变迁耦合网的 T-不变量求解算法*)

岳 昊 吴哲辉 施建娟 于立萍
(山东科技大学信息科学与工程学院 青岛 266510)

摘 要 首先定义了变迁耦合网及相关概念,其次揭示了变迁耦合网 N 中各个分支网的 T-不变量同 N 的 T-不变量之间的关系,根据是否与耦合变迁有关,将 N 的极小 T-不变量分为两类 MTS_1 和 MTS_2,然后给出了变迁耦合网所有极小 T-不变量的求解算法,并给出了两个简单例子加以说明,最后编程实现所提算法并给出初步实验数据。试验结果说明,本文所提算法比现有算法节省大量计算开支。

关键词 Petri 网,变迁耦合网,不变量

Algorithm for Computing T-invariants in Transition Coupling Nets

YUE Hao WU Zhe-hui SHI Jian-juan YU Li-ping
(College of Information, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China)

Abstract First, the transition coupling net(TCN) and related concepts are defined. Second, the relationship between T-invariants of TCN and its branches nets is pointed out. Based on the facts that whether they have anything to do with the Coupling transition, the minimal T-invariants of a TCN are divided into two kinds called MTS_1 and MTS_2. The algorithm for finding T-invariants of TCN is given and two simple examples are used to illustrate the algorithm. Finally, the algorithm is implemented and the elementary experimental results are given. Evidence shows that the proposed algorithm has advantages over present ones.

Keywords Petri net, Transition coupling nets (TCN), Invariants

1 引言

Petri 网作为系统建模和分析的工具已被广泛应用于多个领域[1-4]。T-不变量和 S-不变量是对 Petri 网进行结构性质分析的重要工具,但对于 T-不变量或 S-不变量的求取至今未找到有效的算法,求取 Petri 网、特别是大规模系统 Petri 网模型的不变量,常常要耗费大量的计算时间和存储空间[9-13,16]。由于对于大规模的系统来说,其 Petri 网模型的关联矩阵常常是稀疏的[5],对于那些关联矩阵为稀疏矩阵的系统网模型,为求它们的 T-不变量或 S-不变量,我们就可以试图对网的变迁和库所进行重新编号,使网以变迁耦合网的形式出现,如果一个网能以变迁耦合网的形式出现,则我们就可以运用变迁耦合网的 T-不变量求解算法,达到节省计算时间和存储空间的目的。本文所提算法的基本思路就是:先对变迁耦合网 N 的每一个分支网,求出其所有的极小 T-不变量,然后构造出变迁耦合关系方程组,解变迁耦合关系方程组求出其所有极小非平凡非负整数解(实际上也是一个求系数矩阵对应的网的极小 T-不变量的过程),最后将各分支网的极小 T-不变量组合起来得到 N 的所有极小 T-不变量。试验结果说明,本文所提算法比现有算法节省大量开支。

2 基本概念和有关结论

定义 1[1] Petri 网是一个四元组 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$,其中 S 称为库所集,T 称为变迁集,两者不相交,$F\subseteq(S\times T)\cup(T\times S)$ 称为网的流关系,$M:S\rightarrow\{0,1,2,\cdots\}$ 是 Σ 的一个标识,对 $x\in S\cup T$ 记:

$^{\cdot}x=\{y\in S\cup T\mid(y,x)\in F\}$, $x^{\cdot}=\{y\in S\cup T\mid(x,y)\in F\}$

Petri 网具有如下变迁发生规则:

1)对于变迁 $t\in T$,若

$\forall s\in S: s\in{}^{\cdot}t\rightarrow M(s)\geq 1$,则称标识 M 下变迁 t 可引发,记作 $M[t>$。

2)若 $M[t>M'$,则对 $\forall s\in S$,

$$M'(s)=\begin{cases}M(s)-1 & 当\ s\in{}^{\cdot}t-t^{\cdot}\\ M(s)+1 & 当\ s\in t^{\cdot}-{}^{\cdot}t\\ M(s) & 其它\end{cases}$$

用图形表示 Petri 网时,用圆圈表示一个库所,各库所的标记数在圆圈内用数字或圆点表示,用一个小矩形表示一个变迁,若 $(x,y)\in F$,则从 x 到 y 划一条有向边。Petri 网的网结构可用关联矩阵来表示,矩阵的每行对应一个库所,每列对应一个变迁,若变迁的发生使得库所的标记增加或减少一个,则关联矩阵中对应元素的值为 1 或 −1,否则为 0。

