(x),\mu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$

(4) $A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x\in X,[\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)\wedge\gamma_A(x)\geqslant\gamma_B(x)]$

定义 3　令 $L^*=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\leqslant 1,(x_1,x_2)\in[0,1]^2\}$，且有 $(x_1,x_2)\leqslant_{L^*}(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1\leqslant y_1\wedge x_2\geqslant y_2$，$\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in L^*$，则称 $(L^*,\leqslant_{L^*})$ 为完备格。

显然，论域 U 上的直觉模糊集合 A 是完备格。L^* 上的 $0_{L^*}=(0,1)$，$1_{L^*}=(1,0)$。

3　直觉模糊三角模及其剩余蕴涵

定义 4[5]　记 $I=[0,1]$，映射 $T:I\times I$ 称为三角模，$a,b,c,d\in I$，若 T 满足下列条件：

(1)两极律：$T(a,1)=a$，

(2)交换律：$T(a,b)=T(b,a)$，

(3)结合律：$T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$，

(4)单调律：$a\leqslant c,b\leqslant d\Rightarrow T(a,b)\leqslant T(c,d)$，

则称 T 为 I 的三角模或 T 模。

定义 5[5]　设 T 是 $I=[0,1]$ 上的下半连续 T 模，定义 I 上的二元算子 $\theta_T:I\times I\to I$ 如下：

$$\theta_T(a,b)=\sup\{c\in I\mid T(a,c)\leqslant b\},a,b\in I \tag{2}$$

称 θ_T 为 T 的剩余蕴涵。下文将下标省去。

定义 6　T 是 $I=[0,1]$ 上的 T 模，定义 L^* 上的二元算子 $\Phi:L^*\times L^*\to L^*$

$$\Phi(x,y)=(T(x_1,y_1),1-T(1-x_2,1-y_2)) \tag{3}$$

容易验证，$T(x_1,y_1)+1-T(1-x_2,1-y_2)\leqslant 1$，$\Phi$ 满足两极律、交换律、结合律和单调律，因此，Φ 叫做 L^*（直觉模糊

*)国家自然科学基金项目(60773209)，陕西省自然科学基金项目(2006F18)。**徐小来**　博士生，主要从事智能信息处理与信息融合研究；**雷英杰**　博士，教授，博士生导师，主要从事智能信息处理与智能决策等研究；**雷　阳**　硕士，主要从事智能信息处理与智能决策等研究。

集合)上的 T 模或三角模。

定义 7 设 Φ 是 L^* 上的下半连续 T 模,定义二元算子 $\Theta_\Phi: L^* \times L^* \rightarrow L^*$

$$\Theta_\Phi(x,y)=\sup\{z\in L^* \mid \Phi(x,z)\leqslant_{L^*} y, x,y\in L^*\} \quad (4)$$

则称 Θ_Φ 为 Φ 的剩余蕴涵。简便起见,下标省去。

定理 1 设 θ 是 T 模的剩余蕴涵,Φ 是 L^* 上的 T 模,则 Φ 的剩余蕴涵 Θ 为

$$\Theta(x,y)=(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),\ 1-\theta(1-x_2,1-y_2)),x,y\in L^* \quad (5)$$

证明:

$$\begin{aligned}\Theta &=\sup\{z\in L^* \mid \Phi(x,z)\leqslant_{L^*} y\}\\ &=\sup\{z\in L^* \mid (T(x_1,z_1),1-T(1-x_2,1-z_2))\leqslant_{L^*}(y_1,y_2)\}\\ &=\sup\{z\in L^* \mid (T(x_1,z_1)\leqslant y_1, T(1-x_2,1-z_2)\leqslant 1-y_2)\}\end{aligned}$$

从上式可以看出,在保证 $z_1+z_2\leqslant 1$ 的前提下,对 z 求上界,等价于对 z_1 求上界和 z_2 求下界。为保证 $z_1+z_2\leqslant 1$,在 z_1 增加一项加以约束

$$\begin{aligned}\Theta &= (\sup\{z_1\in I \mid ((T(x_1,z_1)\leqslant y_1)\wedge(T(1-x_2,z_1)\leqslant 1-y_2))\},\inf\{z_2\in I \mid T(1-x_2,1-z_2)\leqslant 1-y_2\})\\ &=(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),1-\sup\{(1-z_2)\in I \mid T(1-x_2,1-z_2)\leqslant 1-y_2\})\\ &=(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),1-\theta(1-x_2,1-y_2))\end{aligned}$$

因此,定理成立。

定理 1 将直觉模糊三角模的剩余蕴涵与三角模的剩余蕴涵联系起来了,从而可以通过计算三角模的剩余蕴涵来计算直觉模糊三角模的剩余蕴涵,简化了计算步骤。此外,定理 1 对直觉模糊三角模的剩余蕴涵的性质证明是非常重要的。

