

# 直觉模糊映射的凸分析<sup>\*</sup>

梁家荣

(广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)

**摘要** 介绍了直觉模糊数和直觉模糊映射的凸性、凹性、拟凸性、拟凹性、上半连续性、下半连续性和正齐次性的定义。通过引入一种新的偏序关系来研究凸直觉模糊映射性质,对凸直觉模糊映射和凹直觉模糊映射分别建立了两个刻画定理。讨论了直觉模糊映射的凸性与拟凸性的关系,证明了一个凸直觉模糊映射必是一个拟凸直觉模糊映射和一个凹直觉模糊映射必是一个拟凹直觉模糊映射。考虑了直觉模糊映射的凸性与半连续性的关系,获得了直觉模糊映射的凸性与上半连续性(下半连续性)等价的条件。在直觉模糊算子方面,给出了正齐次直觉模糊映射是凸直觉模糊映射的充要条件及直觉模糊算子是凸直觉模糊映射的判别定理。拓展了经典集合上的凸函数和凸模糊映射的相关理论,使之成为直觉模糊理论的有益补充。

**关键词** 直觉模糊集,直觉模糊映射,凸分析,序关系

## Convexity Analysis on Intuitionistic Fuzzy Mappings

LIANG Jia-rong

(College of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract** We introduced the concepts of convexity, concavity, quasi-convexity, quasi-concavity, upper semicontinuity, lower semicontinuity and positive homogeneity for intuitionistic fuzzy mappings. A new partial ordering was employed to investigate the properties of convex intuitionistic fuzzy mappings, two characterizations for convex intuitionistic fuzzy mappings and two characterizations for concave fuzzy intuitionistic mappings were established. It discussed the relationship between convexity and quasi-convexity for intuitionistic fuzzy mappings, it is proved that a convex intuitionistic fuzzy mappings implies a quasi-convex intuitionistic fuzzy mappings and that a concave intuitionistic fuzzy mappings implies a quasi-concave intuitionistic fuzzy mappings. It considered the relationship between convexity and semicontinuity for intuitionistic fuzzy mappings, the sufficient and necessary condition of that the upper (lower) semicontinuity implies convexity for a intuitionistic fuzzy mapping is presented. On the operations of intuitionistic fuzzy mappings, the sufficient and necessary condition was obtained that an positively homogeneous intuitionistic fuzzy mapping implies a convex intuitionistic fuzzy mapping and it got the criteria that a operation of intuitionistic fuzzy mapping implies a convex intuitionistic fuzzy mappings. The notion expands the theories of convex fuzzy mappings and convex functions on ordinary sets to intuitionistic fuzzy mappings.

**Keywords** Intuitionistic fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy, Convex analysis, Ordering relationship

### 1 引言

如果说经典集合论为计算机技术的发展立下不朽功勋,那么模糊集合论则为智能信息处理和模糊控制学科提供了重要的理论基础。自从 Zaden 1965 年提出模糊集论后<sup>[1]</sup>,模糊集的理论和应用取得了巨大的成就。然而,由于一般的模糊集只用一个介于 $[0, 1]$ 之间的数  $\mu$  来表示一个对象隶属于某个集合的程度,它包含了支持和反对这一对象的程度,但却无法表达既不反对也不支持这一对象的中立情况,这给实际问题如投票模型、医疗诊断和多目标决策等的处理带来了困难。为此,1986 年 Atanassov 提出了所谓的直觉模糊集<sup>[2]</sup>。它用真隶属度和假隶属度两个量来描述一个对象和一个集合之间的隶属情况。后来,1993 年 Gau 和 Buehrer 定义了一个所谓的 Vague 集<sup>[3]</sup>。值得指出的是, Bustince 和 Burillo 在文献[4]中证明 Vague 集就是直觉模糊集。目前,直觉模糊集的

理论和应用已得到了较大的发展,如文献[5-7]研究了直觉模糊度量空间,文献[8-9]研究了直觉模糊拓扑空间,文献[10]研究了基于直觉模糊拓扑空间的滤子和网的问题,文献[11-12]研究了基于直觉模糊度理空间的不动点理论,文献[13-15]把直觉模糊集理论应用到多目标模糊决策中,文献[16-18]把直觉模糊集理论应用到相似度量和模式识别中。但与一般的模糊集相比,直觉模糊集还有许多不尽完善的地方,如在凸直觉模糊集映射方面的成果,目前尚少见文献报道。我们知道,凸性的概念对算法质与量的研究及在应用数学方面都是极为重要的。在最优化的研究中凸映射的应用也受到了人们广泛的重视,如文献[19]讨论了一般模糊非线性规划的凸分析方法,文献[20-22]定义了不同类型的凸模糊映射并应用到非线性规划中。在一般的模糊理论中,关于凸模糊映射的研究受到了人们越来越多的重视,并已取得了很多成果(见文献[23-26])。目前关于凸模糊映射的基本思想是

<sup>\*</sup>国家自然科学基金项目(批准号:60564001)和教育部“新世纪优秀人才支持计划”专项基金项目(NCET-06-0756)。梁家荣 教授,博士,主要研究方向为人工智能、Vague 集理论及应用。

通过所谓的模糊数的  $\alpha$ -水平截集产生的上确界和下确界而确定一闭区间,再由该闭区间来定义一个序,进而给出凸模糊映射的概念。在直觉模糊集中,由于运用了两个隶属度来描述对象与集合的关系,因而在研究其凸映射时相比较,就要困难得多。本文通过引进一种新序的定义及相应的加法运算,纯量与直觉模糊数的积运算,讨论凸直觉模糊映射的相关理论。把一般的凸模糊映射的相关结果推广到直觉模糊集理论中。

