直觉模糊逻辑算子研究*)

路艳丽　雷英杰　田　野

(空军工程大学计算机工程系　三原 713800)

摘　要　模糊逻辑算子是模糊信息融合、模糊推理及模糊决策的重要工具。针对作为模糊逻辑算子重要扩展的直觉模糊逻辑算子，首先引入了直觉模糊集在特殊格上的等价定义。其次，验证了直觉模糊 t-模与 s-模的若干重要性质。在此基础上，对两种常用的蕴涵算子：直觉模糊 S-蕴涵与直觉模糊 R-蕴涵所具有的新性质进行讨论和证明，从而便于直觉模糊逻辑算子的进一步应用。

关键词　直觉模糊集合，逻辑算子，直觉模糊三角模，直觉模糊蕴涵算子

Research on Intuitionistic Fuzzy Logic Operators

LU Yan-li　LEI Ying-jie　TIAN Ye

(Department of Computer Engineering, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)

Abstract　Fuzzy logic operators are important tools for fuzzy information fusion, fuzzy reasoning and fuzzy decision-making. Aiming at the intuitionistic fuzzy logic operators which is a promising extension of fuzzy logic operators, an equivalent definition of IFS on a special lattice was introduced. Several properties of intuitionistic fuzzy triangular norm and conorm were testified and based on this, two kinds of popular implicators, intuitionistic fuzzy strong implicator(S-implicator) and residual implicator(R- implicator) were studied with proving some new properties, which accord facilities for further application of intuitionistic fuzzy triangular norm and implicators.

Keywords　Intuitionistic fuzzy set, Logic operators, Intuitionistic fuzzy triangular norm, Intuitionistic fuzzy implicator

1　引言

Atanasov 直觉模糊集(Intuitionistic Fuzzy Sets, IFS)[1,2]在保留模糊集隶属度的基础上，增加了一个新的属性参数——非隶属度函数，可以描述外延不分明的“亦此亦彼”的模糊概念，更加细腻地刻画了客观世界的模糊性本质，是对 Zadeh 模糊集理论最有影响的一种扩充和发展。目前 IFS 已成为不确定信息处理领域中的一个研究热点，并在模式识别[3]、多属性决策[4]、战场态势评估[5]和威胁评估[6]等领域获得成功应用。模糊逻辑算子是模糊集理论的核心内容之一，在模糊信息的融合[7]、模糊推理、模糊决策等方面具有广泛应用。Morsi 在文献[11]中对模糊三角模及 R-蕴涵算子的一系列性质进行了研究，对于模糊逻辑算子在粗糙集理论中的成功应用具有重要学术价值。直觉模糊逻辑算子是对模糊逻辑算子的直觉化扩展，Deschrijver 等人[8-10]对其进行了研究，但并没有将模糊蕴涵算子的一些很好的性质[11,12]推广到直觉模糊环境下，因此不便于直觉模糊逻辑算子的进一步应用。鉴于此，本文在文献[9]的基础上，对直觉模糊 t-模与 s-模的性质进行系统研究，进而将文献[11,12]中的模糊 R-蕴涵算子拓展到直觉模糊环境下，对其所具有的新性质进行讨论和证明，同时对直觉模糊 S-蕴涵的相关性质也进行了探讨。

2　IFS 在格上的等价定义

Atanassov 直觉模糊集的基本理论参见文献[1,2]。这里主要介绍 IFS 在一个特殊格 L^* 上的定义[8]。这一定义简化了后续直觉模糊逻辑算子的表示。本文使用 L 表示 L^*，用 $IFS(U)$ 表示 U 上直觉模糊子集的全体。

设 $\langle L, \leqslant_L \rangle$ 是一完备有界格，其中 $L=\{(x_1, x_2)\in[0,1]^2 \mid x_1+x_2\leqslant 1\}$，最大元 $1_L=(1,0)$，最小元 $0_L=(0,1)$，$\forall x,y\in L$，$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$，$\leqslant_L$ 定义为 $(x_1,x_2)\leqslant_L(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1\leqslant y_1$ 且 $x_2\geqslant y_2$。对于任一非空子集 $A\subseteq L$，$\forall(x_1,x_2)\in A$

$$\sup A=(\sup\{x_1 \mid x_1\in[0,1] \text{ and } (\exists x_2\in[0,1-x_1])\},\ \inf\{x_2 \mid x_2\in[0,1] \text{ and } (\exists x_1\in[0,1-x_2])\})$$

$$\inf A=(\inf\{x_1 \mid x_1\in[0,1] \text{ and } (\exists x_2\in[0,1-x_1])\},\ \sup\{x_2 \mid x_2\in[0,1] \text{ and } (\exists x_1\in[0,1-x_2])\})$$