4 直觉模糊三角模的剩余蕴涵的性质

定理 2 设 Φ 是 L^* 上的下半连续 T 模,$x,y,z\in L^*$,则 Φ 的剩余蕴涵 Θ 满足下列性质:

(1) $\Theta(1_{L^*},x)=x,\Theta(x,1_{L^*})=1_{L^*}$;

(2) $\Theta(0_{L^*},x)=1_{L^*},\Theta(x,x)=1_{L^*}$

(3) $x\leqslant_{L^*} y\Rightarrow\Theta(z,x)\leqslant_{L^*}\Theta(z,y)$;

(4) $x\leqslant_{L^*} y\Rightarrow\Theta(y,z)\leqslant_{L^*}\Theta(x,z)$;

(5) $\Theta(x,\Theta(y,z))=\Theta(y,\Theta(x,z))$;

(6) $x\leqslant_{L^*} y\Leftrightarrow\Theta(x,y)=1_{L^*}$;

(7) $\Theta(x,y\wedge z)=\Theta(x,y)\wedge\Theta(x,z)$;

(8) $\Theta(x\vee y,z)=\Theta(x,z)\wedge\Theta(y,z)$;

(9) $\Theta(\Phi(x,y),z)=\Theta(x,\Theta(y,z))$;

(10) $\Phi(\Theta(x,z),\Theta(z,y))\leqslant_{L^*}\Theta(x,y)$;

(11) $\Phi(\Theta(\Phi(x,y),z),x)\leqslant_{L^*}\Theta(y,z)$;

(12) $x\leqslant_{L^*}\Theta(\Theta(x,y),y)$;

(13) $\Phi(\Theta(x,y),z)\leqslant_{L^*}\Theta(x,\Phi(y,z))$;

(14) $\Theta(x,y)\leqslant_{L^*}\Theta(\Phi(x,z),\Phi(y,z))$;

(15) $\Theta(x,y)\vee\Theta(x,z)\leqslant_{L^*}\Theta(x,y\vee z)$;

(16) $x\leqslant_{L^*}\Theta(y,\Phi(x,y))$。

文献[2]证明了性质(1)-(6),因此本文只证明后面的 10 条性质。

(7)当 $y\wedge z=y$ 时,即 $y\leqslant_{L^*} z$,由性质(3)可得 $\Theta(x,y)\leqslant_{L^*}\Theta(x,z)$,性质(7)成立。

同理可证 $y\wedge z=z$ 时,性质(7)成立。

当 $y\wedge z=(y_1,z_2)$,$y_1\leqslant z_1$,$y_2\leqslant z_2$,由定理 1 得

$$\Theta(x,y\wedge z)=(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-z_2),1-\theta(1-x_2,1-z_2))$$

由 θ 的性质可得[5]

$$\theta(x_1,y_1)\leqslant\theta(x_1,z_1)$$

$$\theta(1-x_2,1-y_2)\geqslant\theta(1-x_2,1-z_2)$$

$\therefore\Theta(x,y)\wedge\Theta(x,z)=(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-z_2),1-\theta(1-x_2,1-z_2))$

$\therefore\Theta(x,y)\wedge\Theta(x,z)=\Theta(x,y\wedge z)$;性质(7)成立。

同理可证 $y\wedge z=(z_1,y_2)$ 时性质(7)成立。所以性质(7)成立。

(8) 证明同性质(7)。

(9) $\Theta(\Phi(x,y),z)=\sup\{u\in L^* \mid \Phi(\Phi(x,y),u)\leqslant_{L^*} z\}$

由 Φ 满足结合律得

$$\begin{aligned}&=\sup\{u\in L^* \mid \Phi(x,\Phi(y,u))\leqslant_{L^*} z\}\\ &=\sup\{u\in L^* \mid \Phi(y,u)\leqslant_{L^*}\sup\{v\in L^* \mid \Phi(x,v)\leqslant_{L^*} z\}\}\\ &=\sup\{u\in L^* \mid \Phi(y,u)\leqslant_{L^*}\Theta(x,z)\}\\ &=\Theta(y,\Theta(x,z))\end{aligned}$$

所以性质(9)成立。

(10) 将式(5)代入并化简,则原命题等价于

$T(\theta(x_1,z_1)\wedge\theta(1-x_2,1-z_2),\theta(z_1,y_1)\wedge\theta(1-z_2,1-y_2))\leqslant\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2)$ 和 $T(\theta(1-x_2,1-z_2),\theta(1-z_2,1-y_2))\leqslant\theta(1-x_2,1-y_2)$ 成立。

由 θ 的性质可得[5]

$T(\theta(1-x_2,1-z_2),\theta(1-z_2,1-y_2))\leqslant\theta(1-x_2,1-y_2)$ 成立;