## 2 预备知识

考虑到本文的需要,先介绍一些相关概念和结论。

**定义 1**<sup>[2]</sup> 设  $X$  是一个集合,称  $A$  为  $X$  上的一个直觉模糊集,如果

$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle; x \in X \}$ , 其中  $\mu_A: X \rightarrow [0, 1], \nu_A: X \rightarrow [0, 1]$ , 且满足  $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, x \in X, \mu_A(x)$  称为  $x$  对  $A$  的真隶属度,  $\nu_A(x)$  称为  $x$  对  $A$  的假隶属度。

**定义 2** 设  $R$  表示实数集,称满足如下性质的序偶  $(\mu, \nu)$  为一直觉模糊数:

- 1)  $\mu: R \rightarrow [0, 1], \nu: R \rightarrow [0, 1]$ 。
- 2) 对于任意的  $x_1, x_2 \in R$ , 有  $\mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}$ ,  
 $\nu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{\nu(x_1), \nu(x_2)\}$ 。
- 3) 对于任意的  $x \in R$ , 有  $0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1$ 。
- 4) 存在  $x_0 \in R$  使得  $\mu(x_0) = 1, \nu(x_0) = 0$ 。
- 5)  $\mu(x), \nu(x)$  均为连续的。
- 6)  $\mu(x)$  和  $1-\nu(x)$  的支持集的闭集均是紧的。

记  $\Omega$  为所有直觉模糊数组成的集合。设  $A = (\mu, \nu) \in \Omega$  为一模糊数,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 定义如下的水平截集:

$$[\mu]_\alpha = \begin{cases} \{x \in R | \mu(x) \geq 1-\alpha\}, & 0 \leq \alpha < 1 \\ cl(\sup \mu), & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$[\nu]_\alpha = \begin{cases} \{x \in R | \nu(x) \leq \alpha\}, & 0 \leq \alpha < 1 \\ cl(\sup \nu), & \alpha = 1 \end{cases}$$

其中  $cl(\sup \eta)$  表示  $\eta$  的支持集的闭集。由文献[23]我们容易得到  $[\mu]_\alpha$  是一个闭区间  $[a^\alpha, b^\alpha]$ , 类似的我们可以证明  $[\nu]_\alpha$  也是一个闭区间  $[c^\alpha, d^\alpha]$ 。由于对于每个实数  $r \in R$  我们把它考虑成如下定义的一个直觉模糊数  $\bar{r} = (\mu_r, \nu_r)$

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} (1, 0), & t = r \\ (0, 1), & t \neq r \end{cases}$$

则  $R$  就可以嵌入在直觉模糊数集  $\Omega$  中。

**定义 3** 对于任意  $A, B \in \Omega, A = (\mu_A, \nu_A), B = (\mu_B, \nu_B)$ , 称  $A \leq B$ , 如果对于任意的  $\alpha \in [0, 1]$ , 有:  $a_1^\alpha \leq a_2^\alpha, b_1^\alpha \leq b_2^\alpha, c_1^\alpha \geq c_2^\alpha, d_1^\alpha \geq d_2^\alpha$ , 其中  $[\mu_A]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha], [\mu_B]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha], [\nu_A]_\alpha = [c_1^\alpha, d_1^\alpha], [\nu_B]_\alpha = [c_2^\alpha, d_2^\alpha]$ 。称  $A < B$ , 如果  $A \leq B$  且存在某个  $\alpha_0 \in [0, 1]$ , 使得下面的四个式子至少有一个成立:

$$a_1^{\alpha_0} < a_2^{\alpha_0}, b_1^{\alpha_0} < b_2^{\alpha_0}, c_1^{\alpha_0} > c_2^{\alpha_0}, d_1^{\alpha_0} > d_2^{\alpha_0}$$

说明 1: 不难看出, 上面定义的“ $\leq$ ”是  $\Omega$  上的一个偏序关系。

下面我们定义直觉模糊数集  $\Omega$  中的加法运算和数乘运算

**定义 4** 对于任意  $A, B, C \in \Omega, A = (\mu_A, \nu_A), B = (\mu_B, \nu_B), C = (\mu_C, \nu_C)$ , 称  $A + B = C$  如果  $\mu_C(t) = (\mu_A + \mu_B)(t) = \sup_{s \in R} \min\{\mu_A(s), \mu_B(t-s)\}, t \in R,$

$$\nu_C(t) = (\nu_A + \nu_B)(t) = \min_{s \in R} \sup\{\nu_A(s), \nu_B(t-s)\}, t \in R. \text{ 对}$$

于每个  $\lambda \geq 0$ , 称  $\lambda A = C$ , 如果当  $\lambda > 0$  时  $\mu_C(t) = \mu_A(\frac{t}{\lambda}), \nu_C(t) = \nu_A(\frac{t}{\lambda})$ , 而当  $\lambda = 0$  时  $\mu_C(t) = \lambda \mu_A(t) = 0, \nu_C(t) = 1 - \lambda \nu_A(t) = 1$ 。