定义 1(直觉模糊集)　直觉模糊集合 A 定义为论域 U 到 L 的一个映射 $A: U\to L$，记为 $A(x)=(A(x)_1, A(x)_2)=(\mu_A(x), \gamma_A(x))$，$\forall x\in U$，$(\mu_A(x), \gamma_A(x))\in L$，$\mu_A(x)$ 为 $x\in U$ 对 A 的隶属度，$\gamma_A(x)$ 为 $x\in U$ 对 A 的非隶属度。

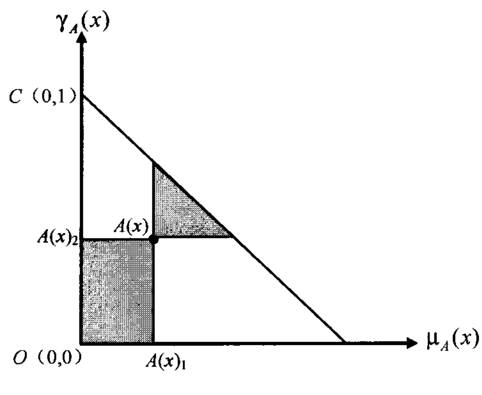

图 1　格 L 上的 IFS

*)国家自然科学基金(60773209)，陕西省自然科学基金(2006F18)资助。**路艳丽**　博士，主要从事智能信息处理方法研究；**雷英杰**　教授，博士生导师，主要从事智能信息处理与智能决策研究。

这种定义与 Atanasov 的直觉模糊集定义[1]等价。直觉模糊集可以处理不可比信息，如图 1 所示，点 $A(x)=(A(x)_1,A(x)_2)$，灰色区域内的点所具有的隶属度和非隶属度要么都小于 $A(x)_1$ 与 $A(x)_2$，要么都大于 $A(x)_1$ 与 $A(x)_2$，因此灰色区域内的点与 x 不可比，而三角形 COD 的其它区域上的点均与 x 存在 $\leqslant_L$ 关系。

3 直觉模糊三角模

定义 2(直觉模糊三角模) 设映射 $T:L\times L\to L$，$\forall x,y,z,l\in L$，若 T 满足以下条件：

(1)两极律：$T(0_L,0_L)=0_L$，$T(1_L,1_L)=1_L$；

(2)交换律：$T(x,y)=T(y,x)$；

(3)结合律：$T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$；

(4)单调律：$x\leqslant_L z$，$y\leqslant_L l\Rightarrow T(x,y)\leqslant_L T(z,l)$。

此外，若 T 满足 $T(x,1_L)=x$，则 T 称为直觉模糊 t-模；若 T 满足 $T(x,0)=x$，则称 T 为直觉模糊 s-模。直觉模糊 t-模与 s-模统称为直觉模糊三角模。本文用 T,S 表示直觉模糊 t-模、s-模，用 t,s 表示区间$[0,1]$上的模糊 t-模、s-模。

定义 3(直觉模糊否定算子) 递减映射 $N:L\to L$，满足 $N(0_L)=1_L$，$N(1_L)=0_L$，则 N 称为直觉模糊否定算子。$\forall x\in L$，若$N(N(x))=x$，则称 N 为对合算子。显然，标准否定算子 $N(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$是对合算子。

