

# 一种基于细尺度间小波系数相关性的图像去噪方法<sup>\*</sup>

傅 博<sup>1</sup> 王相海<sup>1,2</sup>

(辽宁师范大学计算机与信息技术学院 大连 116029)<sup>1</sup>

(南京大学计算机软件新技术国家重点实验室 南京 210093)<sup>2</sup>

**摘 要** 图像去噪问题的研究一直是图像处理的热点问题。首先对噪声图像经小波分解后噪声小波系数在细尺度子带间的分布特点进行了研究,提出了一种结合尺度内和尺度间系数相关性的噪声统计模型——细尺度间噪声系数分布的“类零树结构”,以及基于分块的 Bayes 阈值确定方法。在此基础上将二者相结合,提出了一种新的图像去噪方法。该方法首先通过 Bayes 阈值去噪法去除高层子带中的噪声,同时利用基于块阈值方法定位次外层子带中的噪声位置,然后利用“类零树结构”模型,估计对应的最外层子带中的噪声的分布,并进行相应的去噪处理。实验结果表明,该方法稳定、有效,去噪效果优于传统 Bayes 逐点阈值去噪方法,且具有较低的时间复杂度。

**关键词** 图像去噪,噪声小波系数分布,Bayes 阈值法,分块阈值

## Image Denoise Algorithm Based on Inter Correlation of Wavelet Coefficients at Finer Scales

FU Bo<sup>1</sup> WANG Xiang-hai<sup>1,2</sup>

(College of Computer and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)<sup>1</sup>

(State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 210093, China)<sup>2</sup>

**Abstract** Image denoise has been being a hotspot in the discipline of image processing. We first analyse the inter-scale distribution characteristics of the coefficients at finer scale of the noise image, and then we propose a statistical model of noise incorporating the coefficient correlation of intra-scale and inter-scale, called the zerotree-like structure of noise coefficient distribution inter finer-scale, and the calculational method of block-wise Bayes shrinkage threshold. Second, based on the above, a new denoise algorithm is proposed. The algorithm first filters the noise at finer-sale using Bayes shrinkage threshold, and at the same time locates the noise in the lowest level but one of wavelet pyramid by the proposed block-wise Bayes shrinkage threshold. Then using the model of zerotree-like structure, the algorithm estimates the corresponding noise distribution in the bands of the lowest level, and do the appropriate denoise process. The experiment results show that the proposed algorithm is steady and efficient, and its denoising performance is superior to the traditional point-wise Bayes shrinkage method. Moreover, the proposed algorithm has a lower time complexity.

**Keywords** Image de-noising, Noise wavelet distribution, Bayes shrinkage threold de-noise, Block-wise threold

### 1 引言

图像去噪的目的是减少和消除图像中的噪声,以改善图像质量和提高诸如图像分析、图像编码等图像处理的效率。近年来,小波理论在图像处理领域获得了极大的成功,在图像去噪方面也出现很多有效的方法,例如阈值去噪法、屏蔽去噪法、模极大值检测法等。阈值法作为比较典型的图像去噪方法在基于小波域的图像去噪方法中得到了发展,比较典型的有 Donoho 和 Johnstone 提出的小波萎缩方法 (Wave-Shrink)<sup>[1,2]</sup>。在该类方法中,合理的阈值选取至关重要,目前主要阈值选取方法包括:通用阈值法<sup>[1-3]</sup>、极大极小阈值法<sup>[4]</sup>、理想阈值法<sup>[5-7]</sup>、Stein 无偏风险阈值估计法<sup>[8]</sup>和贝叶斯阈值法<sup>[9-12]</sup>等,其中由 Donoho 和 Johnstone 提出的通用阈值法是比较经典的方法,算法简单快速,但存在着较为严重的“过扼杀”小波系数的倾向;极大极小阈值法是在最小最大化意义下获得阈值,它一般要依赖原始信号且没有显式表达式,同样也存