如果  $[\mu_A]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha], [\nu_A]_\alpha = [c_1^\alpha, d_1^\alpha], [\mu_B]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha], [\nu_B]_\alpha = [c_2^\alpha, d_2^\alpha]$ , 直接计算可得,  $[\mu_{A+B}]_\alpha = [a_1^\alpha + a_2^\alpha, b_1^\alpha + b_2^\alpha], [\nu_{A+B}]_\alpha = [c_1^\alpha + c_2^\alpha, d_1^\alpha + d_2^\alpha], [\lambda \mu_A]_\alpha = [\lambda a_1^\alpha, \lambda b_1^\alpha], [\lambda \nu_A]_\alpha = [\lambda c_1^\alpha, \lambda d_1^\alpha]$ 。容易证明直觉模糊数集  $\Omega$  是凸集, 即  $\forall A, B \in \Omega, \lambda \in [0, 1]$ , 有  $\lambda A + (1-\lambda)B \in \Omega$ 。设  $U$  表示  $R$  上的一个向量空间,  $H$  是  $U$  的一个凸子集。

## 3 主要结果

### 3.1 直觉模糊映射的凸性和拟凸性

我们先给出直觉模糊映射的凸性和拟凸性的定义。

**定义 5** 定义在凸集  $H$  上的一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  称为是凸的, 如果  $\forall x, y \in H, \lambda \in [0, 1]$ , 有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \quad (1)$$

如果  $F$  是凸的, 且当  $x \neq y, \lambda \in (0, 1)$  时, 式(1)中的不等号是严格不等号, 则称  $F$  是严格凸的。

$F: H \rightarrow \Omega$  称为是凹的, 如果  $\forall x, y \in H, \lambda \in [0, 1]$ , 有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \quad (2)$$

如果  $F$  是凹的, 当  $x \neq y, \lambda \in (0, 1)$  时, 式(2)中的不等号是严格不等号, 则称  $F$  是严格凹的。

**定义 6** 定义在凸集  $H$  上的一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  称为是拟凸的, 如果  $\forall x, y \in H, \lambda \in (0, 1)$  有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{F(x), F(y)\} \quad (3)$$

如果  $F$  是拟凸的, 且当  $F(x) \neq F(y)$  时, 式(3)是严格不等式, 则称  $F$  是严格拟凸的。

称  $F$  是拟凹的, 如果

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{F(x), F(y)\} \quad (4)$$

如果  $F$  是拟凹的, 且当  $F(x) \neq F(y)$  时, 式(4)是严格不等式, 则称  $F$  是严格拟凹的。

**定理 1** 一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是凸的当且仅当  $\forall x, y \in H, \lambda \in (0, 1)$ , 对所有的满足  $F(x) < A, F(y) < B$  的  $\Omega$  中的  $A, B$  都有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda A + (1-\lambda)B \quad (5)$$

证明: 1) 必要性

若  $F: H \rightarrow \Omega$  是凸的。如果  $F(x) < A, F(y) < B, \lambda \in (0, 1)$ ,

记  $A = (\mu_A, \nu_A), B = (\mu_B, \nu_B), F(x) = (\mu_{F(x)}, \nu_{F(x)}), F(y) = (\mu_{F(y)}, \nu_{F(y)})$

$[\mu_{F(x)}]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha], [\nu_{F(x)}]_\alpha = [c_1^\alpha, d_1^\alpha], [\mu_{F(y)}]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha], [\nu_{F(y)}]_\alpha = [c_2^\alpha, d_2^\alpha]$ ,

$[\mu_A]_\alpha = [a_3^\alpha, b_3^\alpha], [\nu_A]_\alpha = [c_3^\alpha, d_3^\alpha], [\mu_B]_\alpha = [a_4^\alpha, b_4^\alpha], [\nu_B]_\alpha = [c_4^\alpha, d_4^\alpha]$ 。则对于每一个  $\alpha \in [0, 1]$ , 有

$$a_1^\alpha \leq a_3^\alpha, b_1^\alpha \leq b_3^\alpha, c_1^\alpha \geq c_3^\alpha, d_1^\alpha \geq d_3^\alpha$$

至少有一个  $\alpha_0 \in [0, 1]$ , 使得下面的四个式子至少有一个成立:

$$a_1^{\alpha_0} < a_3^{\alpha_0}, b_1^{\alpha_0} < b_3^{\alpha_0}, c_1^{\alpha_0} > c_3^{\alpha_0}, d_1^{\alpha_0} > d_3^{\alpha_0}$$

因而我们得到:

$$\lambda a_1^{\alpha_0} \leq \lambda a_3^{\alpha_0}, \lambda b_1^{\alpha_0} \leq \lambda b_3^{\alpha_0}, \lambda c_1^{\alpha_0} \geq \lambda c_3^{\alpha_0}, \lambda d_1^{\alpha_0} \geq \lambda d_3^{\alpha_0}$$

且下面的四个式子至少有一个成立:

$$\lambda a_1^{c_0} < \lambda a_3^{c_0}, \lambda b_1^{c_0} < \lambda b_3^{c_0}, \lambda c_1^{c_0} > \lambda c_3^{c_0}, \lambda d_1^{c_0} > \lambda d_3^{c_0}$$

同理我们可以得到

$$(1-\lambda)a_2^{c_0} \leq (1-\lambda)a_4^{c_0}, (1-\lambda)b_2^{c_0} \leq (1-\lambda)b_4^{c_0},$$

$$(1-\lambda)c_2^{c_0} \geq (1-\lambda)c_4^{c_0}, (1-\lambda)d_2^{c_0} \geq (1-\lambda)d_4^{c_0}$$