直觉模糊 t-模 T(直觉模糊 s-模 S)称为 t-可表示的[9]，若存在对偶模糊 t-模 t 和 s-模 s 满足，$\forall x,y\in L$，

$T(x,y)=(t(x_1,y_1),s(x_2,y_2))$，

$S(x,y)=(s(x_1,y_1),t(x_2,y_2))$。

由 t-可表示的定义，一对 t-可表示直觉模糊 t-模 T 和 s-模 S 关于标准直觉模糊否定算子 N 对偶，即，

$T(x,y)=N(S(N(x),N(y)))$，

$S(x,y)=N(T(N(x),N(y)))$。

对最常用的三种模糊 t-模与 s-模进行直觉模糊化扩展，即可得到 3 对 t-可表示的直觉模糊三角模。

(1)Zadeh 算子

$T_M(x,y)=(\min\{x_1,y_1\},\max\{x_2,y_2\})$，

$S_M(x,y)=(\max\{x_1,y_1\},\min\{x_2,y_2\})$；

(2)概率算子

$T_P(x,y)=x\cdot y=(x_1\cdot y_1,x_2+y_2-x_2\cdot y_2)$，

$S_P(x,y)=x+y-x\cdot y=(x_1+y_1-x_1\cdot y_1,x_2\cdot y_2)$；

(3)有界算子

$T_L(x,y)=(\max\{x_1+y_1-1,0\},\min\{x_2+y_2,1\})$，

$S_L(x,y)=(\min\{x_1+y_1,1\},\max\{x_2+y_2-1,0\})$。

值得注意的是，并不是所有的直觉模糊 t-模与 s-模都可以找到对应的模糊 t-模 t 和 s-模 s，满足 t-可表示的条件，例如 $T_W(x,y)=(\max\{0,x_1+y_1-1\},\min\{1,x_2+1-y_1,y_2+1-x_1\})$并不满足这个条件，但仍然是直觉模糊 t-模。本文用 $x\wedge y$ 表示 $T_M(x,y)$，$x\vee y$ 表示 $S_M(x,y)$。根据定义，容易得到如下性质。

定理 1 设 T,S 是 t-可表示直觉模糊三角模，则 $\forall x,y,z\in L$

(T1) $T(x\vee y,z)=T(x,z)\vee T(y,z)$，

$S(z\wedge y,z)=S(x,z)\wedge S(y,z)$；

(T2) $T(x\wedge y,z)=T(x,z)\wedge T(y,z)$，

$S(x\vee y,z)=S(x,z)\vee S(y,z)$；

定理 2 设 T,S 是 t-可表示直觉模糊三角模，若其中的模糊三角模 t 是左连续的，s 是右连续的，则 $\forall x\in L$

$T(x,\sup\limits_{y\in Y}y)=\sup\limits_{y\in Y}T(x,y)$，$Y\subseteq L$

证明：由已知可得

$T(x,\sup\limits_{y\in Y}y)=(t(x_1,\sup\limits_{y\in Y}y_1),s(x_2,\inf\limits_{y\in Y}y_2))$

根据 t 的左连续性和 s 的右连续性可得

$(t(x_1,\sup\limits_{y\in Y}y_1),s(x_2,\inf\limits_{y\in Y}y_2))$

$=(\sup\limits_{y\in Y}t(x_1,y_1),\inf\limits_{y\in Y}s(x_2,y_2))$

$=\sup\limits_{y\in Y}(t(x_1,y_1),s(x_2,y_2))=\sup\limits_{y\in Y}T(x,y)$

得证。 □

对于一般的直觉模糊 t-模与 s-模，根据定义，容易得到如下定理，由于篇幅所限，省略证明。

定理 3 设 T 是直觉模糊 t-模，S 是直觉模糊 s-模，则 $\forall x,y\in L$

(T3) $0_L\leqslant T(x,y)\leqslant x\wedge y,x\vee y\leqslant S(x,y)\leqslant 1_L$；

(T4) $T(x,0_L)=0_L$，$S(x,1_L)=1_L$。

从定理 3 可以看出 T_M 是最大的直觉模糊 t-模，S_M 是最小的直觉模糊 s-模。进一步，由直觉模糊三角模的定义及定理 3，易得如下边界性质。

定理 4 直觉模糊三角模的边界性质，

(T5) $T(0_L,0_L)=0_L$，$T(1_L,1_L)=1_L$；

(T6) $S(0_L,0_L)=0_L$，$S(1_L,1_L)=1_L$。

4 直觉模糊蕴涵算子

定义 4(直觉模糊蕴涵算子) 映射 $\Psi:L\times L\to L$，且满足 $\forall x\in L$：(1) $\Psi(0_L,1_L)=1_L$；(2) $\Psi(1_L,x)=x$；则称 Ψ 为直觉模糊蕴涵算子。