在过度扼杀小波系数的倾向,利用该阈值的去噪效果往往不能令人满意;理想阈值是在均方差准则下的最优阈值,但是阈值的计算同样需要预先知道信号本身,而实际这是不可能的;Stein 无偏风险阈值估计法基于 Stein 无偏似然估计原理的自适应阈值选择,它趋于“过保留”小波系数,所获得的最优阈值趋近于理想阈值;贝叶斯阈值法是建立在小波系数的分布特性基础上的一种方法,假设图像的小波系数服从广义高斯分布,利用信号的概率模型来计算最小化平均风险的估计值,该方法能够获得接近于理想阈值的去噪效果,但仍然存在着许多局限性,比如估计的噪声方差很难适用于子带中的每一个窗口,此外该方法具有很高的计算复杂度。总体而言,上述几种阈值选取方法各有特点,它们在一定程度上满足了图像去噪的要求,但大多被作为通用阈值处理,或者只考虑到了尺度内的系数相关性,没有将尺度内和尺度间的系数相关性相结合。即使在阈值的选取上考虑了尺度内、尺度间的相关性,也很少将噪声系数的影响考虑进去,这在一定程度上影响了去

<sup>\*</sup> 受辽宁省高等学校优秀人才支持计划(RC-04-11),辽宁省自然科学基金(20072156),辽宁省教育厅科学技术研究项目(20060486)和南京邮电学院图像处理与图像通信江苏省重点实验室开放基金(ZK207006)资助。傅 博 硕士生,主要研究方向为图像增强技术;王相海 博士,教授,主要研究方向为计算机图形学及多媒体信息处理。

噪的效率。

本文首先对噪声小波系数在细尺度子带间的分布特点进行了研究,提出一种结合尺度内和尺度间系数相关性的噪声系数统计模型——细尺度间噪声系数分布的类零树结构,同时对 Bayes 阈值去噪法进行了改进,提出了一种分块的 Bayes 阈值处理方法。在此基础上,将二者相结合,提出了一种新的图像去噪方法,该方法首先通过 Bayes 阈值去噪法去除粗尺度内的噪声,并定位次外层子带中的噪声位置,然后利用所提出的一种结合尺度内和尺度间系数相关性的噪声统计模型——类零树结构,估计最外层噪声的分布,并进行相应的去噪处理。实验结果表明,该方法在保证较低时间复杂度的前提下,取得了较 Bayes 阈值去噪法更高 PSNR 的去噪效果。

## 2 噪声系数在细尺度子带间的分布特点

### 2.1 噪声小波系数的分布特性

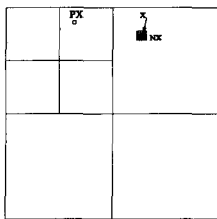


图1 尺度内、尺度间系数的关系

尽管小波变换对图像具有一定的去相关特性,但变换后的图像小波系数之间仍还存在着一定的相关性,具体可分为三大类<sup>[5]</sup>,即尺度内的相关性(Intra-scale dependency)、尺度间的相关性(Inter-scale dependency)和同时考虑尺度内和尺度间的系数相关性,这些相关性可通过“互信息”来度量。尺度内的相关性表现为同一子带内的小波系数具有聚集特性,可以用一个系数  $X$  与其相邻系数  $NX$  的互信息  $I(X; NX)$  来衡量(参见图1);尺度间的相关性表现为不同尺度下同一方向的小波系数之间存在着一定的相关性,可以用一个系数  $X$  与其父系数  $PX$  的互信息  $I(X; PX)$  来衡量;同时考虑尺度内和尺度间的系数相关性可通过互信息  $I(X; PX, NX)$  来衡量。文献<sup>[5]</sup>对自然图像经 Daubechies 8-tap 小波进行变换后小波系数的上述三方面的相关性进行了统计分析,获得如

下关系:  $I(X; PX, NX) > I(X; NX) > I(X; PX)$ 。

进一步,我们对图像中噪声小波系数的分布特性进行了如下统计:首先对被不同程度高斯白噪声污染的图像进行三层小波分解,然后利用 Bayes 阈值法搜寻并记录噪声点的位置。图1是其中对 Lena 和 Aerial 图像的统计结果。

表1 高斯白噪声点在小波子带中的分布统计表

图像名	噪声方差	噪声点总数	最外两层噪声点数	百分比(%)
Lena	0.01	253629	244364	96.728
Lena	0.02	254064	244369	96.212
Lena	0.05	254582	244399	96.001
Lena	0.10	254863	244440	95.911
Aerial	0.01	251213	243707	97.012
Aerial	0.02	252553	244183	96.686
Aerial	0.05	253636	244258	96.303
Aerial	0.10	254386	244404	96.076

