基于布尔矩阵的模糊粗糙集代数运算与表示定理*)

张晓如　张再跃

(江苏科技大学电子信息学院　江苏镇江 212003)

摘　要　主要研究模糊粗糙集理论基本概念与基本运算的矩阵表示,用布尔矩阵对模糊粗糙集理论中的基本概念进行描述,并通过布尔矩阵运算性质研究、揭示和刻画模糊粗糙集知识空间的基本代数性质。文中定义了布尔矩阵"与积"和"或积"两种逻辑运算,分别对模糊粗糙集理论中的模糊可能(fuzzy diamond)算子和模糊必然(fuzzy box)算子计算过程进行描述,对模糊粗糙集理论的基本概念和基本代数性质给出了基于布尔矩阵的表示定理,为基于模糊粗糙集理论的知识表示与知识获取提供了一种能行与可计算的思路与方法。

关键词　粗糙集,特征矩阵,逻辑运算,信息系统

Algebraic Operations and Representing Theorems of Fuzzy Rough Sets Based on Boolean Matrix

ZHANG Xiao-ru　ZHANG Zai-yue

(School of Electronics and Information,Jiangsu University of Sci. &Tech. ,Zhenjiang,Jiangsu 212003,China)

Abstract　This paper studies the matrix representations of the basic notations and operations in the Fuzzy Rough Sets. In order to give out a complete matrix description of the fuzzy rough set, two kind of operations called "and-product" and "or-product" between the Boolean matrixes are introduced, which corresponds separately to the notation of the fuzzy diamond and that of the fuzzy box. Based on the Boolean matrix operations, the representation theorems about the basic notations and algebraic properties of the fuzzy rough sets are proved.

Keywords　Fuzzy set, Rough set, Fuzzy rough set, Boolean matrix, Representation theorem

1　引言

粗糙集(Rough Sets)理论是由波兰学者 Pawlak 教授在20世纪80年代提出的研究不完整、不确定知识和数据的表达、学习、归纳的理论方法[1],已成为目前知识工程研究领域一种有效的数学工具,并在模式识别、机器学习、决策支持、过程控制、预测建模等许多科学与工程领域得到成功的应用[2]。为了更加客观和全面地反映现实中存在的各种概念,20世纪90年代人们将模糊思想引入粗糙集研究中,提出了模糊粗糙集理论。如果说粗糙集理论着眼于集合的粗糙程度,是基于集合中对象的不可分辨的思想,其计算方法是知识的表达与简化,那么模糊理论则着眼于集合的模糊性,并由此建立相关集合子集边缘的病态定义模型,其计算方法主要是连续特征函数的产生[3]。两者都是经典集合论的推广,都可利用观察、测试数据表达知识和进行推理。从模糊粗糙集理论基本模型的建立[4]到后来的各种广义模糊粗糙集理论、公理化的模糊粗糙集理论的研究[5-7],以及在两个论域的范畴下进行的探索[8,9],已经使模糊粗糙集理论的发展达到了一个相对完善的状态,并在诸多领域得到实际应用,对此,文献[10]给出了较为系统的阐述。

粗糙集理论对知识进行了形式化定义,为知识处理提供了一套严密的分析工具,但在代数表示下,粗糙集理论的本质不易被理解,相关计算的表示与运行也较为复杂,特别是将模糊思想引入粗糙集理论后,上述问题尤为突出,对此人们做了许多有益探索。如为寻找高效的知识约简算法,将粗糙集理论中概念与运算用信息的概念加以表示,研究信息和代数两种不同表示下的关系性质等等[11]。值得一提的是,矩阵理论作为一种基本的数学工具,在基于粗糙集理论的知识表示与知识获取研究方面得到广泛运用并取得成果,如运用矩阵方法描述信息系统属性间的依赖关系[12],分析和研究不同情况下知识属性的约简方法[13-15];通过矩阵运算对基于等价关系的知识基中对象集的上、下近似算子进行表述,分析和研究粗糙集的基本性质[16];定义特征矩阵的"与积"和"或积"等逻辑运算,针对完备信息系统与不完备信息系统的特点,给出不同关系下对象集的上、下近似集和对象关系类的特征矩阵表示定理等等[17]。这些工作,不仅为人们认识和理解粗糙集理论的基本概念提供了方法,也为提高基于粗糙集理论的知识表示与推理的能行性建立了基础。

