

代数图论方法在并行处理中的应用研究^{*}

魏文红¹ 肖文俊¹ 黄书强^{1,2} 王高才³

(华南理工大学计算机学院 广州 510640)¹ (暨南大学网络与教育技术中心 广州 510632)²

(广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)³

摘要 并行处理提高了计算机解决问题的运算速度,在当代计算机科学技术占有重要的地位。代数图论方法对于并行处理的研究起着重要作用。就并行互连网结构与负载平衡中使用的代数图论方法进行了阐述,说明了代数图论方法为更深一步地研究并行处理指明了方向。

关键词 代数图论,并行处理,互连网络,负载平衡

Research on Application of Algebra and Graph Theory in Parallel Processing

WEI Wen-hong¹ XIAO Wen-jun¹ HUANG Shu-qiang^{1,2} WANG Gao-cai³

(Dept. of Computer Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)¹

(Network and Educational Technology Center of Jinan University, Guangzhou 510632, China)²

(School of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)³

Abstract Parallel processing improves the computing speed of solving problem, and is very important in computer technology. Algebra and graph theory has important effect on research of parallel processing, algebra and graph theory in parallel interconnect network and loading balance was introduced, and it is clear that algebra and graph theory points out the developing direction of research in parallel processing in deep.

Keywords Research of algebra and graph, Parallel processing, Interconnect network, Loading balance

1 引言

并行处理是当代计算机科学技术的主要研究领域之一,世界各国投入了大量的人力和物力对它进行研究。数学方法在并行处理中几个基本问题的应用主要包括用代数、图论和最优化方法来统一处理并行计算机互连结构、路由算法和负载分配的问题,使之能指导并行计算机系统的设计与建造。并行计算机的性能瓶颈主要是互连处理机之间的通信延迟,因此并行计算机互连结构与通信算法的研究是极其重要的。另一方面,为了充分利用并行计算机的处理能力,需要优良的资源分配方案,如何合理和透明地在处理机之间重新分配系统负载的研究也是十分重要的。并行处理在科学技术和经济建设的各个方面都有广泛而深入的应用^[1-4]。并行处理研究的主要内容有:硬件基础——当代并行计算机系统及其结构模型、核心内容——并行算法设计与并行数值算法和并行处理的软件支持——并行程序的设计原理与方法^[1-4]。本文从这三个方面内容的几个基本问题,介绍了并行计算机互连结构与路由算法的一般数学方法,以及并行计算机负载分配的近代代数图论和最优化方法。在这两个研究领域中都深入地应用了近代代数、图论和最优化的理论,在并行处理中有着广泛的应用和重大的理论价值。

2 代数图论方法在并行互连网络结构与通信算法中的应用

前面提到,并行计算机的互连结构与通信算法的研究是

极其重要的。然而,现今大量的有关研究是建立在直觉和经验之上的,还没有上升到理论的成熟和完备阶段^[5],因此值得进一步深入研究并行计算机的互连结构和路由算法的一般数学方法,使之能指导并行计算机系统的设计。并行计算机的互连结构以图为模型,图的顶点表示互连系统的处理机,图的边表示互连系统的通信链路。并行计算机的互连结构的设计以花费小和简单为原则,经过精心设计而实现。常用的互连结构有超立方体、网孔、CCC和De Bruijn有向图等,如图1所示。从数学的角度讲,这些互连网络结构都是Cayley图、陪集图或其子图,因此用Cayley图和陪集图作为并行计算机互连结构模型来统一处理互连结构与通信问题是必要的和可行的^[6-10]。在代数图论中,Cayley图是代数结构——群上的图,它有许多好的性质,如对称性、路由算法简单、嵌入和容错性质好等。例如,超立方体便是一种Cayley图,它具有以上所述的许多好性质。但是有许多重要的互连结构模型,如De Bruijn有向图等不是Cayley图,却是陪集图。陪集图是Cayley图的商图,它是Cayley图的一种推广,也具有一些好的性质,如路由算法简单、嵌入性质及可扩展性较好等^[7,8,10]。这里我们要指出的是,非对称和动态网络可以嵌入到对称性较高的网络中,如对等网络等就用到了许多并行计算机互连网络,因此可以通过研究对称性比较高的网络来对非对称和动态网络进行研究。由于并行计算机互连结构好坏与并行通信算法优劣有紧密的联系,我们不应该孤立地研究它们,因此运用近代代数与图论方法来统一系统地研究它们是必要的。例如:一个互连结构模型的图对称性高,那么一般来说它的路由