定义 5(直觉模糊 R-蕴涵) 设 T 为直觉模糊 t-模，映射 $\Psi_T:L\times L\to L$ 定义为 $\Psi_T(x,y)=\sup\{\lambda\in L\mid T(x,\lambda)\leqslant_L y\}$，则 Ψ_T 为一个直觉模糊蕴涵算子，称为直觉模糊 R-蕴涵算子。

定义 6(直觉模糊 S-蕴涵) 设 S 和 N 分别为直觉模糊 s-模和否定算子，映射 $\Psi_{S,N}:L\times L\to L$ 定义为 $\Psi_{S,N}(x,y)=S(N(x),y)$，则 $\Psi_{S,N}$为一个直觉模糊蕴涵算子，称为直觉模糊 S-蕴涵算子。

根据以上直觉模糊逻辑算子的定义，可得到直觉模糊 S-蕴涵及 R-蕴涵的如下性质。

定理 5 设 Ψ 为直觉模糊 S-蕴涵或 R-蕴涵，则 Ψ 具有如下性质：

(I1) $\Psi(x,1_L)=1_L$；

(I2)右单调：$x\leqslant_L y\Rightarrow\Psi(z,x)\leqslant_L\Psi(z,y)$，

左单调：$x\leqslant_L y\Rightarrow\Psi(y,z)\leqslant_L\Psi(x,z)$；

(I3) $\Psi(x\vee y,z)\leqslant_L\Psi(x,z)\wedge\Psi(y,z)$；

(I4) $\Psi(x,y\wedge z)\leqslant_L\Psi(x,y)\wedge\Psi(x,z)$；

(I5) $\Psi(x\wedge y,z)\geqslant_L\Psi(x,z)\vee\Psi(y,z)$；

(I6) $\Psi(x,y\vee z)\geqslant_L\Psi(x,y)\vee\Psi(x,z)$。

证明：(I1)和(I2)容易证明。(I3)至(I6)根据(I2)单调性可直接证得。 □

在定理 5 中，性质(I3)至(I6)均为不等式，而对于普通模糊 R-蕴涵，性质(I3)至(I6)都是等式[19]。为了使直觉模糊 R-蕴涵能够尽量继承模糊 R-蕴涵的一些很好的性质，我们希望性质(I3)至(I6)的部分等号在一定的前提条件下成立。这对于直觉模糊蕴涵算子的应用有重要意义。

定理 6 设 T 是直觉模糊三角模，且满足 $T(x,\sup\limits_{y\in Y}y)=\sup\limits_{y\in Y}T(x,y)$，则 $\forall x,y,z\in L$

(I3′) $\Psi_T(x\vee y,z)=\Psi_T(x,z)\wedge\Psi_T(y,z)$；

(I4′) $\Psi_T(x,y\wedge z)=\Psi_T(x,y)\wedge\Psi_T(x,z)$。

证明：(I3′)根据 R-蕴涵的定义，$\Psi_T(x\vee y,z)=\sup\{\lambda\in L$

$|T(x\vee y,\lambda)\leqslant_L z\}$

显然，当 x 与 y 可比时，根据 $\Psi_T(\cdot,y)$ 的单调递减性可得

$\Psi_T(x\vee y,z)=\Psi_T(x,z)\wedge\Psi_T(y,z)$。

当 x 与 y 不可比时，由已知可得

$\Psi_T(x\vee y,z)=\sup\{\lambda\in L|T(x,\lambda)\vee T(y,\lambda)\leqslant_L z\}$

设 $A=\{\lambda\in L|T(x,\lambda)\vee T(y,\lambda)\leqslant_L z\}$，$\lambda^*=\sup A$，$B=\{\lambda\in L|T(x,\lambda)\leqslant_L z\}$，$\kappa^*=\sup B$，$C=\{\lambda\in L|T(y,\lambda)\leqslant_L z\}$，$\delta^*=\sup C$，根据 R-蕴涵的定义，可得 $\Psi_T(x\vee y,z)=\lambda^*$，$\Psi_T(x,z)=\kappa^*$，$\Psi_T(y,z)=\delta^*$。根据(I3)，可得