本文是矩阵论的思想与方法在粗糙集理论中应用的进一步研究,研究内容推广至模糊粗糙集。第2节简单介绍粗糙集向模糊粗糙集推广的基本思想和与之相关的基本概念;第3节介绍布尔代数的基本性质,引入布尔矩阵概念,定义布尔矩阵运算并分析运算的基本性质;第4节用布尔矩阵对模糊粗糙集理论中的基本概念进行描述,给出并证明模糊粗糙集的布尔矩阵表示定理,通过布尔矩阵运算揭示和刻画模糊粗糙集的基本代数性质;最后为本文小结。

2　模糊粗糙集基本概念与基本代数性质

粗糙集理论研究的基本内容是基于属性特征的知识与信息系统,其代数结构的基本表示形式是一知识基 $K=\langle U,R\rangle$,

*)国家自然科学基金项目(No. 60573064)资助。张晓如　副教授,主要研究方向为智能信息处理、基础数学;张再跃　教授,主要研究方向为理论计算机科学、智能信息处理。

其中U为论域，R为U上的关系，它的最基本情形是依据对象的属性值对论域U的一种划分，称为U上的不分明关系，是粗糙集理论的一个关键概念。粗糙集理论的精华部分是利用R定义了$P(U)$上上近似算子R^*和下近似算子R_*的概念，即对任意集合$X\in P(U)$，

$$R_*(X)=\{x|(x\in U\wedge[x]_R\subseteq X)\}$$

$$R^*(X)=\{x|(x\in U\wedge[x]_R\cap X\neq\phi)\}$$

其中，$[x]_R=\{y|(x,y)\in R\}$是x关于R所在的等价类。与此相比，模糊粗糙集的不同之处在于：①被近似对象由经典集合X换为模糊集，由此产生粗糙模糊集(rough fuzzy set)的概念；②等价关系R推广为模糊关系，由此产生模糊粗糙集(fuzzy rough set)的概念。模糊粗糙集泛指由上述推广而产生的概念。对此，文献[18]给出了详细描述。与此同时，文献[18]还分别针对粗糙集理论中的上近似和下近似算子，定义了一般意义下的模糊必然(fuzzy box)与模糊可能(fuzzy diamond)算子，并对有关性质进行了系统讨论。我们在给出模糊粗糙集的基本概念与基本性质前，先简要回顾一下有关模糊集与模糊关系的基本概念。

2.1 模糊集与模糊关系的基本概念

设U是论域，$[0,1]$表示所有满足$0\leqslant r\leqslant 1$的实数r组成的集合。函数$F:U\to[0,1]$称为U上的模糊集。我们用U和ϕ分别表示U上的模糊全集(universal fuzzy set)和模糊空集(empty fuzzy set)，即对任意$x\in U$有$U(x)=1$和$\phi(x)=0$。对任意U上的模糊集F和G，如果满足$\forall x(x\in U\to F(x)\leqslant G(x))$，则称$F$是$G$的模糊子集，记为$F\subseteq G$。$U$上模糊集的交($\cap$)、并($\cup$)、补($-$)运算采用通常定义，即对任意U上的模糊集F和G，以及任意$x\in U$，有

$$(F\cap G)(x)=_{def}\min(F(x),G(x))$$

$$(F\cup G)(x)=_{def}\max(F(x),G(x))$$

$$\overline{F}(x)=_{def}1-F(x)$$

函数$S:U\times U\to[0,1]$称为U上的模糊关系。对任意U上的模糊关系S,G，运算$S\cap G$，$S\cup G$和$\overline{S}$的定义与模糊集的相同。论域U上的关系性质直接影响着关于U的近似空间的代数性质。对模糊关系的关系性质，我们有如下定义：

定义 2.1[18] 设U是论域，$S,G:U\times U\to[0,1]$是U上的模糊关系。模糊关系的有关性质定义如下：

(1) S称为是U上的自反关系，当且仅当$\forall x(x\in U\to S(x,x)=1)$；

(2) S称为是U上的对称关系，当且仅当$\forall x\forall y(x,y\in U\to S(x,y)=S(y,x))$；

(3) S称为是U上的传递关系，当且仅当

$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in U\to\min(S(x,y),S(y,z))\leqslant S(x,z))$；