进一步得到

$$\lambda a_1^{c_0} + (1-\lambda)a_2^{c_0} \leq \lambda a_3^{c_0} + (1-\lambda)a_4^{c_0}, \lambda b_1^{c_0} + (1-\lambda)b_2^{c_0} \leq \lambda b_3^{c_0} + (1-\lambda)b_4^{c_0},$$

$$\lambda c_1^{c_0} + (1-\lambda)c_2^{c_0} \geq \lambda c_3^{c_0} + (1-\lambda)c_4^{c_0}, \lambda d_1^{c_0} + (1-\lambda)d_2^{c_0} \geq \lambda d_3^{c_0} + (1-\lambda)d_4^{c_0}$$

且下面的四个式子至少有一个成立

$$\lambda a_1^{c_0} + (1-\lambda)a_2^{c_0} < \lambda a_3^{c_0} + (1-\lambda)a_4^{c_0}, \lambda b_1^{c_0} + (1-\lambda)b_2^{c_0} < \lambda b_3^{c_0} + (1-\lambda)b_4^{c_0}, \lambda c_1^{c_0} + (1-\lambda)c_2^{c_0} > \lambda c_3^{c_0} + (1-\lambda)c_4^{c_0}, \lambda d_1^{c_0} + (1-\lambda)d_2^{c_0} > \lambda d_3^{c_0} + (1-\lambda)d_4^{c_0}$$

从而得到

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) < \lambda A + (1-\lambda)B$$

2)充分性

假设(5)成立。设  $x, y \in H, F(x) = (\mu_{F(x)}, \nu_{F(x)}), F(y) = (\mu_{F(y)}, \nu_{F(y)})$ , 对某个  $\alpha \in [0, 1]$ , 记  $[\mu_{F(x)}]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha], [\nu_{F(x)}]_\alpha = [c_1^\alpha, d_1^\alpha], [\mu_{F(y)}]_\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha], [\nu_{F(y)}]_\alpha = [c_2^\alpha, d_2^\alpha]$ 。对于任意的  $\epsilon > 0$ , 必存在直觉模糊数  $A(\epsilon) = (\mu_{A(\epsilon)}, \nu_{A(\epsilon)})$  和  $B(\epsilon) = (\mu_{B(\epsilon)}, \nu_{B(\epsilon)})$  使得

$$[\mu_{A(\epsilon)}]_\alpha = [a_1^\alpha + \epsilon, b_1^\alpha + \epsilon], [\nu_{A(\epsilon)}]_\alpha = [c_1^\alpha - \epsilon, d_1^\alpha - \epsilon]$$

$[\mu_{B(\epsilon)}]_\alpha = [a_2^\alpha + \epsilon, b_2^\alpha + \epsilon], [\nu_{B(\epsilon)}]_\alpha = [c_2^\alpha - \epsilon, d_2^\alpha - \epsilon]$  (这样的  $A(\epsilon)$  和  $B(\epsilon)$  是存在的。事实上, 只要取  $\mu_{A(\epsilon)}(t) = \mu_{F(x)}(t - \epsilon), \nu_{A(\epsilon)}(t) = \nu_{F(x)}(t + \epsilon), \mu_{B(\epsilon)}(t) = \mu_{F(y)}(t - \epsilon), \nu_{B(\epsilon)}(t) = \nu_{F(y)}(t + \epsilon)$  就可以了。)

显然有,  $F(x) < A(\epsilon), F(y) < B(\epsilon)$ , 对于  $\lambda \in (0, 1)$ , 由式(5)可得

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda A(\epsilon) + (1-\lambda)B(\epsilon)$$

$$\text{记 } F(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\mu, \nu), [\mu]_\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha], [\nu]_\alpha = [c_1^\alpha, d_1^\alpha]$$

从而得到

$$a_1^\alpha \leq \lambda a_1^\alpha + (1-\lambda)a_2^\alpha + \epsilon, b_1^\alpha \leq \lambda b_1^\alpha + (1-\lambda)b_2^\alpha + \epsilon, c_1^\alpha \geq \lambda c_1^\alpha + (1-\lambda)c_2^\alpha - \epsilon, d_1^\alpha \geq \lambda d_1^\alpha + (1-\lambda)d_2^\alpha - \epsilon$$

且存在某个  $\alpha_0 \in [0, 1]$  使得下述四个不等式中至少有一个是严格不等式

$$a_1^{\alpha_0} \leq \lambda a_1^{\alpha_0} + (1-\lambda)a_2^{\alpha_0} + \epsilon, b_1^{\alpha_0} \leq \lambda b_1^{\alpha_0} + (1-\lambda)b_2^{\alpha_0} + \epsilon,$$

$$c_1^{\alpha_0} \geq \lambda c_1^{\alpha_0} + (1-\lambda)c_2^{\alpha_0} - \epsilon, d_1^{\alpha_0} \geq \lambda d_1^{\alpha_0} + (1-\lambda)d_2^{\alpha_0} - \epsilon$$

由于  $\epsilon > 0$ , 因此

$$a_1^{\alpha_0} \leq \lambda a_1^{\alpha_0} + (1-\lambda)a_2^{\alpha_0}, b_1^{\alpha_0} \leq \lambda b_1^{\alpha_0} + (1-\lambda)b_2^{\alpha_0}$$

$$c_1^{\alpha_0} \geq \lambda c_1^{\alpha_0} + (1-\lambda)c_2^{\alpha_0}, d_1^{\alpha_0} \geq \lambda d_1^{\alpha_0} + (1-\lambda)d_2^{\alpha_0}$$

因此对任意的  $\lambda \in [0, 1]$  都有  $F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ 。综上所述, 直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是凸的。