为了表述方便,在本文中,网的关联矩阵的行对应于库所,列对应于变迁,这同文献[1]中的约定正好相反,用这种方法定义的关联矩阵,有关文献一般都用 c(小写英文字母)表示而不用 A,不失一般性,在本文中,我们依然用 A 来表示网的关联矩阵;另外,对网的关联矩阵进行行对换对应将库所编号对换,列对换对应将变迁编号对换,两种操作对 Petri 网结构性质和动态性质都没有影响。

定义 2[1] 设 $N=(S,T;F)$ 为一个网,A 为网 N 的关联

*)基金项目:国家自然科学基金(60673053)。**岳 昊** 博士研究生,研究方向为 Petri 网理论及应用;**吴哲辉** 教授,博士生导师,主要研究方向为 Petri 网理论及应用、算法设计与分析、形式语言与自动机理论等;**施建娟** 硕士,主要研究方向为计算机算法、图像处理、模式识别。

矩阵,如果非平凡的非负整数向量 X 满足 $AX=0$,则称 X 为 N 的一个 T-不变量。

定义 3[1] 设 $N=(S,T;F)$ 为一个网,$|T|=n$。如果 X_1 是网 N 的一个 T-不变量,且任意满足 $X<X_1$ 的 n 维非负整数向量 X 都不是网 N 的 T-不变量,则称 X_1 是网 N 的一个极小 T-不变量。

引理 1[1] 一个网 N 的任意一个 T-不变量都是网 N 的极小 T-不变量的非负整系数线性组合。

引理 2[1] 设 X_1,X_2 是网 N 的两个 T-不变量,k 为一个正整数,则 X_1+X_2,kX_1 也是网 N 的 T-不变量。

3 变迁耦合网与 T-不变量的耦合关系方程组

定义 4 设 $N=(S,T;F)$ 为一个网,A 为其关联矩阵,若 A 经过若干次行对换和列对换可以化成如下形式

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & A_{c1} \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & A_{c2} \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p & A_{cp} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 & \\ & \ddots & & A_c \\ 0 & & A_p & \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中 $A_c\neq 0$(零矩阵),则 N 称为变迁耦合网;子矩阵$(A_1,A_{c1}),(A_2,A_{c2}),\cdots,(A_p,A_{cp})$对应的网 $N_1,N_2,\cdots,N_p$ 称为变迁耦合分支网,简称分支网,p 为分支网个数;A_c 的非零列对应的变迁称为耦合变迁,设共有 q 个。

说明:A_{ci} 的每一列分别对应于一个耦合变迁,每一行分别对应于第 i 个分支网的一个库所,A_{ci} 反应了第 i 个分支网的库所同耦合变迁的连接关系,$(i=1,2,\cdots,p)$。

为了表述方便,在本文中我们作出以下两个约定:

1)一般地,设 X_i 为有 n_i 个分量的列向量,$(i=1,2,\cdots,p)$,则

$(X_1,X_2,\cdots,X_p)^T$

表示含有 $\sum_{i=1}^{p} n_i$ 个分量的列向量。

2)零向量依然用"0"表示,在不同的地方根据上下文不难看出它的分量个数。

对于一个有 p 个分支网、q 个耦合变迁的变迁耦合网 N,有以下结论(下文中的 X_c,X_{ci} 都是分量个数为 q 的列向量):

引理 3 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$ 是 N 的任意一个 T-不变量,其中 X_i 是有 n_i 个分量的列向量,n_i 为第 i 个分支网关联矩阵(A_i,A_{ci})的子矩阵 A_i 的列数,$i=1,2,\cdots,p$。则有:

1)若 $X_c\neq 0$,则$(X_i,X_c)^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量,$i=1,2,\cdots,p$;

2)若 $X_c=0$,则对满足 $X_i\neq 0$ 的 i,有$(X_i,0)^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量,$i=1,2,\cdots,p$。

证明:由于 X 是 N 的一个 T-不变量,因此 $AX=0$,而

$$AX=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & A_{c1} \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & A_{c2} \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p & A_{cp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \\ X_c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1X_1+A_{c1}X_c \\ A_2X_2+A_{c2}X_c \\ \vdots \\ A_pX_p+A_{cp}X_c \end{pmatrix}$$

所以

$$A_iX_i+A_{ci}X_c=(A_i,\cdots,A_{ci})\begin{pmatrix} X_i \\ X_c \end{pmatrix}=0,i=1,2,\cdots,p$$