(4) S称为是U上的容差关系，当且仅当S是自反和对称的；

(5) S称为是U上的等价关系，当且仅当S是自反、对称和传递的；

(6) S和G的合成，记为$S\circ G$，满足对任意$x,y\in U$，

$(S\circ G)(x,y)=\mathrm{Sup}\{\min(S(x,z),G(z,y))|z\in U\}$；

(7) 记$S^{n+1}=S\circ S^n$，定义关系S^*，满足对任意$x,y\in U$，

$S^*(x,y)=_{def}\mathrm{Sup}\{S^n(x,y)|n>0\}$。

2.2 模糊粗糙集及其基本代数性质

定义 2.2[18] 设U是论域，$F:U\to[0,1]$是U上的模糊集，$S:U\times U\to[0,1]$是U上的模糊关系。模糊集F关于模糊关系S的模糊必然集记为$[S]F$，模糊可能集记为$\langle S\rangle F$，分别定义如下：

$$([S]F)(x)=_{def}\mathrm{Inf}\{\max(1-S(x,y),F(y))|y\in U\}$$

$$(\langle S\rangle F)(x)=_{def}\mathrm{Sup}\{\min(S(x,y),F(y))|y\in U\}$$

下面命题给出模糊粗糙集的基本代数性质：

定理 2.1 设U是论域，对任意U上的模糊关系$S:U\times U\to[0,1]$和任意U上的模糊集$F,G:U\to[0,1]$，下列基本性质成立：

(1) $[S]F=\overline{\langle S\rangle\overline{F}}$；

(2) $F\subseteq G\to[S]F\subseteq[S]G\wedge\langle S\rangle F\subseteq\langle S\rangle G$；

(3) $[S](F\cap G)=[S]F\cap[S]G$；

(4) $[S](F\cup G)\supseteq[S]F\cup[S]G$；

(5) $\langle S\rangle(F\cup G)=\langle S\rangle F\cup\langle S\rangle G$；

(6) $\langle S\rangle(F\cap G)\subseteq\langle S\rangle F\cap\langle S\rangle G$；

(7) $[S]U=U\wedge\langle S\rangle\phi=\phi$。

定理 2.2 设U是论域，$F:U\to[0,1]$是U上的模糊集，$S,G:U\times U\to[0,1]$是U上的模糊关系，则有

(1) $[S\cup G]F=[S]F\cap[G]F$；

(2) $\langle S\cup G\rangle F=\langle S\rangle F\cup\langle G\rangle F$；

(3) $[S\circ G]F=[S][G]F$；

(4) $\langle S\circ G\rangle F=\langle S\rangle\langle G\rangle F$；

(5) $[S^*]F=F\cap[S][S^*]F$；

(6) $\langle S^*\rangle F=F\cup\langle S\rangle\langle S^*\rangle F$。

定理 2.3 设U是论域，$F:U\to[0,1]$是U上的模糊集，$S:U\times U\to[0,1]$是U上的模糊关系。如果S是等价关系，则有

(1) $[S]F\subseteq F\subseteq\langle S\rangle F$；

(2) $[S]F=[S][S]F$；

(3) $\langle S\rangle F=\langle S\rangle\langle S\rangle F$；

(4) 如果$\forall x\forall y(x,y\in U\to\max(S(x,y),1-S(x,y))\geqslant F(x))$，则有$\langle S\rangle F=[S]\langle S\rangle F$；

(5) 如果$\forall x\forall y(x,y\in U\to\min(S(x,y),1-S(x,y))\leqslant F(x))$，则有$[S]F=\langle S\rangle[S]F$。