**定理 2** 一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是凸的当且仅当集合

$$\Gamma_F = \{(x, T) : x \in H, F(x) < T\} \text{ 是一个凸集。}$$

证明: 由于

$$\lambda(x_1, T_1) + (1-\lambda)(x_2, T_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2)$$

另一方面,  $\Gamma_F = \{(x, T) : x \in H, F(x) < T\}$  是一个凸集当且仅当  $\forall x, y \in H, \lambda \in (0, 1)$ , 对所有的满足  $F(x_1) < T_1, F(x_2) < T_2$  的  $\Omega$  中的  $T_1, T_2$  都有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2. \text{ 由定理 1 得 } F \text{ 是凸}$$

的当且仅当集合  $\Gamma_F$  是一个凸集。

根据对偶性, 由定理 1 和定理 2 不难得到以下关于凹直觉模糊映射相关结论。

**定理 3** 一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是凹的当且仅当  $\forall x, y \in H, \lambda \in (0, 1)$ , 对所有的满足  $F(x) > A, F(y) > B$  的  $\Omega$  中的  $A, B$  都有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda A + (1-\lambda)B$$

**定理 4** 一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是凹的当且仅当集合

$$\Gamma_F = \{(x, T) : x \in H, F(x) > T\} \text{ 是一个凹集。}$$

**定理 5** 一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是凸的(凹的), 则  $F$  是拟凸的(拟凹的)

证明: 设直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是凸的, 则  $\forall x, y \in H, \lambda \in [0, 1]$ , 有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \leq \max\{F(x), F(y)\}$$

因此  $F$  是拟凸的。同理可以证明, 当  $F$  是凹的时,  $F$  也是拟凹的。

**定理 6** 一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是拟凸的当且仅当对每个  $A \in \Omega$ , 集合  $\Lambda_A = \{x : x \in H, F(x) \leq A\}$  是凸集。

证明: 1) 设  $F$  是拟凸的,  $x_1, x_2 \in \Lambda_A, \lambda \in [0, 1]$ , 则有

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{F(x_1), F(x_2)\} \leq A$$

因此  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Lambda_A$ , 所以,  $\Lambda_A = \{x : x \in H, F(x) \leq A\}$  是凸集。

2) 相反, 若对每个  $A \in \Omega$ , 集合  $\Lambda_A = \{x : x \in H, F(x) \leq A\}$  是凸集。

$\forall x, y \in H, \lambda \in [0, 1]$ , 不失一般性, 设  $F(y) \leq F(x) = A$ , 显然, 我们有  $x, y \in \Lambda_A$ , 所以  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Lambda_A$ , 从而有  $F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq A = \max\{F(x_1), F(x_2)\}$ , 即  $F$  是拟凸的。

**推论 1** 如果一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是凸的, 则对每个  $A \in \Omega$ , 集合  $\Lambda_A = \{x : x \in H, F(x) \leq A\}$  是凸集。

证明: 由定理 4 和定理 5 容易推得。

### 3.2 直觉模糊映射的凸性与半连续性

**定义 7** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射, 我们称  $F$  在点  $x_0 \in H$  是上半连续的, 如果对于任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得对于一切满足  $\|x - x_0\| < \delta, x \in H$  的  $x$  和  $\alpha \in [0, 1]$  都有

$$a_x^\alpha < a_{x_0}^\alpha + \epsilon, b_x^\alpha < b_{x_0}^\alpha + \epsilon, c_x^\alpha > c_{x_0}^\alpha - \epsilon, d_x^\alpha > d_{x_0}^\alpha - \epsilon$$

其中  $F(x) = (\mu_{F(x)}, \nu_{F(x)}), F(x_0) = (\mu_{F(x_0)}, \nu_{F(x_0)})$ ,

$$[\mu_{F(x)}]_\alpha = [a_x^\alpha, b_x^\alpha], [\nu_{F(x)}]_\alpha = [c_x^\alpha, d_x^\alpha], [\mu_{F(x_0)}]_\alpha = [a_{x_0}^\alpha, b_{x_0}^\alpha], [\nu_{F(x_0)}]_\alpha = [c_{x_0}^\alpha, d_{x_0}^\alpha]$$

我们称  $F$  在  $H$  上是上半连续的, 如果  $F$  在  $H$  上的每一点都是上半连续的。

**定义 8** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射, 我们称  $F$  在点  $x_0 \in H$  是下半连续的, 如果对于任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得对于一切满足  $\|x - x_0\| < \delta, x \in H$  的  $x$  和  $\alpha \in [0, 1]$  都有

$$a_x^\alpha < a_{x_0}^\alpha + \epsilon, b_x^\alpha < b_{x_0}^\alpha + \epsilon, c_x^\alpha > c_{x_0}^\alpha - \epsilon, d_x^\alpha > d_{x_0}^\alpha - \epsilon$$

其中  $F(x) = (\mu_{F(x)}, \nu_{F(x)}), F(x_0) = (\mu_{F(x_0)}, \nu_{F(x_0)})$ ,

$$[\mu_{F(x)}]_\alpha = [a_x^\alpha, b_x^\alpha], [\nu_{F(x)}]_\alpha = [c_x^\alpha, d_x^\alpha], [\mu_{F(x_0)}]_\alpha = [a_{x_0}^\alpha, b_{x_0}^\alpha], [\nu_{F(x_0)}]_\alpha = [c_{x_0}^\alpha, d_{x_0}^\alpha]$$