而(A_i,A_{ci})正是第 i 个分支网的关联矩阵,又由于 T-不变量要求是非平凡的非负整数向量,故结论成立。 □

推论 1 若每一个分支网都没有 T-不变量,则 N 没有 T-不变量。

推论 2 若存在一个分支网 $N_i(1\leqslant i\leqslant p$,且 $i\in N)$,N_i 没有 T-不变量,且 N 有 T-不变量,则对于 N 的任意一个 T-不变量 X,有 X 的后 q(耦合变迁的个数)个分量均为零。

证明:设 X 是 N 的任意一个 T-不变量,假设 X 的后 q 个分量不全为零,则可设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$,其中 $X_c\neq 0$,则由引理 3 知,$(X_i,X_c)^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量,这同 N_i 没有 T-不变量矛盾。 □

用同样的方法可以证明以下推论:

推论 3 若存在一个分支网 $N_i(1\leqslant i\leqslant p$,且 $i\in N)$,对于 N_i 的任意一个 T-不变量$(X_i,X_{ci})^T$,都有 $X_{ci}=0$,则对于 N 的任意一个 T-不变量 X,有 X 的后 q(耦合变迁的个数)个分量均为零。

引理 4[5] $(X_i,X_{ci})^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量,$i=1,2,\cdots,p$,且对 $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,p\}$,有 $X_{ci}=X_{cj}=X_c$,则

1)若 $X_c\neq 0$,则 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$ 是 N 的一个 T-不变量;

2)若 $X_c=0$,则 $X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots 0)^T$ 是 N 的一个 T-不变量。

证明:1)

$$AX=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & A_{c1} \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & A_{c2} \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p & A_{cp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \\ X_c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1X_1+A_{c1}X_c \\ A_2X_2+A_{c2}X_c \\ \vdots \\ A_pX_p+A_{cp}X_c \end{pmatrix} \tag{2}$$

由于$(X_i,X_{ci})^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量,因此

$$A_iX_i+A_{ci}X_c=(A_i\,A_{ci})\begin{pmatrix} X_i \\ X_c \end{pmatrix}=0,i=1,2,\cdots,p$$

结合(2)知,$AX=0$,故非平凡的非负整数向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$ 是 N 的一个 T-不变量。

2)

$$AX=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & A_{c1} \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & A_{c2} \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p & A_{cp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_iX_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

由于$(X_i,X_{ci})^T=(X_i,X_c)^T=(X_i,0)^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量,因此

$$(A_i\,A_{ci})\begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}=A_iX_i=0,i=1,2,\cdots,p$$

结合(3)知,$AX=0$,又 $X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots,0)^T\neq 0$,所以 X 是 N 的一个 T-不变量。 □

引理 5 $(X_i,X_c)^T$ 是第 i 个分支网的极小 T-不变量,$i=1,2,\cdots,p$,且 $X_c\neq 0$,则 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$ 是 N 的一个极小 T-不变量。

证明:由引理 4 知,$X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$ 是 N 的一个 T-不变量,假设 X 不是 N 的一个极小 T-不变量,则可以由 X 通过减小某些分量的大小得到 N 的一个极小 T-不变量 X',$X'<X$,若被减小的分量在 X_i 中,则由引理 3 知,由 X' 找

到的第 i 个分支网的 T-不变量 $(X'_i,X_c)^T<(X_i,X_c)^T$，$(X_i,X_c)^T$ 不是第 i 个分支网的极小 T-不变量，矛盾；若被减小的分量在 X_c 中，则由引理 3 知，$\exists i\in\{1,2,\cdots,p\}$，$(X_i,X_c)^T$ 不是第 i 个分支网的极小 T-不变量，矛盾；若被减小的分量在 X_i 和 X_c 中都有，则根据同样的方法也可推出矛盾。在三种情况下都推出矛盾，所以假设不成立，X 是 N 的一个极小 T-不变量。 □

引理 6 若 $(X_i,0)^T$ 是第 i 个分支网的极小 T-不变量，则

$$X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots,0)^T$$

是 N 的一个极小 T-不变量，$i=1,2,\cdots,p$。

证明：由引理 4 知，$X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots,0)^T$ 是 N 的一个极小 T-不变量，假设 X 不是 N 的一个极小 T-不变量，则可以由 X 通过减小某些分量的大小得到 N 的一个极小 T-不变量 $X'=(0,\cdots,0,X'_i,0,\cdots,0)^T$，$X'<X$，且 $X'_i\neq 0$，由引理 3 知，$(X'_i,0)^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量，结合 $(X'_i,0)^T<(X_i,0)^T$ 知 $(X_i,0)^T$ 不是第 i 个分支网的极小 T-不变量，矛盾。 □

