基于正交小波包的图像压缩算法

覃焕昌[1]　韦家儒[2]
（百色学院物理与电信工程系[1]　计算机与信息科学系[2]　广西百色 533000）

摘　要　本文提出了一种新的图像压缩方法，深入研究了正交小波包在图像压缩中的分解与重构算法，详细介绍了正交小波最优基的选取，并应用 MATLAB 软件进行仿真实验。仿真结果显示，该方法压缩比大，信息损失小，能够较好恢复原有图像。

关键词　正交小波，图像压缩，小波包，最优基

Algorithm of Image Compression Based on Orthogonal Wavelet Packet

QIN Huan-chang[1]　WEI Jia-ru[2]
(Department of Physica and Eletric Information Project[1], Department of Computer and Information, Baise College[2], Baise Guangxi 533000, China)[2]

Abstract　This paper presents a new method of image compression, algorithms of image decomposition and reconstruction based on orthogonal wavelet packet are studied deeply, best basis of orthogonal, the method of selecting best basis in wavelet packets is introduced in detail, and simulated by using MATALAB7. The results show that it is an efficient compression method owing to a larger compression ratio, a less loss of information, and better performance of recovering the original image.

Keywords　Orthogonal wavelet, Image compression, Wavelet packet, Best basis

1　引言

小波变换将图像分解成不同的子带，同时具有良好的空间-频率特性，拥有实现图像中的平稳成分与非平稳成分分离的固有优势。因此，基于小波变换的图像压缩成为一种新的图像压缩技术并且发展迅速。在一些研究中（如图像压缩与降噪），需要对高频部分的信号进行再分解，这就是小波包分解。小波包是由 Meyer，Coifman 和 Wickerhauser 在 1989 年引入的。他们在研究正交小波基的基础上创立了正交小波包方法，以后又发展成半正交小波包和广义小波包。为了解决对称性和精确信号重构的不相容性，引入了双正交小波，这种称为对偶的两个小波分别用于信号的分解与重构。同时，它还很好地解决了正交性与线性相位要求的矛盾。在图像压缩中，小波基的选择关系到系统设计和压缩的质量。一般考虑选择正交小波基，这是因为它能构造出具有线性相位的、正则性的、完全重构的 FIR 滤波器。

2　正交小波包算法

2.1　正交小波包分解算法

正交小波包变换算法可采用递推方法实现。不失一般性，假定 $f(t)\in U_j^n\ (j\geqslant 0, n\geqslant 0)$。$f(t)$ 在 U_j^n 的投影系数为 $\{S_k^{nj}\}_{k\in Z}$，即

$$f(t)=\sum_{k\in Z} S_k^{n,j}\left(2^{-j/2}\mu_n(2^{-j}t-k)\right) \tag{1}$$

因为 $U_j^n=U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1}$，则有 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$，$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分别为 $f(t)$ 在 U_{j+1}^{2n} 和 U_{j+1}^{2n+1} 中的投影[1]。则由(1)式可得

$$\begin{aligned} f_1(t)&=\sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} h_{k-2l}^{*} S_k^{n,j}\left(2^{-(j+1)/2}\mu_{2n}(2^{-(j+1)}t-l)\right)\\ &=\sum_{l\in Z} S_l^{2n,(j+1)}\left(2^{-(j+1)/2}\mu_{2n}(2^{-(j+1)}t-l)\right)\end{aligned}$$

所以

$$S_l^{2n,(j+1)}=\sum_{k\in Z} h_{k-2l}^{*} S_k^{n,j}=F_0\{S_k^{n,j}\} \tag{2}$$

类似有

$$S_l^{(2n+1),(j+1)}=\sum_{k\in Z} g_{k-2l}^{*} S_k^{n,j}=F_1\{S_k^{n,j}\} \tag{3}$$

由(2)式和(3)式可以得到快速计算小波包变换的递推算法[2]。由 $\{S_k^{0,0}\}$ 开始，排成如图 1(a)所示的树状运算流图，其对应的空间分解如图 1(b)所示。

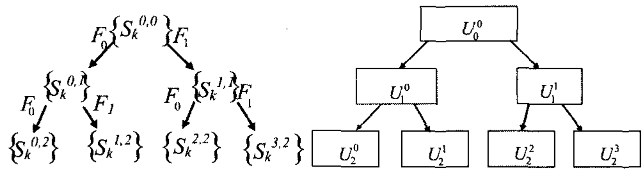

图 1　小波包变换的分解算法

2.2　正交小波包重构算法

由于小波包算子满足 $F_0^* F_0+F_1^* F_1=I$，因此有

$$F_0^* F_0\{S_k^{n,j}\}+F_1^* F_1\{S_k^{n,j}\}=S_k^{n,j}$$

在上式中应用(2)式得。

$$S_k^{n,j}=F_0^*\{S_k^{2n,(j+1)}\}+F_1^*\{S_k^{(2n+1),(j+1)}\} \tag{4}$$

上式可用图 2 所示滤波器组实现。

3　最佳小波包基的选择

小波库中有许多组小波包基。对于不同信号分析的要

覃焕昌　在职硕士研究生，高级实验师，工程师。

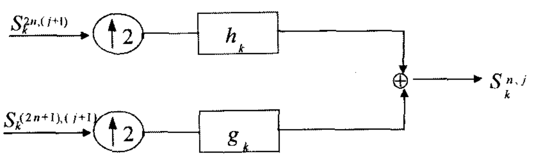

图 2 用于正交小波包重构的滤波器组

求，如何选择一组最优小波包基，就是本小节需讨论的内容。在尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 确定后，小波包基的选择问题，实质上就是 U_0^0 空间分解方案的选择问题。这包含两方面的内容，即最优代价函数的选取和取得最优方案的搜索方法的确定[3]。