我们称  $F$  在  $H$  上是下半连续的, 如果  $F$  在  $H$  上的每一点都是下半连续的。

**引理 1** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射。如果存在  $\eta \in (0, 1)$  使得对所有的  $x, y \in H$  下式成立:

$$F(\eta x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\eta)F(y)$$

则集合  $M = \{\lambda \in [0, 1] \mid F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y), x, y \in H\}$  在  $[0, 1]$  中是稠密的。

证明方法类似文献[24]定理 2 的证明, 这里略。

**定理 7** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射在  $H$  上是下半连续的。如果存在  $\eta \in (0, 1)$  使得对所有的  $x, y \in H$  下式成立:

$$F(\eta x + (1-\lambda)y) \leq \eta F(x) + (1-\eta)F(y)$$

则  $F$  是  $H$  上的一个凸直觉模糊映射。

证明: 对于任意的  $x, y \in H, \lambda \in [0, 1]$ 。如果  $\lambda = 0$  或  $\lambda = 1$ , 显然有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

如果  $0 < \lambda < 1$ , 由引理 1 可知, 必存在  $M$  中的序列  $\{\lambda_n\}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$  且

$$F(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \leq \lambda_n F(x) + (1-\lambda_n)F(y)$$

此外由  $F$  在  $H$  上是上半连续的及当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\|(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) - (\lambda x + (1-\lambda)y)\| \rightarrow 0$$

对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在充分大的正整数  $N$ , 使得对于每一个  $\alpha \in [0, 1]$  有

$$a_0^\alpha < \lambda_n a_x^\alpha + (1-\lambda_n)a_y^\alpha + \varepsilon, b_0^\alpha < \lambda_n b_x^\alpha + (1-\lambda_n)b_y^\alpha + \varepsilon,$$

$$c_0^\alpha > \lambda_n c_x^\alpha + (1-\lambda_n)c_y^\alpha - \varepsilon, d_0^\alpha > \lambda_n d_x^\alpha + (1-\lambda_n)d_y^\alpha - \varepsilon$$

其中

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\mu_\alpha, \nu_\alpha), [\mu_\alpha]_a = [a_0^\alpha, b_0^\alpha], [\nu_\alpha]_a = [c_0^\alpha, d_0^\alpha]$$

$$F(x) = (\mu_x, \nu_x), [\mu_x]_a = [a_x^\alpha, b_x^\alpha], [\nu_x]_a = [c_x^\alpha, d_x^\alpha]$$

$$F(y) = (\mu_y, \nu_y), [\mu_y]_a = [a_y^\alpha, b_y^\alpha], [\nu_y]_a = [c_y^\alpha, d_y^\alpha]$$

由  $\varepsilon$  的任意性及  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ , 我们得到

$$a_0^\alpha \leq \lambda a_x^\alpha + (1-\lambda)a_y^\alpha, b_0^\alpha \leq \lambda b_x^\alpha + (1-\lambda)b_y^\alpha,$$

$$c_0^\alpha \geq \lambda c_x^\alpha + (1-\lambda)c_y^\alpha, d_0^\alpha \geq \lambda d_x^\alpha + (1-\lambda)d_y^\alpha$$

从而我们得到

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

所以  $F$  是  $H$  上的一个凸直觉模糊映射。

**推论 2** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射在  $H$  上是下半连续的。如果存在  $\eta \in (0, 1)$  使得对所有的  $x, y \in H$ , 及满足  $A, B \in \Omega, F(x) < A, F(y) < B$  的  $A, B$ , 下式成立:

$$F(\eta x + (1-\eta)y) < \eta A + (1-\eta)B$$

则  $F$  是  $H$  上的一个凸直觉模糊映射。

证明: 与定理 1 的充分性的证明类似, 容易得到下式成立:

$$F(\eta x + (1-\eta)y) \leq \eta F(x) + (1-\eta)F(y)$$

进而由定理 5 可得  $F$  是  $H$  上的一个凸直觉模糊映射。

**定理 8** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射在  $H$  上是上半连续的, 如果存在  $\eta \in (0, 1)$  使得对所有的  $x, y \in H$  下式成立:

$$F(\eta x + (1-\lambda)y) \leq \eta F(x) + (1-\eta)F(y)$$

则  $F$  是  $H$  上的一个凸直觉模糊映射。

证明: 对于任意的  $x, y \in H, \lambda \in [0, 1]$ 。如果  $\lambda = 0$  或  $\lambda = 1$ , 显然有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

如果  $0 < \lambda < 1$ , 由引理 1 可知, 必存在  $M$  中的序列  $\{\lambda_n\}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$  且

$$F(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \leq \lambda_n F(x) + (1-\lambda_n)F(y)$$

$$\text{令 } y_n = \frac{[(\lambda - \lambda_n)x + (1-\lambda)y]}{(1-\lambda_n)}$$

显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , 记  $F(y_n) = [\mu_n, \nu_n], [\mu_n]_a = [a_n^\alpha, b_n^\alpha],$

$$[\nu_n]_a = [c_n^\alpha, d_n^\alpha]$$

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\mu_\alpha, \nu_\alpha), [\mu_\alpha]_a = [a_0^\alpha, b_0^\alpha], [\nu_\alpha]_a = [c_0^\alpha, d_0^\alpha]$$

$$F(x) = (\mu_x, \nu_x), [\mu_x]_a = [a_x^\alpha, b_x^\alpha], [\nu_x]_a = [c_x^\alpha, d_x^\alpha]$$

$$F(y) = (\mu_y, \nu_y), [\mu_y]_a = [a_y^\alpha, b_y^\alpha], [\nu_y]_a = [c_y^\alpha, d_y^\alpha]$$