为了求 N 的所有极小 T-不变量，我们可以先求每个分支网的所有极小 T-不变量，由引理 6 知，分支网的所有形如 $(X_i,0)^T$ 的极小 T-不变量都对应一个 N 的极小 T-不变量 $X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots,0)^T$，因此我们需要进一步考虑的仅仅是分支网的那些满足后 q（耦合变迁的个数）个分量不全为零的极小 T-不变量，寻求用它们的后 q 个分量组成的列向量来构建变迁耦合关系方程组。

定义 5 设第 i 个分支网满足后 q（耦合变迁的个数）个分量不全为零的极小 T-不变量共有 r_i 个，它们是 $(X_{i1},X_{ci1})^T,(X_{i2},X_{ci2})^T,\cdots,(X_{i1},X_{cir_i})^T$，$i=1,2,\cdots,p$，则有

$$(A_i\,A_{ci})\begin{pmatrix}X_{ij}\\X_{cij}\end{pmatrix}=0,(i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,r_i)$$

关于未知数 $y_{11},y_{12},\cdots,y_{1r_1},y_{21},y_{22},\cdots,y_{2r_2},\cdots,y_{p1},y_{p2},\cdots y_{pr_p}$ 的包含 $(p-1)q$ 个方程的整系数齐次线性方程组：

$$y_{11}X_{c11}+y_{12}X_{c12}+\cdots+y_{1r_1}X_{c1r_1}=y_{21}X_{c21}+y_{22}X_{c22}+\cdots+y_{2r_2}X_{c2r_2}=y_{p1}X_{cp1}+y_{p2}X_{cp2}+\cdots+y_{pr_p}X_{cpr_p}$$

称为变迁耦合关系方程组。

定理 1 N 有形如 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$ 的 T-不变量，其中 X_i 是有 n_i 个分量的列向量，n_i 为第 i 个分支网关联矩阵 (A_i,A_{ci}) 的子矩阵 A_i 的列数，$i=1,2,\cdots,p$，且 $X_c\neq 0$，当且仅当变迁耦合关系方程组（$*$）有非平凡非负整数解。

证明（必要性）：由引理 3 的 1）知，$(X_i,X_c)^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量，$i=1,2,\cdots,p$，则 $(X_i,X_c)^T$ 可以表示为第 i 个分支网极小 T-不变量的非负整系数线性组合，$i=1,2,\cdots,p$，不妨设

$$(X_i,X_c)^T=y'_{i1}(X_{i1},X_{ci1})^T+y'_{i2}(X_{i2},X_{ci2})^T+\cdots+y'_{ir_i}(X_{ir_i},X_{cir_i})^T$$

因此有

$$y'_{i1}X_{ci1}+y'_{i2}X_{ci2}+\cdots+y'_{ir_i}X_{cir_i}=X_c,i=1,2,\cdots,p$$

所以得出（$*$）的一组非平凡非负整数解

$$(y'_{11},y'_{12},\cdots,y'_{1r_1},y'_{21},y'_{22},\cdots,y'_{2r_2},\cdots,y'_{p1},y'_{p2},\cdots,y'_{pr_p})^T$$

（充分性）：设 $(y'_{11},y'_{12},\cdots,y'_{1r_1},y'_{21},y'_{22},\cdots,y'_{2r_2},\cdots,y'_{p1},y'_{p2},\cdots,y'_{pr_p})^T$ 是（$*$）的一组非平凡非负整数解，设

$$y'_{i1}X_{ci1}+y'_{i2}X_{ci2}+\cdots+y'_{ir_i}X_{cir_i}=\sum_{j=1}^{r_i}(y'_{ij}X_{cij})=X_c,i=1,2,\cdots,p$$

则 $X_c\neq 0$。下面证明

$$X=\Big(\sum_{j=1}^{r_1}(y'_{1j}X_{1j}),\sum_{j=1}^{r_2}(y'_{2j}X_{2j}),\cdots,\sum_{j=1}^{r_p}(y'_{pj}X_{pj}),X_c\Big)^T$$

是 N 的一个 T-不变量，由于

$$\Big(\sum_{j=1}^{r_i}(y'_{ij}X_{ij}),X_c\Big)^T=\Big(\sum_{j=1}^{r_i}(y'_{ij}X_{ij}),\sum_{j=1}^{r_i}(y'_{ij}X_{cij})\Big)^T=\sum_{j=1}^{r_i}\big(y'_{ij}(X_{ij},X_{cij})^T\big),i=1,2,\cdots,p$$