从表1中可以看出,高斯白噪声污染的图像经小波分解后,其噪声的小波系数主要集中在细尺度子带中,且约有96%的噪声系数集中在最外两层的子带中。这样,我们对高斯白噪声小波分解系数特性的研究可集中在最外两层子带中。

### 2.2 细尺度间噪声分布的“类零树结构”

为了获得细尺度子带间噪声分布的相关特性,我们做如下约定:

若高层子带中位置  $(i, j)$  处的系数是高斯白噪声点,考察其对应同方向细节子带中位置  $(2i, 2j)$ 、 $(2i+1, 2j)$ 、 $(2i, 2j+1)$  和  $(2i+1, 2j+1)$  处的四个系数:

(1) 若四个系数均为高斯白噪声点,则称该组噪声满足“1:4结构的噪声分布”;

(2) 若四个系数中有且仅有三个系数为高斯白噪声点,则称该组噪声满足“1:3结构的噪声分布”;

(3) 若四个系数中有且仅有二个系数为高斯白噪声点,则称该组噪声满足“1:2结构的噪声分布”。

由2.1节可知,噪声系数主要分布在最外两层子带中,故我们对图像小波分解后最外两层子带中噪声的分布规律进行了统计,结果如表2所示。

表2 最外两层子带中各结构噪声分布统计表

图像名	噪声方差	噪声总数	1:4结构	1:4结构	1:3结构	1:3结构	1:2结构	1:2结构
			的噪声数	噪声的百分比	的噪声数	噪声的百分比	的噪声数	噪声的百分比
Lena	0.01	244364	221450	90.62	8626	3.53	1563	0.64
Lena	0.02	244369	130610	93.84	8528	3.49	1661	0.68
Lena	0.05	244399	131135	93.73	8676	3.55	1710	0.70
Lena	0.1	244440	132985	93.87	10999	4.50	1760	0.72
Aerial	0.01	243707	121475	92.35	10235	4.20	1437	0.59
Aerial	0.02	244183	124640	93.49	10328	4.23	1465	0.60
Aerial	0.05	244258	128555	91.88	8378	3.43	1637	0.67
Aerial	0.1	244404	130350	94.19	9947	4.07	1686	0.69
平均值	—	244266	140150	93.00	9478	3.88	1612	0.66

从上述统计表中可以看出,满足三种分布模型的噪声点占细尺度最外两层中所有噪声点的平均百分比分别为:93.00%,3.88%和0.66%,可见“1:4结构的噪声分布”模型能够刻画绝大部分的噪声点。这样,对于被高斯白噪声中度或者严重污染的图像,选用1:4结构的分布模型可以在图像

小波变换的细尺度上快速并且比较准确地寻找并消除噪声。进一步,这种1:4结构的分布模型与“零树结构”<sup>[13]</sup>非常类似,不同的是,这种零树仅分布在高频的最外两层子带中。故此,本文将这种分布结构简称为“类零树结构”(如图2所示)。

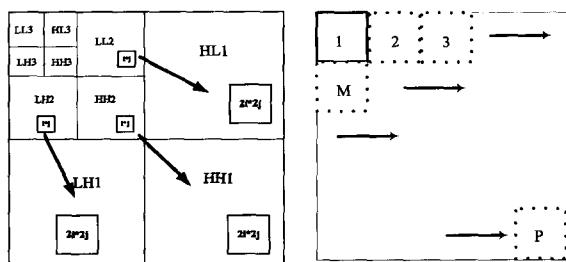


图2 类零树结构示意图 图3 模板移动方法的示意图

### 3 基于类零树结构的图像去噪方法

#### 3.1 基于模板的分块阈值选取

传统的 Bayes 阈值去噪法在选取阈值时采用逐点计算阈值和逐点移动模板的方法。本文根据小波系数的聚类特性和 2.2 节提出的噪声点系数“类零数结构”，对传统 Bayes 进行了改进，提出了如下基于模板的分块阈值选取方法。