3 布尔矩阵的逻辑运算与基本性质

布尔代数是人们非常熟悉的代数系统。设$[0,1]$是所有满足$0\leqslant r\leqslant 1$的实数r组成的集合，定义$[0,1]$上的运算$\wedge$(下确界)、$\vee$(上确界)、$^-$(补)满足对任意$a,b\in[0,1]$，$a\wedge b=\min(a,b)$，$a\vee b=\max(a,b)$，$\overline{a}=1-a$，则$\langle[0,1],\wedge,\vee,^-\rangle$是一布尔代数。以$\wedge$、$\vee$、$^-$作为基本代数运算，我们把定义在$[0,1]$上的矩阵称为布尔矩阵(简称矩阵)。本节将以此为基础，建立布尔矩阵间的逻辑运算，并对运算的性质进行分析。

定义 3.1 设$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$是两个$m\times n$布尔矩阵，则$m\times n$布尔矩阵$C=(a_{ij}\wedge b_{ij})$称为A和B的交，记为$A\wedge B$；$m\times n$布尔矩阵$C=(a_{ij}\vee b_{ij})$称为A和B的并，记为$A\vee B$，$m\times n$布尔矩阵$C=(\overline{a}_{ij})$称为A的补，记为$\overline{A}$。

性质 3.1 对任意$m\times n$特征矩阵$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$和$C=(c_{ij})$，有如下性质成立：

(1) $A\wedge A=A$，$A\vee A=A$；

(2) $A\wedge B=B\wedge A$，$A\vee B=B\vee A$；

(3) $A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$，$A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$；

(4) $\overline{A\wedge B}=\overline{A}\vee\overline{B}$，$\overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B}$。

定义 3.2 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 分别是两个 $m\times p$ 和 $p\times n$ 布尔矩阵。如果 $m\times n$ 布尔矩阵 $C=(c_{ij})$ 满足 $c_{ij}=(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee\cdots\vee(a_{ip}\wedge b_{pj})$(记为 $\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}\wedge b_{kj})$),则称 C 为 A 和 B 的与积,记为 $C=A\otimes B$。

定义 3.3 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 分别是两个 $m\times p$ 和 $p\times n$ 布尔矩阵。如果 $m\times n$ 布尔矩阵 $C=(c_{ij})$ 满足 $c_{ij}=(a_{i1}\vee b_{1j})\wedge\cdots\wedge(a_{ip}\vee b_{pj})$(记为 $\prod_{k=1}^{p}(a_{ik}\vee b_{kj})$),则称 C 为 A 和 B 的或积,记为 $C=A\oplus B$。

注记:布尔矩阵的"与积"和"或积"是我们定义的两个十分重要的布尔矩阵运算,在模糊粗糙集的表示中,它们分别与模糊集的上近似(即模糊可能集)和下近似(即模糊必然集)密切相关。不难验证,它们具有如下的运算性质。

性质 3.2 对任意 $m\times p$ 布尔矩阵 $A=(a_{ij})$,$p\times n$ 布尔矩阵 $B=(b_{ij})$ 和 $n\times k$ 布尔矩阵 $C=(c_{ij})$,有如下性质成立:

(1) $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$,$A\oplus(B\oplus C)=(A\otimes B)\oplus C$;

(2) $\overline{A\otimes B}=\bar{A}\oplus\bar{B}$,$\overline{A\oplus B}=\bar{A}\otimes\bar{B}$。

性质 3.3 对任意 $m\times p$ 布尔矩阵 $A=(a_{ij})$,$p\times n$ 布尔矩阵 $B=(b_{ij})$ 和 $C=(c_{ij})$,有如下性质成立:

(1) $A\oplus(B\wedge C)=(A\oplus B)\wedge(A\oplus C)$;

(2) $A\oplus(B\vee C)\geqslant(A\oplus B)\vee(A\oplus C)$;

(3) $A\otimes(B\vee C)=(A\otimes B)\vee(A\otimes C)$;

(4) $A\otimes(B\wedge C)\leqslant(A\otimes B)\wedge(A\otimes C)$。

4 布尔矩阵运算与粗糙集基本代数性质的刻画

从本节开始我们将用布尔矩阵对模糊粗糙集理论中的基本概念进行描述,文中的布尔矩阵用黑体英文字母表示。设 $K=\langle U,S\rangle$ 是一知识基,其中 $U=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是知识基 K 的论域,S 是 U 上的模糊关系。