结合 $(X_{ij},X_{cij})^T$ 是分支网 N_i 的极小 T-不变量（$i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,r_i$），由引理 2 知 $\Big(\sum_{j=1}^{r_i}(y'_{ij}X_{ij}),X_c\Big)^T$ 是 N_i 的 T-不变量，$i=1,2,\cdots,p$。因此由引理 4 的 1）知

$$X=\Big(\sum_{j=1}^{r_1}(y'_{1j}X_{1j}),\sum_{j=1}^{r_2}(y'_{2j}X_{2j}),\cdots,\sum_{j=1}^{r_p}(y'_{pj}X_{pj}),X_c\Big)^T$$

是 N 的一个 T-不变量。 □

定理 2 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$ 是 N 的任意一个极小 T-不变量，则

1）若 $X_c=0$，则 X 一定是 $X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots 0)^T$ 的形式，其中 $(X_i,0)^T$ 是某个分支网的一个极小 T-不变量；

2）若 $X_c\neq 0$，则 X 一定对应变迁耦合关系方程组（$*$）的一组极小非平凡非负整数解。

证明：1）由引理 3 的 2）知，对满足 $X_i\neq 0$ 的 i，有 $(X_i,0)^T$ 是第 i 个分支网的 T-不变量，$i=1,2,\cdots,p$，这时 $(X_i,0)^T$ 又是第 i 个分支网的极小 T-不变量，否则就可以由 $(X_i,0)^T$ 通过减小某些分量的大小得到第 i 个分支网的一个极小 T-不变量 $(X'_i,0)^T<(X_i,0)^T$，由引理 6 知它对应 N 的一个极小 T-不变量 $X'=(0,\cdots,0,X'_i,0,\cdots 0)^T$，$X'<X$，这同 X 是 N 的一个极小 T-不变量矛盾。这样由引理 6 知 $(X_i,0)^T$ 对应 N 的一个极小 T-不变量 $(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots 0)^T$，就是 X。

2）由定理 1 的必要性知 X 对应变迁耦合关系方程组（$*$）的一组非平凡非负整数解

$$Y'=(y'_{11},y'_{12},\cdots,y'_{1r_1},y'_{21},y'_{22},\cdots,y'_{2r_2},\cdots,y'_{p1},y'_{p2},\cdots,y'_{pr_p})^T$$

有 $X_c=\sum_{j=1}^{r_i}(y'_{ij}X_{cij})$，$i=1,2,\cdots,p$，且

$$X'=\Big(\sum_{j=1}^{r_1}(y'_{1j}X_{1j}),\sum_{j=1}^{r_2}(y'_{2j}X_{2j}),\cdots,\sum_{j=1}^{r_p}(y'_{pj}X_{pj}),X_c\Big)^T$$

若这组解不是极小的，则由它通过减小某些分量的大小一定能找到（$*$）的一组极小非平凡非负整数解

$$\bar{Y}=(\bar{y}_{11},\bar{y}_{12},\cdots,\bar{y}_{1r_1},\bar{y}_{21},\bar{y}_{22},\cdots,\bar{y}_{2r_2},\cdots,\bar{y}_{p1},\bar{y}_{p2},\cdots,\bar{y}_{pr_p})^T$$

有 $\bar{Y}<Y'$，设 $\bar{X}_c=\sum_{j=1}^{r_i}(\bar{y}_{ij}X_{cij})$，$i=1,2,\cdots,p$，则有 $\bar{X}_c\neq 0$，由定理 1 的充分性知 $\bar{Y}$ 对应 N 的一个 T-不变量

$$\bar{X}=\Big(\sum_{j=1}^{r_1}(\bar{y}_{1j}X_{1j}),\sum_{j=1}^{r_2}(\bar{y}_{2j}X_{2j}),\cdots,\sum_{j=1}^{r_p}(\bar{y}_{pj}X_{pj}),\bar{X}_c\Big)^T$$

由 $\bar{Y}<Y'$ 知 $\bar{X}<X$，同 X 为 N 的一个极小 T-不变量矛盾。 □

推论 4 若一个变迁耦合网 N 没有变迁耦合关系方程组，即 $\exists i\in\{1,2,\cdots,p\}$，有 $r_i=0$，（r_i 和 p 的定义见定义 5），则 N 或者没有 T-不变量，或者极小 T-不变量都是 $X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots,0)^T$ 的形式，其中 $(X_i,0)^T$ 是某个分支网的极小 T-不变量。