又 $\because\theta(x_1,z_1)\wedge\theta(1-x_2,1-z_2)\leqslant\theta(x_1,z_1)$

$\theta(z_1,y_1)\wedge\theta(1-z_2,1-y_2)\leqslant\theta(z_1,y_1)$

由三角模的传递性可得

$T(\theta(x_1,z_1)\wedge\theta(1-x_2,1-z_2),\theta(z_1,y_1)\wedge\theta(1-z_2,1-y_2))\leqslant T(\theta(x_1,z_1),\theta(z_1,y_1))\leqslant\theta(x_1,y_1)$

同理可证

$T(\theta(x_1,z_1)\wedge\theta(1-x_2,1-z_2),\theta(z_1,y_1)\wedge\theta(1-z_2,1-y_2))\leqslant T(\theta(1-x_2,1-z_2),\theta(1-z_2,1-y_2))\leqslant\theta(1-x_2,1-y_2)$ 所以有

$T(\theta(x_1,z_1)\wedge\theta(1-x_2,1-z_2),\theta(z_1,y_1)\wedge\theta(1-z_2,1-y_2))\leqslant\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2)$ 所以性质(10)成立。

(11) 由性质(9)得

$\Rightarrow\Phi(\Theta(x,\Theta(y,z)),x)\leqslant_{L^*}\Theta(y,z)$

令 $\gamma=\Theta(y,z)$,则有

$\Rightarrow\Phi(\Theta(x,\gamma),x)\leqslant_{L^*}\gamma$

将式(5)代入,并化简得

$\Rightarrow T(\theta(x_1,\gamma_1)\wedge\theta(1-x_2,1-\gamma_2),x_1)\wedge T(\theta(1-x_2,1-\gamma_2),1-x_2)\leqslant x_1$ 和 $T(\theta(1-x_2,1-\gamma_2),1-x_2)\leqslant 1-x_2$ 成立

由三角模的单调律得

$T(\theta(x_1,\gamma_1)\wedge\theta(1-x_2,1-\gamma_2),x_1)\leqslant T(1,x_1)\leqslant x_1$

$T(\theta(1-x_2,1-\gamma_2),1-x_2)\leqslant T(1,1-x_2)\leqslant 1-x_2$

所以性质(11)成立。

(12) 将式(5)代入并化简,则原命题等价于

$\Rightarrow\theta(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),y_1)\wedge\theta(\theta(1-x_2,1-y_2),1-y_2)\geqslant x_1$ 和 $\theta(\theta(1-x_2,1-y_2),1-y_2)\geqslant 1-x_2$ 成立

由 θ 的性质可得

$\theta(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),y_1)\geqslant\theta(\theta(x_1,y_1),y_1)\geqslant x_1$

(下转第 243 页)

软件依赖网络中存在较高的聚类系数和较小的平均距离(即小世界特性)，说明软件在设计实现时存在大量团体，它们遵循高内聚低耦合的原则，团体内部成员之间联系紧密，而团体之间的联系比较松散。连接不同团体的节点作为软件内部交互的核心，很可能就是软件的骨架，即软件体系结构的核心实现。从拓扑结构出发，寻找并分析这样的节点以及节点所在的团体，有助于我们抽取软件系统的体系结构，理解软件的运行机理。

结束语 本文分析了国内外现有的软件静态结构的网络建模方法的特点和不足，给出了软件依赖网络模型的定义。将软件静态结构抽象为有向图，直观地建立了不同粒度软件网络模型之间的映射关系。

其次，以面向对象的 Java 软件为例，对 8 种不同的软件依赖网络的结构特性进行了分析，证实了软件依赖网络具有高聚类系数和平均距离很小的小世界特性，入度基本服从幂率，出度基本服从带指数截断的幂率分布。并针对上述特征，探讨了它们的软件工程含义，以及对软件开发和维护潜在的指导意义。

软件依赖网络建模方法能够适用于不同类型的软件，具有较高的分析效率，能够及时响应软件变更，可以为软件的维护以及逆向工程和再工程分析提供依据。

参 考 文 献

[1] Valverde S，Caņcho R F，Sole R V．Scale - free networks from optimal design[J]．Europhysics Letters（EPL)，2002，60(4)：512-517

[2] Myers C R. Software systems as complex networks：Structure, function, and evolvability of software collaboration graphs[J]. Physical Review E, 2003, 68(4)：046116

[3] Valverde S，Sole R V．Hierarchical Small Worlds in Software Architecture[R]. SanteFe Institute, 2003

[4] Potanin A, Noble J, Frean M, et al. Scale-free geometry in OO programs[J]. Communications of the ACM, 2005, 48(5)：99-103

[5] 韩明畅，李德毅，刘常昱，等. 软件中的网络化特征及其对软件质量的贡献[J]. 计算机工程与应用，2006(20)