^{*} 本文工作受国家自然科学基金(No. 60763013),广东省自然科学基金(05011896),广东省科技计划项目(No. 2006B15401002)和广东省计算机网络重点实验室开放研究基金资助。魏文红 讲师,博士生,研究领域为网络与并行分布式计算;肖文俊 教授,博导,研究领域为网络与并行分布式计算;黄书强 工程师,博士生,研究领域为无线 MESH 网络及智能计算;王高才 教授,博士后,研究领域为分布式网络及其算法、容错分析。

算法就会是简单的,因此我们可以统一研究图对称性和路由算法的问题。又如:一种重要的图嵌入——图同态的运用,使我们不必个别处理各种互连结构的问题,从而可以得到有关互连结构的一般结论。再如:图的 Laplacian 矩阵理论在互连结构、通信算法和负载分配等各种各样的并行计算领域都有深入的应用^[11]。然而,正如文献[7]所指出的,关于 Cayley 图(更一般地,陪集图)的性质的一般结论还不多,很少有好的算法对所有的陪集图都是有效的。为了发现它们好的性质,需要运用更多的群论。前人已在这一研究领域做出了许多成果,我们应继续努力寻求陪集图这个较为理想和优良的互连结构模型的一般的新性质,特别是图对称性、图同态和图 Laplacian 矩阵方面的新性质,并使之应用于重要的并行计算机互连结构与路由算法的研究,以求建立其一般数学方法。这是一个值得进一步深入研究的领域。

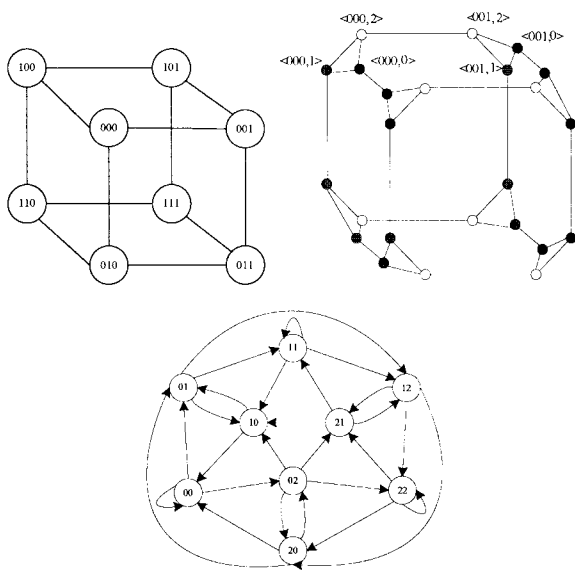


图 1 几种常用的互连网络结构

一个好的互连结构图模型的主要性能指标有:较小的节点度和直径、路由算法简单、可扩展性、嵌入性、容错性好及对称性高等。这里节点度小代表处理机端口少。直径是互连网络的一个重要的拓扑参数,它表示节点之间距离的最大者。在存储转发计算模型里,它是通信延迟的上界,因此直径的计算是重要的。路由表示消息从一个节点到另一个节点传播的路径,而消息传播的快慢在很大程度上决定了计算的效率,因此路由算法是并行算法领域中的一个主要研究对象。应该指出,我们这里的所有的定义都是在确定的计算模型下来考虑的,计算模型不同,所研究的对象的定义也有所不同。可以主要通过研究以 Cayley 图和陪集图为模型的互连结构与路由算法问题,特别要寻求 Cayley 图和陪集图的一般的新性质,用之于互连结构和路由算法的研究中。前面已经提到,许多重要的互连结构模型,如超立方体、网孔等是 Cayley 图,而 De Bruijn 有向图、Shuffle-Exchange 有向图等是陪集图,因而寻求 Cayley 图和陪集图的一般的新性质是有重要意义的。

如果一个网络 A 能被嵌入进网络 B,那么在网络 B 上能实现网络 A 上开发的算法,因此互连网络之间的嵌入研究是重要的。网络的嵌入在数学中表现为图同态,所以图同态问题是重点研究的对象。图同态是保持边的映射,是一种特殊的图嵌入,使我们不必个别研究各种各样不同的互连结构,从而可以得到它们的一般性质。图同态在图论和网络中有广泛的应用,需要深入研究图同态的一般理论,并将它用于研究重

要互连结构之间的同态问题。

互连结构与并行算法的一个重要的研究领域是它们的对称性问题。主要的对称性有顶点传递、边传递和距离传递。一个图是顶点传递的,是指对这个图的任何两个顶点,存在一个图自同构将其中一个变为另一个。边传递和距离传递性可以类似地定义。顶点传递性使得图从各个节点看起来是一样的,因此顶点传递性对设计有效的路由算法是重要的,而一个图的边传递性可以推出它的极大容错性。这些事实说明了图的对称性研究在并行计算研究中的重要性。陪集图的对称性问题是重点研究问题,研究它们旨在对互连结构的路由算法和容错性有着更深一步的理解。