$$\lambda^*\leqslant_L\kappa^*\wedge\delta^*\tag{1}$$

另外，因为 $T(x,\kappa^*)\leqslant_L z$，$T(y,\delta^*)\leqslant_L z$，所以 $T(x,\kappa^*\wedge\delta^*)\leqslant_L z$，$T(y,\kappa^*\wedge\delta^*)\leqslant_L z$，故 $T(x,\kappa^*\wedge\delta^*)\vee T(y,\kappa^*\wedge\delta^*)\leqslant_L z$。由已知，$\kappa^*\wedge\delta^*\leqslant_L\sup\{\lambda\in L|T(x,\lambda)\vee T(y,\lambda)\leqslant_L z\}$，即 $\kappa^*\wedge\delta^*\leqslant_L\sup\{\lambda\in L|T(x\vee y,\lambda)\leqslant_L z\}$，因此

$$\kappa^*\wedge\delta^*\leqslant_L\lambda^*\tag{2}$$

结合式(1)和(2)，可得 $\kappa^*\wedge\delta^*=\lambda^*$，所以 $\Psi_T(x\vee y,z)=\Psi_T(x,z)\wedge\Psi_T(y,z)$。

(I4′)同理可证。 □

对于性质(I5)和(I6)，给定和定理 6 相同的前提条件，等号仍不恒成立。容易验证，当 x 与 y 可比时，有 $\Psi_T(x\wedge y,z)=\Psi_T(x,z)\vee\Psi_T(y,z)$，$\Psi_T(x,y\vee z)=\Psi_T(x,y)\vee\Psi_T(x,z)$，而当 x 与 y 不可比时，就可能出现 $\Psi_T(x\wedge y,z)>\Psi_T(x,z)\vee\Psi_T(y,z)$，$\Psi_T(x,y\vee z)>\Psi_T(x,y)\vee\Psi_T(x,z)$ 的情况。特别地，对于性质(I5)，即使再加强前提条件，也不能得到等号恒成立。

$$\Psi_{T_M}(x,y)=\begin{cases}1_L & x_1\leqslant y_1\text{ 且 }x_2\geqslant y_2\\(1-y_2,y_2) & x_1\leqslant y_1\text{ 且 }x_2<y_2\\(y_1,0) & x_1>y_1\text{ 且 }x_2\geqslant y_2\\(y_1,y_2) & x_1>y_1\text{ 且 }x_2<y_2\end{cases}\tag{3}$$

例 1 对于直觉模糊 R-蕴涵算子 Ψ_{T_M}，如式(3)，经验证 $\Psi_{T_M}(x\wedge y,z)$ 和 $\Psi_{T_M}(x,y\vee z)$ 取值如下，

$$\Psi_{T_M}(x\wedge y,z)=\begin{cases}1_L, & \text{当}(x_1<z_1,x_2<z_2)\\ & \text{且}(y_1>z_1,y_2>z_2)\\\Psi_{T_M}(x,z)\vee\Psi_{T_M}(y,z), & \text{其它}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{当}(x_1<y_1,x_2<y_2)\text{且}((x_1>z_1,x_2>z_2)\text{或 }x\geqslant_L z)\text{时，}\\\Psi_{T_M}(x,y\vee z)>\Psi_{T_M}(x,y)\vee\Psi_{T_M}(x,z);\\\text{其它情况下，}\\\Psi_{T_M}(x,y\vee z)=\Psi_{T_M}(x,y)\vee\Psi_{T_M}(x,z)\text{。}\end{cases}$$

进一步将模糊 R-蕴涵的性质[11,12]进行扩展，可得到直觉模糊 S-蕴涵 $\Psi_{S,N}$ 与 R-蕴涵 Ψ_T 的另一重要性质定理。

定理 7 设 T,S 分别为直觉模糊 t-模和 s-模，$\forall x,y,z\in L$，

(I7)若 T 与 S 关于否定算子 N 对偶，则 $\Psi_{S,N}(T(x,y),z)=\Psi_{S,N}(x,\Psi_{S,N}(y,z))$；

(I8)若 $T(x,\sup_{y\in Y}y)=\sup_{y\in Y}T(x,y)$，则 $\Psi_T(T(x,y),z)=\Psi_T(x,\Psi_T(y,z))$。