证明：设 N 有 T-不变量，由不存在变迁耦合关系方程组知，推论 2 或推论 3 的题设必然成立，因此对于 N 的任意一个 T-不变量 X，都有 X 的后 q（耦合变迁的个数）个分量均为

零,由定理 2 的 1)知 N 的任意一个极小 T-不变量一定是 $X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots,0)^T$ 的形式,其中$(X_i,0)^T$ 是某个分支网的极小 T-不变量。 □

由推论 4 和定理 2 可知,若设一个变迁耦合网 N 的极小 T-不变量的集合为 MTS,则 MTS 由两部分组成:$MTS=MTS_1\cup MTS_2$,$MTS_1\cap MTS_2=\emptyset$,$MTS_1$ 由各分支网的形如$(X_i,0)^T$ 的极小 T-不变量对应的 N 的极小 T-不变量 $X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots0)^T$ 组成;MTS_2 中 N 的极小 T-不变量是利用变迁耦合关系方程组的极小非平凡非负整数解将分支网的极小 T-不变量组合得到的,MTS_2 中的元素都是形如 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$(其中 $X_c\neq0$)的 N 的极小 T-不变量。据此我们可以设计出一个变迁耦合网的 T-不变量求解算法。

4 变迁耦合网的 T-不变量求解算法和程序实现

算法 1 输入:变迁耦合网 N 的关联矩阵。

输出:N 的所有极小 T-不变量的集合 MTS。

Step1 预置 MTS_2 为空,分别求各个分支网的所有极小 T-不变量。

Step2 若不存在变迁耦合关系方程组,则转 Step5。

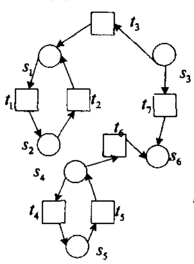
Step3 构建变迁耦合关系方程组,并解耦合关系方程组,求所有极小非平凡非负整数解(实际上也是一个求系数矩阵对应的网的极小 T-不变量的过程)。

Step4 将各分支网的极小 T-不变量组合得到 N 的所有形如 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p,X_c)^T$(其中 $X_c\neq0$)的极小 T-不变量的集合 MTS_2。

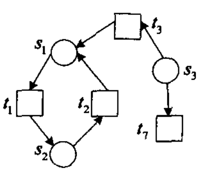
Step5 求 N 的所有形如 $X=(0,\cdots,0,X_i,0,\cdots,0)^T$ 的极小 T-不变量的集合 MTS_1。

Step6 $MTS\leftarrow MTS_1\cup MTS_2$,结束。

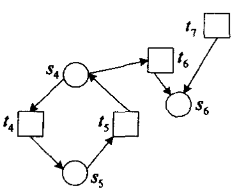
例 1



网 N_1



网 N_1 的分支网 N_{11}



N_2 的分支网 N_{12}

N_{11}共有 1 个极小 T-不变量:

$t_1\ t_2\ t_3\ t_7$

$(1\ 1\ 0\ 0)^T$

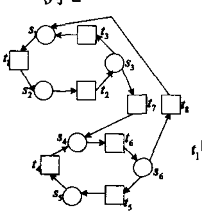
N_{12}共有 1 个极小 T-不变量:

$t_4\ t_5\ t_6\ t_7$

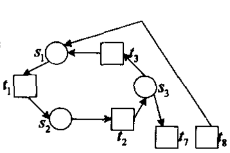
$(1\ 1\ 0\ 0)^T$

所以 N_1 没有变迁耦合关系方程组,对于 N_1 来说,$MTS_2=\emptyset$,$MTS=MTS_1=\{(1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T,(0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)^T\}$。

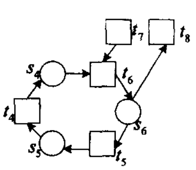
例 2



网 N_2



网 N_2 的分支网 N_{21}



网 N_2 的分支网 N_{22}

N_{21}共有 2 个极小 T-不变量:

$t_1\ \ t_2\ \ t_3\ \ t_7\ \ t_8{}^T\ \ t_1\ \ t_2\ \ t_3\ \ t_7\ \ t_8$

$(1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)\ '(1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$

N_{22}共有 2 个极小 T-不变量:

$t_4\ \ t_5\ \ t_6\ \ t_7\ \ t_8\ \ t_4\ \ t_5\ \ t_6\ \ t_7\ \ t_8$

$(1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T\ '(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$