##### (1) 分块阈值的计算

本文以模板大小作为“块单位”计算细尺度内各个子带的分块阈值，使得块内的各系数在后面的去噪处理时采用统一的阈值。在阈值的选取过程中，采用绝对中值估计法来估计各块内的噪声方差和其它信号方差，具体公式如下：

$$\sigma' = \text{median}(|S_{i,j} - S_{\text{median}}|) \quad (1)$$

$$\sigma_y^2 = \left| \frac{1}{I \times J} \sum_{i,j} |W_{I \times J}(S_{i,j})|^2 - (\sigma')^2 \right| \quad (2)$$

其中  $S_{i,j}$  表示细尺度各子带的系数， $S_{\text{median}}$  表示细尺度各子带所有系数的中值， $\text{median}(\cdot)$  为取中值函数， $W_{I \times J}$  表示大小为  $I \times J$  的模板， $W_{I \times J}(S_{i,j})$  表示模板中的系数值。

进一步，按如下公式确定各分块阈值：

$$\lambda = (\sigma')^2 / (\sigma_y)$$

该方法能根据噪声与信号的不同强度自适应地选择阈值。若  $(\sigma')^2 \leq \sigma_y^2$ ，说明噪声能量比信号能量小，模板中包含有更多的信号能量，这样， $(\sigma')^2 / (\sigma_y)$  使得所选取的阈值  $\lambda$  较小，以保留大部分特征信号；相反，若  $(\sigma')^2 > (\sigma_y)$ ，则说明模板内噪声信号能量比图像信号能量大， $(\sigma')^2 / (\sigma_y)$  所选取的阈值  $\lambda$  较大，有利于消除大于信号能量的噪声。

##### (2) 块的选择

本文以模板为单位进行移动，按照从上至下、自左向右的顺序在细尺度各子带内选择各分块(如图 3 所示)，并计算各分块阈值和进行噪声处理，避免了基于逐点选择分块所带来的复杂性。

#### 3.2 分块阈值选取的原因

上述在对传统 Bayes 方法阈值选取方法改进的过程中，根据 2.2 节的噪声在细尺度分布的“类零树”特点，采用了以模板为单位的阈值选取方法，即将传统的 Bayes 方法中逐点确定阈值改为以模板为单位来选取阈值，这样做主要是因为小波系数在同尺度内具有一定的聚集特性，一定范围内的小波系数具有相似的特点。本文所采用的以模板为单位的阈值选取方法具有以下优点：一是避免了在同一范围内反复计算阈值，而实际上在这一范围内各点阈值的差异并不大，从而大大节省了计算时间；二是保证了图像系数在一定区域内的一致性；三是有利于建立细尺度下相邻层间噪声点系数的对应关系。

#### 3.3 模板大小的选取

在基于模板的分块阈值选取过程中，模板大小的选择是

一个关键问题。如果模板过大，模板中的噪声特性可能不一致，会影响去噪效果；如果模板过小，由于 Bayes 阈值法对于信号能量的估计是基于数据统计意义上的无偏估计，较少的数据量会导致该方法失去准确性。基于上述原因，我们对模板大小的选择进行了大量的统计计算，分别采用大小为  $1 \times 2, 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4$  和  $5 \times 5$  的模板来确定分块的阈值，进而统计采用该阈值所寻找到的正确噪声点数，统计结果如图 4 所示。从图中可以看出，随着模板的变大，能够准确定位到的噪声点个数逐渐增加，模板大小在  $3 \times 3$  附近，统计到的噪声的准确性达到最高，随后又逐渐降低。据此，本文采用了  $3 \times 3$  模板进行阈值的选取。