定义 4.1 如果布尔矩阵 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{n\times n}$ 满足 $s_{ij}=\boldsymbol{S}(e_i,e_j)$,则 S 称为 U 上模糊关系 S 的布尔矩阵。

定义 4.2 设 F 是 U 上的模糊子集,则 $n\times 1$ 布尔矩阵 $\boldsymbol{F}=(F(e_1),\cdots,F(e_n))'$ 称为 F 的布尔矩阵(或布尔向量),其中 $(x_1,\cdots,x_n)'$ 表示 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的转置。

在基于模糊关系 S 的模糊粗糙集理论中,模糊必然算子 $[S]$ 和模糊可能算子 $\langle S\rangle$ 扮演着极其重要的角色。对任意 U 上的模糊集 F,用 $\langle\boldsymbol{S}\rangle\boldsymbol{F}$ 和 $[\boldsymbol{S}]\boldsymbol{F}$ 分别表示 $\langle S\rangle F$ 和 $[S]F$ 的布尔向量,运用布尔矩阵运算我们有如下表示定理。

定理 4.1(表示定理) (1) $\langle\boldsymbol{S}\rangle\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}$;(2) $[\boldsymbol{S}]\boldsymbol{F}=\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}$。

证明:令 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})$,$\boldsymbol{F}=(F(e_1),\cdots,F(e_n))'$。

(1) 设 $\langle\boldsymbol{S}\rangle\boldsymbol{F}=(a_1,\cdots,a_n)'$,则对任意 i,

$a_i=\mathrm{Sup}\{\min(S(i,j),F(e_j))\mid e_j\in U\}$

$=\sum_{j=1}^{n}(s_{ij}\wedge F(e_j))$

(2) 设 $[\boldsymbol{S}]\boldsymbol{F}=(b_1,\cdots,b_n)'$,则对任意 i,

$b_i=\mathrm{Inf}\{\max(1-S(i,j),F(e_j))\mid e_j\in U\}$

$=\prod_{j=1}^{n}(\bar{s}_{ij}\vee F(e_j))$ □

模糊粗糙集的代数性质与对象集 U 上关系 S 的性质密切相关。因此,我们将根据 S 的关系性质研究其布尔矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的特点。当关系 S 具有某种性质时,如自反性、对称性等,我们也称 $\boldsymbol{S}$ 是具有某种性质的布尔矩阵。

性质 4.2 设 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})$ 为 U 上关系 S 的布尔矩阵。如果 $\boldsymbol{S}$ 是自反的,则对任意 i 有 $s_{ii}=1$;如果 $\boldsymbol{S}$ 是对称的,则对任意 i,j 均有 $s_{ij}=s_{ji}$;如果 $\boldsymbol{S}$ 是传递的,则对任意 i,j,k 均有 $s_{ik}\wedge s_{kj}\leqslant s_{ij}$。称 $\boldsymbol{S}$ 是等价关系,如果 $\boldsymbol{S}$ 是自反、对称和传递的。

定义 4.3 设 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})$,$\boldsymbol{R}=(r_{ij})$ 为两同阶布尔矩阵,如果对任意 i,j 均有 $s_{ij}\leqslant r_{ij}$,则称矩阵 $\boldsymbol{S}$ 小于等于矩阵 $\boldsymbol{R}$,记为 $\boldsymbol{S}\leqslant\boldsymbol{R}$。

显然,如果 $\boldsymbol{S}\leqslant\boldsymbol{R}$ 那么 $\bar{\boldsymbol{R}}\leqslant\bar{\boldsymbol{S}}$。根据定义,我们不难验证如下事实:

命题 4.3 设 F,G 是 U 上的模糊集,$\boldsymbol{F}=(x_1,\cdots,x_n)'$,$\boldsymbol{G}=(y_1,\cdots,y_n)'$ 分别为它们的布尔向量。则 $F\subseteq G$ 当且仅当 $\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{G}$。

命题 4.4 设 $\boldsymbol{F}=(x_1,\cdots,x_n)'$,$\boldsymbol{G}=(y_1,\cdots,y_n)'$ 为布尔向量,$\boldsymbol{S}$ 为任意 n 阶布尔矩阵。若 $\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{G}$,则 $\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{G}$,$\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G}$。