互连网的研究内容是广泛的,但是它们都在一个统一的互连结构模型——Cayley 图和陪集图的框架之下,作为一个整体而互相紧密联系。为建立并行计算机互连结构与路由算法的统一数学方法,必须注意研究这个优良的互连结构模型——Cayley 图和陪集图的各个方面,如图对称性、图同态和路由算法。然而在这方面,还有大量的工作要做。需要进一步深入研究互连结构模型——Cayley 图和陪集图的性质,如图对称性、图同态等和路由算法的关系,这是要解决的一个关键问题。

3 代数图论方法在负载平衡中的应用

并行计算机的负载分配问题是为了充分利用并行计算机的处理能力,寻求优良的负载分配方案,这是一个多目标优化问题,因此最优化方法在负载分配研究中是十分重要的^[11-13]。然而,理论研究与实际经验都告诉我们,负载分配方案的优劣与系统互连结构的性质是紧密相关的,我们必须统一考虑这两方面的问题。我们知道,一个好的系统互连结构可导致一个简单的路由算法。同样,一个好的系统互连结构也可以导致一个优良的负载分配方案。例如:超立方体就具有一个优良的负载平衡方案——维交换算法^[14],在这里图对称性起了基本的作用。这样我们可以用代数图论和最优化的方法来统一地处理系统互连结构、路由算法和系统负载分配问题。负载分配大致可分为静态和动态两类。静态分配又叫做确定性调度;动态分配又叫做负载平衡^[15-18],它是当代并行处理的一个热门的研究方向。学者们对动态负载平衡方案——迭代和直接方法已有深入的研究,大量使用了近代代数图论和最优化的方法^[15]。迭代方法又称为最近邻居方法,其中又分为扩散和维交换方法等,这是当前的一个活跃的研究课题,大量地使用了图的 Laplacian 矩阵方法^[16]。应该强调的是,负载平衡使用系统状态信息来为负载分配做决策,更好地动态使用了全系统的资源,提高了系统的性能。这是一个多目标优化问题,因此最优化方法在这里显得十分重要。但因为它固有的复杂性,特别是许多实际问题都是 NP-完全问题,还没有形成一个统一的理论,因此值得进一步深入研究。用代数图论方法可以进一步研究和推进并行计算机互连结构、路由选择和负载分配方案,这是一个值得大力研究的计算机科学和数学的交叉领域,将对并行处理的发展起重大的推动作用。

为了充分利用并行计算机的处理能力,优良的负载分配方案也是十分重要的。虽然至今在这方面已进行了大量的研究,但是它也没有上升到理论的成熟和完备阶段。关键问题是如何深入运用现代代数图论和最优化的方法,建立并行计算机互连结构的一般模型,统一处理系统互连结构、路由算法和负载分配的问题,使之形成理论,用以指导并行计算机系统的设计。

并行计算机系统具有巨大的处理能力,为了充分利用这种能力,需要优良的负载分配方案。负载分配是并行计算机系统的资源管理模块,它主要是合理和透明地在处理机之间重新分配系统负载,以使系统的综合性能达到最优。在文献[1]中已经提到,并行系统的路由算法的优劣与互连结构的性质的好坏有密切的联系,我们不能孤立研究它们。同样,并行系统的负载分配方案的优劣也与互连结构的性质的好坏有直接的关系。我们应该统一处理互连结构、路由算法和负载分配问题。

在现今负载分配的研究中大量使用了近代代数图论的方法,如图的 Laplacian 矩阵和最优化方法,如规划论等^[16],因此代数图论和规划论方法在负载分配研究中是大有用武之地的。但因为它的固有的复杂性,还没有一个统一的理论。因此我们应进一步深入研究负载分配研究中的代数图论和最优化方法。我们前面已经谈到,Cayley 图和陪集图是一个优良的互连结构模型,将以这个模型为框架,进行负载分配方案的研究。

结束语 综上所述,在一个优良的并行计算机互连结构模型——陪集图的框架下,深入运用现代代数图论和最优化方法,统一处理并行计算机互连结构、路由算法和负载分配问题,以求推进它们的一般数学方法。系统深入地运用近代代数、图论和最优化方法,特别是图对称性、图同态、Laplacian 矩阵和规划论,在一种优良的互连结构模型——陪集图的框架下,统一处理并行计算机重要的互连结构、路由算法和负载分配问题,从而为推进统一的数学方法作出贡献。

参 考 文 献

[1] El - Rewini H , El - Barr M A . Advanced Computer Architecture and Parallel Processing. Wiley-Interscience, 2005
 [2] Dally W J , Towles B P . Principles and Practices of Interconnection Networks. Morgan Kaufmann, 2004
 [3] Grama A , et al . Introduction to Parallel Computing, Second Edition. Pearson Education Limited, 2003
 [4] 陈国良 . 并行计算——结构、算法、编程. 高等教育出版社, 2001
 [5] Heydemann M . Cayley Graphs and Interconnection Networks. Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications, 1997: 167-224