所以对于 N_2 来说,$MTS_1=\{(1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T\}$,$N_2$ 的变迁耦合关系方程组是

$$\begin{cases}y_{11}=y_{21}\\y_{11}=y_{21}\end{cases}\text{即 } y_{11}-y_{21}=0$$

它的所有极小非平凡非负整数解为$(1\ \ 1)^T$,所以 $MTS_2=\{(1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T\}$,$MTS=MTS_1\cup MTS_2$。

我们把上述算法在计算机上用 C 程序设计语言实现,求各分支网的所有极小 T-不变量用的是修改的 FM 方法(MFM[9]),我们的计算机配置是 CPU:Pentium 2.80GHz,内存:256M,操作系统是 Windows XP。函数 *void generate_transition_coupling_nets_randomly*(*int b*,*int q*)用来随机产生一个分支网数为 b,耦合变迁数为 q 的变迁耦合网,我们选用这个函数随机产生的变迁耦合网作为实验对象,由于 MFM 方法最坏情况下的时间复杂度和空间复杂度都很高,受计算机存储容量的限制,有一部分变迁耦合网将得不到处理结果(数据溢出)。在可以给出处理结果的网中,对于大部分网,对它们采用变迁耦合网 T-不变量求解算法比把它们当成一般的网处理节省计算开支;有一小部分网,把它们当成一般的网处理比采用变迁耦合网 T-不变量求解法节省计算时间,如本文最后结语中所说:对于哪些网,本文所提算法才有优势?怎样选取耦合变迁集才能尽可能多地节省计算开支?这是需要进一步研究的问题。

对于具有实际意义的网来说,表 1 反映了本文所提算法的优势,表中的每一个变迁耦合网其每一个分支网都是下面的网 N_3 的逆对偶网,这个网是由 VERT 项目[14]对一个 19 行的 Ada 程序段处理产生出来的。

```
    procedure P is
    task type TT;
    type PtrTT is access TT;
    X:PtrTT;
    Y:PtrTT;
    Procedure S is
        task T is
            entry Z;
        end T;
        task body T is
        begin
            access Z;
        end T;
    begin
        T.Z;
    end S;
    task body TT is begin S1;S2; end TT;
begin
    X:= new TT;
    P.S;
    S3;
    Y:= new TT;
```

P. S;
end P;

一个19行的Ada程序段(取自文献[15]),程序段对应的网 N_3 作为一个分支网(取自文献[15])。

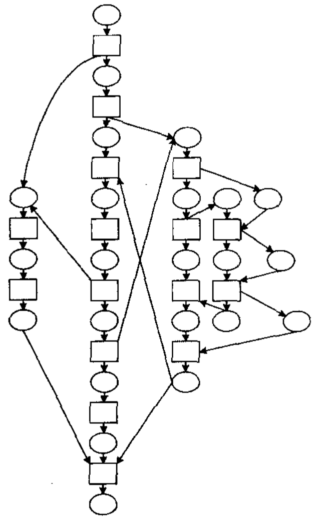


表1 计算开支比较

编号	分支数	耦合变迁数	库所数	变迁数	边数	$\|MTS_1\|$	$\|MTS_2\|$	MFM耗时(ms)	本文算法耗时(ms)
1	2	2	32	48	102	22	6	15	0
2	2	2	32	48	104	22	11	218	15
3	2	2	32	48	105	22	41	421	15
4	2	2	32	48	105	22	11	154375	31
5	2	2	32	48	103	22	6	——	258
6	3	33	48	72	148	33	45	38250	15
7	3	3	48	72	149	33	94	294375	15
8	3	3	48	72	150	33	113	——	31

结束语 本文的工作有两个方面:

(1)揭示了变迁耦合网 N 中各个分支网的 T-不变量同 N 的 T-不变量之间的关系;

(2)在这些关系的基础上给出变迁耦合网的 T-不变量求解算法。

我们提出的方法是一种宏观上的组织方法,对于求各个分支网的极小不变量,以及求解变迁耦合关系方程组(实际上也是一个求极小不变量的过程),我们可以采用现有的方法,如修改的FM方法[9](MFM)。本文所提方法为大规模系统Petri网模型不变量求解提供了一种很有前景的解决方案,其优势在于:

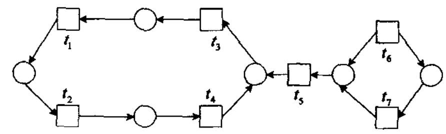
(a)处理分支网可以同时进行,因此可以设计出相应的并行程序以进一步缩小计算开支。