命题 4.5 设 $\boldsymbol{F}=(x_1,\cdots,x_n)'$ 为布尔向量,$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 为任意 n 阶布尔矩阵。若 $\boldsymbol{S}\leqslant\boldsymbol{R}$,则 $\bar{\boldsymbol{R}}\oplus\boldsymbol{F}\leqslant\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{F}$。

命题 4.6 设 S,G 是 U 上的模糊关系,$\boldsymbol{S},\boldsymbol{G}$ 分别是 S 和 G 的布尔矩阵,则 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G}$ 是合成关系 $S\circ G$ 的布尔矩阵。

命题 4.7 设 S 是 U 上的等价关系,$\boldsymbol{S}=(s_{ij})$ 是 S 的布尔矩阵,则 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}$,$\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\bar{\boldsymbol{S}}=\bar{\boldsymbol{S}}$。

在经典粗糙集合粗糙模糊集理论中,当论域 U 上的明晰关系 R 是等价关系时,其上近似算子 R^* 和下近似算子 R_* 具有性质 $R^*F=R_*(R^*F)$ 和 $R_*F=R^*(R_*F)$,其中 F 可以是 U 的子集或 U 上的模糊集。但在模糊粗糙集理论中,该性质并不总成立。用布尔矩阵运算来描述这一代数性质,在一般情况下我们有如下命题:

命题 4.8 对 $n\times n$ 布尔矩阵 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})$ 和 $n\times m$ 阶布尔矩阵 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$,如果 $\boldsymbol{S}$ 是对称和传递的,则有如下性质成立:

(1) 如果对任意 i,j 和 k,均有 $s_{ij}\vee\bar{s}_{ij}\geqslant g_{ik}$,则有 $\boldsymbol{S}\otimes=\bar{\boldsymbol{S}}\oplus(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G})$;

(2) 如果对任意 i,j 和 k,均有 $s_{ij}\wedge\bar{s}_{ij}\leqslant g_{ik}$,则有 $\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{G}=\boldsymbol{S}\otimes(\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{G})$。

证明:我们证明(1),(2)留给读者验证。

设 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G}=(p_{ij})_{n\times m}$,$\bar{\boldsymbol{S}}\oplus(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G})=(q_{ij})_{n\times m}$,只要证明对任意 i,j,$q_{ij}\geqslant p_{ij}$ 即可。

根据定义知 $p_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(s_{ik}\wedge g_{kj})$,$q_{ij}=\prod_{t=1}^{n}(\bar{s}_{it}\vee\sum_{l=1}^{n}(s_{tl}\wedge g_{lj}))$,对此只要证明对任意的 t 和 k 均有 $\bar{s}_{it}\vee\sum_{l=1}^{n}(s_{tl}\wedge g_{lj})\geqslant s_{ik}\wedge g_{kj}$。

我们采用反证法证明:设有某 t 和 k 使得 $\bar{s}_{it}\vee\sum_{l=1}^{n}(s_{tl}\wedge g_{lj})<s_{ik}\wedge g_{kj}$,式中取 $l=k$ 可得 $\bar{s}_{it}\vee(s_{tk}\wedge g_{kj})<s_{ik}\wedge g_{kj}$,进而有 $\bar{s}_{it}<g_{kj}$,$(s_{tk}\wedge g_{kj})<g_{kj}$ 和 $(s_{tk}\wedge g_{kj})<s_{ik}$。利用 $(s_{tk}\wedge g_{kj})<g_{kj}$ 和 $(s_{tk}\wedge g_{kj})<s_{ik}$ 可得 $s_{tk}<g_{kj}$ 和 $s_{tk}<s_{ik}$。

注意到 $\boldsymbol{S}$ 是对称和传递的,因而有 $s_{ik}\wedge s_{it}\leqslant s_{kt}$,已有 $s_{tk}<s_{ik}$,所以 $s_{it}\leqslant s_{kt}$,进而得到 $\bar{s}_{kt}\leqslant\bar{s}_{it}<g_{kj}$,因此有 $\bar{s}_{kt}\vee s_{kt}<g_{kj}$,这与命题给出的条件矛盾。 □