图 5 是对 Lena 图像添加不同强度的噪声，利用不同大小的模板、采用本文的去噪算法(参见 3.4 节)进行去噪的比较结果。

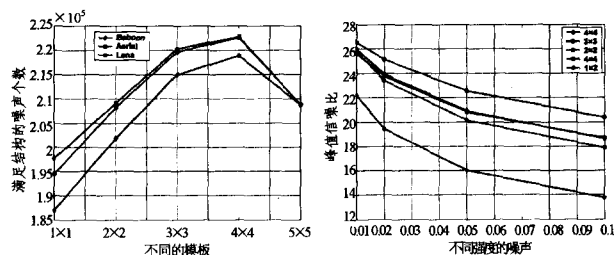


图4 采用不同模板时准确定位噪声的点数 图5 采用不同大小模板的去噪结果比较

#### 3.4 本文所提出的图像去噪算法

基于前面的细尺度间噪声点分布模型和基于模板的 Bayes 分块阈值选取理论分析，本文提出一种图像去噪算法，具体过程如下：

Step1 对源图像进行三级提升小波变换；

Step2 对图像分解后第三层的四个子带 LL, LH, HL 和 HH 采用逐点 Bayes 阈值法进行去噪；

Step3 选取大小为  $3 \times 3$  的模板 A，依次选取次外层的每个子带，将模板 A 的左上角与该子带的左上角相对应；

Step4 对模板大小的分块，分别按照公式(1)、(2)计算该块的噪声方差  $\sigma'$  和信号方差  $\sigma_y$ 。考虑到噪声系数能量相对较小，如果阈值较大，可能会过度扼杀系数，本文选取  $\lambda = (\sigma')^2 / (2\sigma_y)$  作为块阈值；

Step5 采用 Bayes 阈值法对该块进行统一阈值  $\lambda$  的去噪处理，并记录该块中噪声的位置；

Step6 根据 2.2 节所给出的细尺度间噪声分布的“类零树结构”，确定与 Step5 中所确定的每个噪声位置相对应的最外层子带中的四个系数，并将其置为 0；

Step7 按照从上至下、自左向右的顺序在该子带内依次移动模板，并转向 Step4，直到该子带处理完毕；

Step8 如果次外层的三个子带均处理完毕，则对去噪后的小波系数进行小波逆变换，算法结束；否则转向 Step3。

## 4 实验结果与分析

#### 4.1 实验结果

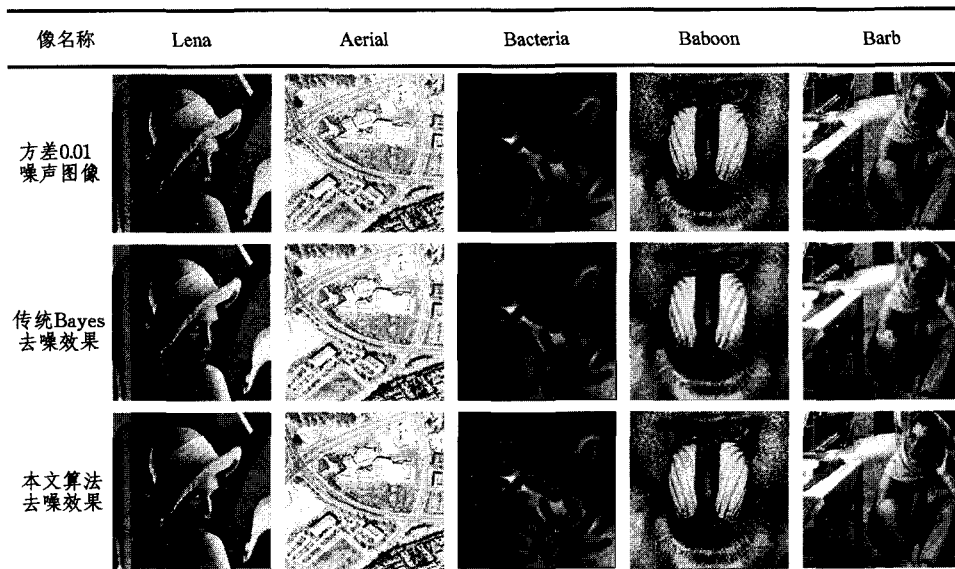
为验证本文方法去噪效果，选取大小为  $512 \times 512$  像素的 Lena, Aerial 两幅标准图像作为测试图像，并将所提出的方法与传统的 Bayes 去噪法在多种强度的高斯白噪声下的去噪结果进行比较，统计结果参见表 3。表 4 是对方差为 0.01 高