证明：(I7)根据直觉模糊三角模的结合性，对偶性，可得

$$\begin{aligned}\Psi_{S,N}(x,\Psi_{S,N}(y,z))&=S(N(x),S(N(y),z))\\&=S(S(N(x),N(y)),z)\\&=S(N(T(x,y)),z)\\&=\Psi_{S,N}(T(x,y),z)\end{aligned}$$

(I8)根据定义及 T 的结合律，可得

$$\begin{aligned}\Psi_T(T(x,y),z)&=\sup\{\lambda\in L|T(T(x,y),\lambda)\leqslant_L z\}\\&=\sup\{\lambda\in L|T(y,T(x,\lambda))\leqslant_L z\}\end{aligned}$$

根据已知，可得 $T(y,T(x,\lambda))\leqslant_L z$ 等价于 $T(x,\lambda)\leqslant_L\sup\{\lambda'\in L|T(y,\lambda')\leqslant_L z\}$，所以有

$$\begin{aligned}&\sup\{\lambda\in L|T(y,T(x,\lambda))\leqslant_L z\}\\&=\sup\{\lambda\in L|T(x,\lambda)\leqslant_L\sup\{\lambda'\in L|T(y,\lambda')\leqslant_L z\}\}\\&=\sup\{\lambda\in L|T(x,\lambda)\leqslant_L\Psi_T(y,z)\}\\&=\Psi_T(x,\Psi_T(y,z))\end{aligned}$$

即 $\Psi_T(T(x,y),z)=\Psi_T(x,\Psi_T(y,z))$。证毕。 □

从定理 7 可以看出，直觉模糊 S-蕴涵 $\Psi_{S,N}$ 继承了模糊 S-蕴涵的性质(I7)，而由于直觉模糊集隶属度与非隶属度的二维约束条件，直觉模糊 R-蕴涵 Ψ_T 需要添加必要的条件才能具有性质(I8)。在实际应用中，由于 S-蕴涵形式简单，因此应用比较广泛，但由于其强蕴含的特征，一些对于 R-蕴涵增加必要的条件就可以成立的性质，对于 S-蕴含并不成立，这也正是文献[11,12]基于 R-蕴含研究模糊粗糙集的原因所在。

结束语 模糊逻辑算子在模糊信息融合、模糊推理及模糊决策等方面有着广泛应用。直觉模糊逻辑算子是对模糊逻辑算子的直觉化扩展，由于直觉模糊集的二维约束条件，直觉模糊逻辑算子所具有的性质也不同于普通模糊逻辑算子。本文通过引入直觉模糊集在特殊格上的定义，对直觉模糊 t-模与 s-模的若干性质进行研究，将文献[11,12]中的模糊 R-蕴涵算子拓展到直觉模糊环境下，对直觉模糊 S-蕴涵与 R-蕴涵所具有的新性质进行讨论和证明，便于直觉模糊逻辑算子的进一步应用，课题下一步计划将直觉模糊逻辑算子引入模糊推理与基于粗糙集的决策分析，对其应用进行拓展研究。

参考文献

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems，1986，20：87-96

[2] 雷英杰，王宝树，苗启广. 直觉模糊关系及其合成运算[J]. 系统工程理论与实践，2005，25(2)：113-118

[3] Li D. Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences，2005，70(1)：73-85

[4] Li D，Cheng C. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and applications to pattern recognitions [J]. Pattern Recognition Letter，2002，23：221-225

[5] 雷英杰，王宝树，路艳丽. 基于自适应直觉模糊推理的威胁评估方法[J]. 电子与信息学报，2007，29(12)

[6] 雷英杰，王宝树，王毅. 基于直觉模糊决策的态势评估方法[J]. 电子学报，2007，29(9)：2077-2081

[7] 景晓军，尚勇，余农. 基于三角模融合准则的滤波算法[J]. 电子学报，2004，3(26)：886-889

[8] Deschrijver G，Cornelis C，Kerre E E. Intuitionistic fuzzy connectives revisited[C]// Proc. 9th Int. Conf. Information Processing Management Uncertainty Knowledge-Based Systems. 2002：1839-1844

[9] Deschrijver G，Cornelis C，Kerre E E. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems，2004，12 (1)：45-61

[10] Cornelis C，Deschrijver G，Kerre E E. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory：construction，classification，application [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2004，35：55-95

[11] Morsi N N，Yakout M M. Axiomatics for fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems，1998，100：327-342

[12] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001