此外由  $F$  在  $H$  上是上半连续的, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在充分大的正整数  $N$ , 使得对于每一个  $\alpha \in [0, 1]$  有

$$a_n^\alpha < a_y^\alpha + \varepsilon, b_n^\alpha < b_y^\alpha + \varepsilon,$$

$$c_n^\alpha > c_y^\alpha - \varepsilon, d_n^\alpha > d_y^\alpha - \varepsilon$$

(6)

由于  $x, y_n \in H$ , 因此我们有

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = F(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y_n) \leq \lambda_n F(x) + (1-\lambda_n)F(y_n)$$

所以

$$a_0^\alpha \leq \lambda_n a_x^\alpha + (1-\lambda_n)a_n^\alpha, b_0^\alpha \leq \lambda_n b_x^\alpha + (1-\lambda_n)b_n^\alpha,$$

$$c_0^\alpha \geq \lambda_n c_x^\alpha + (1-\lambda_n)c_n^\alpha, d_0^\alpha \geq \lambda_n d_x^\alpha + (1-\lambda_n)d_n^\alpha$$

由式(6)我们得到

$$a_0^\alpha < \lambda_n a_x^\alpha + (1-\lambda_n)a_y^\alpha + (1-\lambda_n)\varepsilon, b_0^\alpha < \lambda_n b_x^\alpha + (1-\lambda_n)b_y^\alpha + (1-\lambda_n)\varepsilon,$$

$$c_0^\alpha > \lambda_n c_x^\alpha + (1-\lambda_n)c_y^\alpha - (1-\lambda_n)\varepsilon, d_0^\alpha > \lambda_n d_x^\alpha + (1-\lambda_n)d_y^\alpha - (1-\lambda_n)\varepsilon$$

由  $\varepsilon$  的任意性及  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ , 我们得到

$$a_0^\alpha \leq \lambda a_x^\alpha + (1-\lambda)a_y^\alpha, b_0^\alpha \leq \lambda b_x^\alpha + (1-\lambda)b_y^\alpha$$

$$c_0^\alpha \geq \lambda c_x^\alpha + (1-\lambda)c_y^\alpha, d_0^\alpha \geq \lambda d_x^\alpha + (1-\lambda)d_y^\alpha$$

从而我们得到

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

所以  $F$  是  $H$  上的一个凸直觉模糊映射。

**推论 3** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射在  $H$  上是上半连续的。如果存在  $\eta \in (0, 1)$  使得对所有的  $x, y \in H$ , 及满足  $A, B \in \Omega, F(x) < A, F(y) < B$  的  $A, B$ , 下式成立:

$$F(\eta x + (1-\eta)y) < \eta A + (1-\eta)B$$

则  $F$  是  $H$  上的一个凸直觉模糊映射。

证明: 与推论 1 的证明类似(略)。

### 3.3 直觉模糊映射算子

**定义 9** 一个直觉模糊映射  $F: H \rightarrow \Omega$  是称为正齐次的, 如果

$$F(kx) = kF(x), x \in H, k \in (0, +\infty)$$

从定义立即可以证明

**定理 9** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射, 则  $F$  是正齐次的当且仅当对每个  $\alpha \in [0, 1], [\mu(x)]_a$  和  $[\nu(x)]_a$  是正齐次的, 其中  $F(x) = (\mu(x), \nu(x)) \in \Omega$ 。

**定理 10** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射, 则正齐次直觉模糊映射  $F$  是凸的当且仅当对所有的  $x, y \in H$ , 有

$$F(x+y) \leq F(x) + F(y)$$

证明: 若正齐次直觉模糊映射  $F$  是凸的, 则对于任意的  $x, y \in H$

$$F(x+y) = F(2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)) = 2F(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq$$

$$2 \times \frac{1}{2}F(x) + 2 \times \frac{1}{2}F(y) = F(x) + F(y)$$

反之, 对于正齐次直觉模糊映射  $F$ , 如果对所有的  $x, y \in H$ , 有

$$F(x+y) \leq F(x) + F(y)$$

(下转第 299 页)

- [4] 古天龙, 蔡国勇. 网络协议的形式化分析与设计. 电子工业出版社[M], 2003
- [5] Holzmann G. The SPIN model checker. Pearson Publishing House[M/CD], 2003
- [6] Cobleigh J M, Clarke L A, Osterweil L J. FLAVERS: A finite state verification technique for software systems[J]. IBM Systems Journal, 2002, 41(1): 140-165
- [7] Dwyer M B, Clarke L A, Naumovich G. Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Software Systems [J]. ACM TOSEM, 2004, 13(4): 359-430
- [8] Havelund K, Pressburger T. Model Checking Java Programs Using

Java PathFinder[J/OL]. Journal on STTT, December 1998[2007-8-3]. <http://citeseer.ist.psu.edu/havelund98model.html>

- [9] Visser W, Havelund K, Brat G, et al. Java PathFinder - Second Generation of a Java Model Checker[C/OL]// Proc. of Post-CAV Workshop on Advances in Verification. Chicago, July 2000 [2007-8-3]. <http://citeseer.ist.psu.edu/visser00java.html>
- [10] Esparza J, Heljanko K. Implementing LTL model checking with net unfoldings[C]. New York: Springer-Verlag, Inc, 2001: 37-56
- [11] Bodden E. A lightweight LTL runtime verification tool for java [C]. New York: ACM Press, 2004: 306-307
- [12] 林惠民, 张文辉. 模型检测: 理论、方法与应用[J]. 电子学报, 2002, 30(12A): 1907-1912