[6] Hyland-wood D, Carrington D, Kaplan S. Scale-free Nature of Java Software Package, Class and Method Collaboration Graphs [R]. MIND Laboratory, University of Maryland College Park, 2006

[7] La Belle N, Wallingford E. Inter-package Dependency Networks in Open-source Software[Z], 2004

[8] De M A, Lai Y C, Motter A E. Signatures of small-world and scale-free properties in large computer programs[J]. Physical Review E, 2003, 68(1)：017102

[9] Yutao M, Keqing H, Du Dehui, et al. A Complexity Metrics Set for Large-scale Object-Oriented Software Systems[C]// Computer and Information Technology, 2006. CIT'06. The Sixth IEEE International Conference on, 2006：189

[10] Amaral L A N, Scala A, Barthélémy M, et al. Classes of small-world networks[J]. PNAS, 2000, 97：11149-11152

[11] Newman M E．Scientific collaboration networks．I．Network construction and fundamental results[J]. Physical Review E, 2001, 64(1)：016131

[12] DependencyFinder 1. 2. 0. http://depfind. sourceforge. net/, 2007

[13] Pajek. http://vlado. fmf. uni-lj. si/pub/networks/pajek/default. htm, 2007

(上接第 155 页)

$\theta(\theta(1-x_2,1-y_2),1-y_2)\geqslant 1-x_2\geqslant x_1$

$\theta(\theta(1-x_2,1-y_2),1-y_2)\geqslant 1-x_2$，均成立

所以性质(12)成立。

(13) 将式(5)代入并化简得

$\Phi(\Theta(x,y),z)=(T(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),z_1),1-T(\theta(1-x_2,1-y_2),1-z_2))$

$\Theta(x,\Phi(y,z))=(\theta(x_1,T(y_1,z_1))\wedge\theta(1-x_2,T(1-y_2,1-z_2)),1-\theta(1-x_2,T(1-y_2,1-z_2)))$

由 θ 的性质得

$T(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),z_1)\leqslant T(\theta(x_1,y_1),z_1)\leqslant\theta(x_1,T(y_1,z_1))$

$T(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),z_1)\leqslant T(\theta(1-x_2,1-y_2),z_1)\leqslant T(\theta(1-x_2,1-y_2),1-z_2)\leqslant\theta(1-x_2,T(1-y_2,1-z_2))$

$\therefore T(\theta(x_1,y_1)\wedge\theta(1-x_2,1-y_2),z_1)\leqslant T(\theta(x_1,y_1),z_1)\wedge T(\theta(1-x_2,1-y_2),1-z_2)$

$T(\theta(1-x_2,1-y_2),1-z_2)\leqslant\theta(1-x_2,T(1-y_2,1-z_2))$

所以性质(13)成立。

(14) 证明与性质(7)类似。

(15) 由性质(3)得

$\Theta(x,y)\leqslant_{L^*}\Theta(x,y\vee z),\Theta(x,z)\leqslant_{L^*}\Theta(x,y\vee z)$

$\therefore\Theta(x,y)\vee\Theta(x,z)\leqslant_{L^*}\Theta(x,y\vee z)$

所以性质(15)成立。

(16) 证明与性质(13)类似。

结束语 本文研究了直觉模糊三角模的剩余蕴涵与三角模的剩余蕴涵的关系，从而可以利用三角模的剩余蕴涵来计算直觉模糊三角模的剩余蕴涵；研究了直觉模糊三角模的剩余蕴涵的系列性质，并给出了详细的证明过程，从而进一步夯实了直觉模糊逻辑算子的理论基础，深化了直觉模糊集理论在知识处理领域中的应用研究。

参 考 文 献

[1] Deschrijver G, Cornelis C. On the representation of intuitionistic *fuzzy t-norms and t-conorms* [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 2004, 12 (1)：45-61

[2] Deschrijver G, Kerre E E. Implicators Based on Binary Aggregation Operators in Interval-valued Fuzzy Set Theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005(153)：229-248

[3] Pankowska A，Wygralak M．General IF - sets with triangular norms and their applications to group decision making [J]. Information Sciences, 2006 (176)：2713-2754

[4] De S K, Biswas R, Roy A R. Some operations on intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000(114)：477-484

[5] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2006：168-170

[6] 雷英杰，王宝树. 直觉模糊关系及其合成运算[J]. 系统工程理论与实践，2005，25(2)：113-118

[7] 雷英杰，王宝树. 基于直觉模糊逻辑的近似推理方法[J]. 控制与决策，2006，21(3)：305-310

[8] 雷英杰，王宝树. 直觉模糊集时态逻辑算子与扩展运算性质. 计算机科学，2005，32(2)：180-181，225

[9] 李晓萍. 关于三角模的直觉模糊群及其同态像[J]. 模糊系统与数学，2005，19(1)：57-62