[6] Chen Baoxing, Xiao Wenjun, Parhami B. Internode distance and optimal routing in a class of alternating group networks. IEEE Transactions on Computers, 2006, 55(12):1645-1648
 [7] Xiao Wenjun , Parhami B . Further mathematical properties of Cayley digraphs applied to hexagonal and honeycomb meshes. Discrete Applied Math. , 2007, 155(13):1752-1760
 [8] Xiao Wenjun, Parhami B. Some mathematical properties of Cayley digraphs with applications to interconnection network design. International Journal Computer Math. , 2005, 85(5): 521-528
 [9] Xiao Wenjun, Parhami B. A group construction method with applications to deriving pruned interconnection networks. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2007, 18(5): 637-643
 [10] Xiao Wenjun , Parhami B . Structural Properties of Cayley Digraphs with Applications to Mesh and Pruned Torus Interconnection Networks. Journal of Computer and System Sciences, 2007, 73:1232-1239
 [11] Elsasser R, Monien B, Schamberger S. Load Balancing in Dynamic Networks // Proc. of the 7th International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks. 2004:1-8
 [12] Antonis K, et al. A hierarchical adaptive distributed algorithm for load balancing. J. Parallel and Distributed Computing, 2004, 64:151-162
 [13] Devine K D, et al. New challenges in dynamic load balancing. Applied Numerical Math. , 2005, 52(2/3):133-152
 [14] Rotaru T, Nageli H H. Dynamic load balancing by diffusion in heterogeneous systems. Parallel and Distributed Computing, 2004, 64:481-497
 [15] Arndt H. On finite dimension exchange algorithms. Linear Algebra and its Applications, 2004, 380:73-93
 [16] Berenbrink P, et al. Dynamic diffusion load balancing // Lecture Notes in Computer Science, 3580. 2005:1386-1398
 [17] Dolev S, et al. Dynamic load balancing with group communication. Theoretical Computer Science, 2006, 369 (1/3):348-360
 [18] Zhao Chenggui , Xiao Wenjun , Qin Yong . Hybrid Diffusion Schemes for Load Balancing on OTIS-Networks // Lecture Notes in Computer Science 4494. 2007:421-432

(上接第 31 页)

[27] Brewster S , Chohan F , Brown L . Tactile Feedback for Mobile Interactions[C] // CHI 2007 Proceeding. San Jose, California, USA, 2007
 [28] Poupyrev I , Maruyama S . Tactile Interfaces for Small Touch Screens[C] // Proc. of UIST 2003. ACM Press, 2003:217-220
 [29] Cockburn A, Brewster S A. Multimodal feedback for the acquisition of small targets[J]. Ergonomics, 2005, 48(9):1129-1150
 [30] Erp J B V , Veen H A V . Vibrotactile in-vehicle navigation system. Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour, 2004, 7(4/5):247-256
 [31] van Veen H A H C , van Erp J B F . Tactile information presentation in the cockpit [J]. Lecture Notes in Computer Science 2058. 2001(3118):174-181
 [32] Lindeman R W , Sibert J L , Mendez-Mendez E , et al . Effectiveness of directional vibrotactile cuing on a building-clearing task [C] // CHI'05: Proceeding of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems. New York, NY, USA: ACM Press, 2005:271-280
 [33] Wall S, Brewster S A. Feeling What You Hear: Tactile Feed-

back for Navigation of Audio Graphs[C] // Proceedings of ACM CHI 2006. Montreal, Canada: ACM Press Addison-Wesley, 2006:1123-1132
 [34] YU Wai , Kangas K , Brewster S . Web-based haptic applications for blind people to create virtual graphs // Proceeding of the 11th Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator System[C]. Los Angeles, 2003: 318-324
 [35] YU Wai , Ramloll R , Brewster S . Haptic graphs for blind computer users: Human-Computer Interaction Workshop [C]. Glasgow, 2000: 41-51
 [36] Kajimoto H , Kawakami N , Tachi S , et al . Smarttouch: Electric skin to touch the untouchable[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2004, 24(1):36-43
 [37] McGookin D K , Brewster S A . MultiVis : Improving Access to Visualisations for Visually Impaired People[C] // Vol II Proceedings of ACM CHI 2006 (Montreal, Canada). ACM Press, 2006:267-270
 [38] McGookin D K , Brewster S A . Graph Builder : Constructing Non-visual Visualizations[C] // Proceedings of the 20th BCS HCI Group Conference. London, UK, 2006