定理 2.1、定理 2.2 和定理 2.3 给出了模糊粗糙集的基本代数性质,运用布尔矩阵运算的基本性质,对应即可得到如下基于布尔矩阵的模糊粗糙集代数性质的表示定理:

定理 4.9 设 U 是论域,$S:U\times U\to[0,1]$ 是 U 上的模糊关系,$F,G:U\to[0,1]$ 是 U 上的模糊集,$\boldsymbol{S},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ 分别是 S,F,G 的布尔矩阵,$\boldsymbol{U}$ 表示 U 的布尔向量,$\boldsymbol{\Phi}$ 表示空子集 $\phi\subseteq U$ 的布尔向量,则

(1) $\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}=\overline{\boldsymbol{S}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}}$;

(2) $\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{G}\to\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}\leqslant\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{G}$ 并且 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G}$;

(3) $\bar{\boldsymbol{S}}\oplus(\boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{G})=\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}\wedge\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{G}$;

(4) $\bar{\boldsymbol{S}}\oplus(\boldsymbol{F}\vee\boldsymbol{G})\geqslant\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}\vee\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{G}$;

(5) $\boldsymbol{S}\otimes(\boldsymbol{F}\vee\boldsymbol{G})=\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}\vee\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G}$;

(6) $\boldsymbol{S}\otimes(\boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{G})\leqslant\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G}$;

(7) $\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}$ 并且 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}$。

定理 4.10 设 U 是论域，$F:U\to[0,1]$ 是 U 上的模糊集，$S,G:U\times U\to[0,1]$ 是 U 上的模糊关系，$\boldsymbol{F},\boldsymbol{S},\boldsymbol{G}$ 分别是 F,S,G 的布尔矩阵，则有

(1) $\overline{(\boldsymbol{S}\vee\boldsymbol{G})}\oplus\boldsymbol{F}=\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}\wedge\bar{\boldsymbol{G}}\oplus\boldsymbol{F}$;

(2) $(\boldsymbol{S}\vee\boldsymbol{G})\otimes\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}\vee\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{F}$;

(3) $(\overline{\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G}})\oplus\boldsymbol{F}=\bar{\boldsymbol{S}}\oplus(\bar{\boldsymbol{G}}\oplus\boldsymbol{F})$;

(4) $(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{G})\otimes\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}\otimes(\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{F})$;

(5) $\overline{\boldsymbol{S}^*}\oplus\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}\wedge(\bar{\boldsymbol{S}}\oplus(\overline{\boldsymbol{S}^*}\oplus\boldsymbol{F}))$;

(6) $\boldsymbol{S}^*\otimes\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}\vee(\boldsymbol{S}\otimes(\boldsymbol{S}^*\otimes\boldsymbol{F}))$。

定理 4.11 设 $U=(e_1,\cdots,e_n)$ 是论域，$F:U\to[0,1]$ 是 U 上的模糊集，$S:U\times U\to[0,1]$ 是 U 上的模糊等价关系，$\boldsymbol{F}=(F(e_1),\cdots,F(e_n))$，$\boldsymbol{S}=(s_{ij})$ 分别是 F,S 的布尔矩阵，则有

(1) $\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}$;

(2) $\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}=\bar{\boldsymbol{S}}\oplus(\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F})$;

(3) $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}\otimes(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F})$;

(4) 如果 $\forall i\forall j(s_{ij}\vee\bar{S}_{ij}\geqslant F(e_i))$，则有 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F}=\bar{\boldsymbol{S}}\oplus(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{F})$;

(5) 如果 $\forall i\forall j(s_{ij}\wedge\bar{S}_{ij}\leqslant F(e_i))$，则有 $\bar{\boldsymbol{S}}\oplus\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}\otimes(\bar{\boldsymbol{s}}\oplus\boldsymbol{F})$。

结束语 本文是矩阵论方法在模糊粗糙集理论研究中的具体应用，其主要目的是运用矩阵这一有力的数学工具，对模糊粗糙集的基本概念和基本运算性质给出一种较为系统和完整的描述。在布尔矩阵逻辑运算中，同时定义"与积"和"或积"两种运算，较好地实现了上述目的，尤其是针对模糊粗糙集理论中的模糊必然算子和模糊可能算子计算过程的布尔矩阵表示，为基于模糊粗糙集理论的知识表示与知识获取提供了一种能行与可计算的思路与方法。