斯白噪声去噪前后的效果图像。

表 3 不同强度的高斯白噪声下两种方法的去噪结果的 PSNR 比较

图像名称	Lena	Lena	Lena	Lena	Aerial	Aerial	Aerial	Aerial	Bacteria	Baboon	Barb
噪声方差	0.01	0.02	0.05	0.10	0.01	0.02	0.05	0.10	0.01	0.01	0.01
噪声图像 PSNR	20.1732	17.3404	13.8292	11.5	20.1728	17.4551	14.0574	11.7904	20.1419	20.0394	20.1325
本文方法 PSNR	26.6366	25.1416	22.5472	20.3807	22.8301	22.0497	20.6136	19.0025	30.4521	20.6508	23.1929
传统 Bayes 方法 PSNR	25.4191	23.6006	20.6824	18.5724	22.3625	21.3639	19.4970	17.7908	29.1033	20.0855	22.7731

表 4 方差 0.01 强度高斯白噪声下两种方法的去噪效果图



## 4.2 讨论

从表 3,4 可以看出,对于不同的测试图像和不同强度的噪声,本文所给出的方法无论从视觉效果还是 PSNR 均在一定程度上优于传统 Bayes 的去噪效果,且所提出方法的性能比较稳定。

相对于传统 Bayes 阈值去噪,本文方法在处理边缘和纹理较强的噪声图像时更显优势,这是因为对于高噪声污染的图像和多边缘、多纹理图像,经小波分解后最外层子带的系数将占据较高的能量。若按照逐点选择阈值的 Bayes 方法,很难区分高斯白噪声点和正常的大能量系数,不能较为准确地计算出原始信号的方差,进而影响阈值的确定,此时根据最外层的系数所计算的阈值容易将正常的信号去除;而本文方法则首先通过在次外层计算阈值,并寻找噪声点,再推测最外层的噪声点,这样就可以在一定程度上避免对最外“过扼杀”小波系数的现象。

在算法的时间复杂度方面,本文方法是由次外层的三个子带的噪声点推测最外层子系数的噪声点,且采用基于分块的阈值选取办法,因而使整幅图像 75% 的系数避免了逐点计算阈值,从而与传统的逐点计算阈值 Bayes 方法相比大大降低了计算复杂度。

**结束语** 本文对噪声图像细节子带中噪声小波系数的分布进行了研究,提出了一种基于细尺度间“类零树结构”的分布模型。同时对基于分块的 Bayes 阈值选取方法进行了研究,在其基础上提出了一种基于细尺度间小波系数相关性的图像去噪方法,该方法较传统的 Bayes 逐点阈值去噪法具有更好的去噪效果和更低的时间复杂度。

## 参考文献

[1] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal Spatial Adaptation by Wave-

let Shrinkage. Stanford University, CA, USA, 94305-4065

- [2] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal Spatial Adapt Shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994, 81: 425-455
- [3] Donoho D L, Johnstone I M, Kerkycharian G, et al. Wavelet shrinkage; asymptopia. *Journal of Royal Statistics Society Series*, 1995, 57: 301-369
- [4] Vidakovic B. *Statistical Modeling by Wavelets*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc, 1999
- [5] Liu Juan, Moulin P. Information-Theoretic Analysis of Interscale and Intrascale Dependencies Between Image Wavelet Coefficients. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10 (11): 1647-1658
- [6] 曲天书, 戴逸松, 王树勋. 基于 SURE 无偏估计的自适应小波阈值去噪. *电子学报*, 2002, 30 (2): 266-268
- [7] 谢杰成. 小波图像去噪综述. *中国图象图形学报*, 2002, 7A(3): 209-217
- [8] Blu T, Luisier F. The SURE-LET Approach to Image Denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, July 2007
- [9] Chang S G, Yu B, Vetterli M. Image Denoising via Lossy Compression and Wavelet Thresholding // *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, 1997, 1(11): 640-607
- [10] Abramovich F, Sapatinas T, Sliverman B W. Wavelet Thresholding via a Bayesian Approach. tech. rep. Bristol BS8 1TW, UK; Math Department, University of Bristol, Nov. 1996
- [11] 王红霞. 基于复数小波变换增强带噪图像的空间自适应方法. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2005, 9(9): 1911-1916
- [12] 张零霜. 非均匀噪声图像的小波去噪研究. 硕士研究生论文. 西安科技大学, 2005
- [13] Shapiro J M. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3445-3462