(上接第 151 页)

则

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq F(\lambda x) + F((1-\lambda)y) = \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

从而  $F$  是凸的。

**定理 11** 设  $F: H \rightarrow \Omega$  是一个直觉模糊映射, 则  $F$  是凸的当且仅当对于任意的  $x, y \in H$

$$\varphi(\lambda) = F(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

是  $[0, 1]$  上的凸直觉模糊映射。

证明: 若  $\varphi(\lambda)$  是  $[0, 1]$  上的凸直觉模糊映射, 则对于任意的  $x, y \in H, \lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \varphi(\lambda) \\ &= \varphi(\lambda 1 + (1-\lambda)0) \\ &\leq \lambda \varphi(1) + (1-\lambda)\varphi(0) \\ &= \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \end{aligned}$$

因此  $F$  是凸的。

反之, 若  $F$  是凸的, 则对于任意的  $x, y \in H, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], k \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \varphi(k\lambda_1 + (1-k)\lambda_2) &= F((k\lambda_1 + (1-k)\lambda_2)x + (1-k\lambda_1 - (1-k)\lambda_2)y) \\ &= F(k(\lambda_1 x + (1-\lambda_1)y_2) + (1-k)(\lambda_2 x + (1-\lambda_2)y)) \\ &\leq kF(\lambda_1 x + (1-\lambda_1)y_2) + (1-k)F(\lambda_2 x + (1-\lambda_2)y) \\ &= k\varphi(\lambda_1) + (1-k)\varphi(\lambda_2) \end{aligned}$$

因此  $\varphi(\lambda)$  是  $[0, 1]$  上的直觉模糊凸映射。

**结束语** 在本文中, 我们得到了刻画凸直觉模糊映射的充要条件, 给出了具有上半连续性(下半连续性)直觉模糊映射是凸直觉模糊映射的充要条件, 获得了直觉模糊算子与凸性之间的关系相关性质。这些结论很容易推广到直觉模糊映射的广义凸性, 如直觉模糊映的  $b$ -vexity, Preinvexity,  $\varphi_1$ -convexity 等。由于直觉模糊数空间不构成任何线性空间, 因此我们不能用通常的方法给出直觉模糊映射的可微性的相关理论, 进而把本文的相关结果应用到直觉模糊非线性规划的研究中, 这也是我们下一步所要研究的课题。

## 参考文献

- [1] Zaden L A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8: 338-353
- [2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy sets and systems, 1986, 20: 87-96
- [3] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets. IEEE Trans. On Systems Man and Cybernet, 1993, 23(2): 610-614
- [4] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy sets and system, 1966, 79: 403-405
- [5] Park J H. Intuitionistic fuzzy metric spaces. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22: 1039-1048
- [6] Gregori V, Romiguera S, veeramari P. A note on intuitionistic fuzzy

metric spaces. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 28: 902-905

- [7] Reza, Saadati. Notes to the paper "Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces" and its generalization to-fuzzy metric space. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 28
- [8] Coker D. An introduction to intuitionistic fuzzy topological space. Fuzzy sets and systems, 1997, 88: 81-89
- [9] Saadati R, Park J H. On the intuitionistic fuzzy topological spaces. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27: 331-334
- [10] Lupianez F G. Nets and filters in intuitionistic fuzzy topological spaces. Information Science, 2006, 176: 2396-2404
- [11] Razani A. Existence of fixed point for the nonexpansive mapping of intuitionistic fuzzy metric spaces. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30: 367-373
- [12] Mohamed A. Fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30
- [13] Hong D H, Choi C H. Multicriteria fuzzy decision making problems based on vague set theory. Fuzzy sets and systems, 2000, 114: 103-113
- [14] Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision-making based on vague set theory. Fuzzy sets and systems, 1994, 67: 163-172
- [15] Lin L, Yuan Y H, Xia Z Q. Multicriteria fuzzy decision-making based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Computer and system Science, 2007, 73: 84-88
- [16] Chen S M. Similarity measures between vague sets and between elements. IEEE Trans. System Man and Cybernet, 1997, 27(1): 153-158
- [17] Dengfeng L, Chuntian C. New similarity measure of intuitionistic fuzzy sets nad application to pattern recognitions. Pattern Recognition Letters, 2002, 23: 221-225
- [18] Li Y, Olson D L, Qin Z. Similarity measures between intuitionistic fuzzy (vague) sets: A comparative analysis. Pattern Recognition Letters, 2006
- [19] Ammar E, Metz J. On fuzzy convexity and parametric fuzzy optimization. Fuzzy sets and systems, 1992, 49: 135-141
- [20] Furukawa N. Convexity and local Lipschitz continuity of fuzzy-value mappings. Fuzzy sets and systems, 1998, 93: 113-119
- [21] Li D. Properties of B-Vex fuzzy mappings and applications to fuzzy optimization. Fuzzy sets and systems, 1998, 94: 253-260
- [22] Noor M A. Fuzzy preinvex functions. Fuzzy sets and systems, 1994, 79: 95-104
- [23] Nanda S, Kar K. Convex fuzzy mappings. Fuzzy sets and systems, 1992, 48: 129-132
- [24] Yang X M. A characterization of convex function. Applied Mathematics letters, 2000, 13(1): 27-30
- [25] Yan H, Xu J. A class of convex fuzzy mappings. Fuzzy sets and systems, 2002, 129: 47-56
- [26] Syau Y. Invex and generalized convex fuzzy mappings. Fuzzy sets and systems, 2000, 115: 455-461