致谢 *感谢高尚博士为本文提供资料和在成文过程中的积极建议。*

参考文献

[1] Pawlak Z. Rough Sets[J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11(5): 341-356

[2] 王国胤. Rough 集理论与知识获取[M]. 西安:西安交通大学出版社, 2001

[3] 曾黄麟. 粗集理论及其应用—关于数据推理的新方法. 修订版[M]. 重庆:重庆大学出版社, 1998

[4] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191-209

[5] Greco S, Matarazzo B, Słowiński R. Fuzzy similarity relation as a basis for rough approximations [A] // The Proceedings of RSCTC. Heidelberg: Springer-Verlag, 1998: 283-289

[6] Morsi N N, Yakout M M. Axiomatics for fuzzy roughsets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100: 327-342

[7] Radzikowska A M, Kerre E E. Acomparative study of fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126: 137-155

[8] Wu W Z, Mi J S, Zhang W X. Generalized fuzzy rough sets [J]. Information Sciences, 2003, 151: 263-282

[9] Mi J S, Zhang W X. Anaxiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets[J]. Information Sciences, 2004, 160: 235-249

[10] 黄正华, 胡宝清. 模糊粗糙集理论研究进展[J]. 模糊系统与数学, 2005, 19(4): 125-134

[11] 苗夺谦, 王珏. 粗糙集理论中概念与运算的信息表示[J]. 软件学报, 1999, 10(2): 113-116

[12] 李龙星, 运士伟, 杨炳儒. 粗糙集概念与运算的布尔矩阵表示[J]. 计算机工程, 2005, 31(14): 16-17

[13] 仁艳玲, 朱明放. 基于粗糙集的属性约简的矩阵方法[J]. 陕西理工学院学报, 2006, 22(3): 76-80

[14] 张桂芸, 黄国兴, 杨炳儒. 基于分辨相似矩阵的相似粗糙集的属性约简算法[J]. 计算机工程, 2006, 32(10): 43-44

[15] 高学军, 丁军. 基于简化差别矩阵的属性约简算法[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 20(6): 101-107

[16] 雷晓蔚. 粗集理论的矩阵方法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(17): 73-75

[17] 张晓如, 张再跃. 基于特征矩阵的粗糙集代数运算与表示定理[J]. 计算机科学, 2008, 35(4): 170-173

[18] Thiele H. Fuzzy rough sets versus rough fuzzy sets—an interpretation and a comparative study[R]. Technical Report CI-30/98. University of Dortmund, 1998

(上接第 200 页)

[6] Tenenbaum J B, de Silva V, Langford J C. A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction. Science, 2000, 290(5500): 2319-2323

[7] Zhang Zhenyue, Zha Hongyuan. Principal Manifolds and Nonlinear Dimensionality Reduction via Tangent Space Alignment. SIAM Journal of Scientific Computing, 2004, 26(1): 313-338

[8] Weinberger K, Saul L. Unsupervised Learning of Image Manifolds by Semidefinite Programming// Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington, DC, 2004

[9] Brun A, Westin C-F, Herberthson M, et al. Fast Manifold Learning Based on Riemannian Normal Coordinates// Proceedings of the 14th Scandinavian Conference on Image Analysis. Joensuu, Finland, 2005

[10] de Ridder D, Kouropteva O, Okun O, et al. Supervised Locally Linear Embedding // Proceedings of ICANN/ICONIP 2003. LNCS, 2003, 2714: 333-341

[11] Wu Yiming, Chan K L. An Extended Isoma PAlgorithm for Learning Multi-class Manifold // Proceedings of IEEE International Conference on Machine Learning and Cybernetics (ICMLC2004). Shanghai, China, 2004

[12] Lin Tong, Zha Hongbin, Lee S U. Riemannian Manifold Learning for Nonlinear Dimensionality Reduction// Proceedings of the 9th European Conference on Computer Vision. Graz, Austria, 2006

[13] Fletcher P T, Lu C, Pizer S M, et al. Principal Geodesic Analysis for the Study of Nonlinear Statistics of Shape. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2004, 23(8): 995-1005