(b)当每一个分支网又是由若干个二级分支网通过耦合变迁连接起来时,即分支网又是一个变迁耦合网,则对分支网应用变迁耦合网的 T-不变量求解算法,求每个分支网的所有极小 T-不变量,然后再将各分支网的极小 T-不变量组合起来得到 N 所有的极小 T-不变量,这样可以进一步缩小计算开支。

本文所提算法存在的问题和需要更深入一步讨论的问题:

根据定义4,在网图中,变迁集的任意一个子集,只要是图的一个割集,都可以作为一个耦合变迁集。例如在下面的网中,可以把 $\{t_5\}$ 作为耦合变迁集,也可以把 $\{t_3,t_4\}$ 作为耦合变迁集。

对于哪些网,本文所提算法才有优势?怎样选取耦合变迁集才能尽可能多地节省计算开支?这是需要进一步研究的问题。网的极小不变量的数目可能随着库所数或变迁数的增长而指数级地增长,在这种情况下,变迁耦合关系方程组的规模也在指数级地增长,这时本文所提算法就没有优势了。



网 N_4

我们在本文中只是对所提算法性能进行了初步测试,下一步还需要将其用于更多更广泛的例子以验证其优势,另一方面,我们正在寻求从理论上证明所提算法的优势。此外,下一步另一个工作就是设计出一个算法,将一个网自动分解,使之具备合适的分支网和耦合变迁。

参 考 文 献

[1] 吴哲辉. Petri网导论[M]. 北京:机械工业出版社,2006

[2] Peterson J L. Petri网理论与系统模拟[M]. 吴哲辉,译. 徐州:中国矿业大学出版社,1989

[3] Murata T. Petri nets: properties, analysis and application[J]. IEEE,1989,77(4):541-579

[4] 袁崇义. Petri网原理与应用[M]. 北京:电子工业出版社,2005

[5] Bourjij A, Boutayeb M, Cecchin T. A Decentralized Approach for Computing Invariants in Large Scale and Interconnected Petri Nets[J]. IEEE,0-7SO3453-1/ 1997

[6] Bourjij A, Boutayeb M, Cecchin T. ON GENERATING A BASIS OF INVARIANTS IN PETRI NETS[J]. IEEE, 0-7803-4053-1/97/ 1997

[7] Yamauchi M, Wakuda M, Taoka S, et al. A Fast and Space-Saving Algorithm for Computing Invariants of Petri Nets[J]. IEEE,2002

[8] Martinez J, Silva M. A Simple and Fast Algorithm to Obtain All Invariants Of a Generalized Petri Nets[J]//Proceedings of Second European Workshop on Application and Theory of Petri Nets. Informatik Fachberichte 52, Springer Publishing Company, Berlin, 1982

[9] Takata M, Matsumoto T, Moro S. A Direct Method to Derive All Generators of Solutions of a Matrix Equation in a Petri Net • Extended Fourier-Motzkin Method [J]// The 2002 International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communitions. 2002

[10] Takano K, Taoka S, Yamauchi M, et al. Two efficient methods for computing Petri net invariants// Proc. IEEE Int. Conf. Systems, Man, and Cybernatics. 2001:2717-2722

[11] Takano K, Taoka S, Yamauchi M, et al. Experimental evaluation of two algorithms for computing Petri net invariants. IEICE Trans. Fundamentals, 2001, E84-A(11):2871-2880

[12] Taoka S, Takano K, Watanabe T. Extracting minimal siphon-traps of Petri nets and its application to computing nonnegative integer-invariants. IEICE Trans. Fundamentals, 2002, E85-A (11):2436-2446

[13] Taguchi A, Taoka S, Watanabe T. An algorithm GMST for extracting minimal siphon-traps and its application to efficient computation of Petri net invariants// Proc. Int. Symp. Circuits and Systems. 2003:172-175

[14] Beaven M, Elmore B, Marinescu D C, et al. VERT-verification of real-time programs [J] // Proceeding of COMPSAC 91. IEEE Pree, 1991

[15] Marinescu D C, Beaven M, Stansifer R. A Parallel Algorithm for Computing Invariants of Petri Net Models[J]// Proc. Petri Nets and Performance Models 91. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, Ca, 1991:136-143

[16] Law C F, Gwee B, Chang J S. Optimized Algorithm for Computing Invariants of Ordinary Petri Nets [J]// Computer and Information Science, 2006 and 2006 1st IEEE/ACIS International Workshop on Component-Based Software Engineering, Software Architecture and Reuse. ICIS-COMSAR 2006. 5th IEEE/ACIS International Conference on. ISBN: 0-7695-2613-6. 2006:23-28