3.1 最优代价函数

代价函数可以定义为关于序列 x_i 的实函数 M。M 可以依据不同的信号分析要求而选择。例如，若利用小波包进行子带分解，然后再进行自适应滤波，可选择输入信号 x_n 与参考输入信号 y_n 之间的互相关函数为代价函数；若利用小波包进行信号分类，可选择表征两序列相对信息含量的“相对熵”(relative entropy)为代价函数；若利用小波包进行数据压缩，可选择那些能测得集中度并具有可加性的代价函数。集中度是指当各序列值差不多大时，M 应较大，反之 M 应较小；可加性是指 $M(0)=0$ 并且 $M(\{x_i\})=\sum_i M(x_i)$。具有此性质的代价函数有许多钟。例如：M 为序列中 x_i 的绝对值大于某一门限值 $\varepsilon>0$ 的 x_i 的个数；M 为序列的信息熵，即 $M(x)=-\sum_j P_j \log P_j$，而 $P_j=|x_j|^2/\|x\|^2$，且 $P=0$ 时，$P\log P=0$；M 为对数熵，即 $M(x)=\sum_j \log|x_j|^2$，且 $\log 0=0$ 等等。

3.2 最优方案的搜索方法

最优方案的搜索方法主要有：单树算法；时变小波包分解算法；时变滤波器组。单树算法将全部信号 $\{S_k^{0,0}\}_{k\in Z}$ 作为整体输入，使用小波包分解，得到最优的频域分解方案，但某些信号的性质是时变的，对它们的最优分解方案应是在不同的时间段取不同的小波包分解方案，即实现时变分解；由于使用时变小波包分解算法，信号在不同的时间段将有不同的最优子空间分解方案，这将在时间段边界由于过渡过程产生所谓“分块效应”，影响小波包变换的精度。时变滤波器组可以实现在不同的时间段取不同的小波包分解，又可减弱分块效应[4]。故本文以时变滤波器组作最优方案的搜索方法。

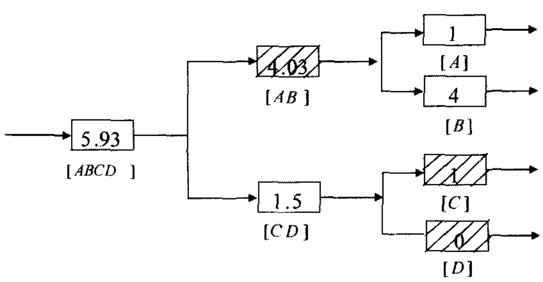

图 3 滤波器组分段方案图

假定滤波器组按图 3 分段方案，在 n_0 时刻小波包变换应由 AB 段滤波器组(记为 $H_0^{(AB)}, G_0^{(AB)}, H_1^{(AB)}, G_1^{(AB)}$)转向 C 段滤波器组(记为 $H_0^{(C)}, G_0^{(C)}, H_1^{(C)}, G_1^{(C)}$)，如图 4。

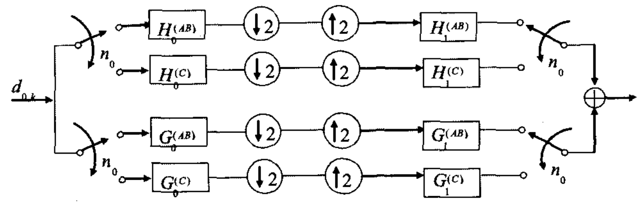

图 4 分块效应

不失一般性，令各滤波器长度为 8。若按图 4 所示，分析滤波器组和综合滤波器组同时在 n_0 时刻转换，那么在(n_0, n_0+5)期间 $H_0^{(AB)}, G_0^{(AB)}, H_1^{(AB)}, G_1^{(AB)}$ 的输出将得不到利用，同时 $H_0^{(C)}, G_0^{(C)}, H_1^{(C)}, G_1^{(C)}$ 由于过渡过程其输出也未达到稳定值，从而产生“分块效应”。为抑制分块效应，可将滤波器组设计为参数时变的滤波器组，其中分析滤波器组在 n_0 时刻由 $H_0^{(AB)}, G_0^{(AB)}$ 分别变为 $H_0^{(C)}, G_0^{(C)}$ 参数，而综合滤波器组都必须设计成五组参数时变的滤波器组。$n<n_0$ 和 $n\geqslant n_0+6$ 时分别为 $H_1^{(AB)}(G_1^{(AB)})$ 及 $H_1^{(c)}(G_1^{(c)})$ 的参数，而在(n_0, n_0+2)，(n_0+2, n_0+4)，(n_0+4, n_0+6)时间段分别为不同参数的三组中间滤波器组。这是因为在这三个时间段，综合滤波器的输入实际上是 $H_0^{(AB)}(G_0^{(AB)})$ 与 $H_0^{(C)}(G_0^{(C)})$ 输出的混合数据，如图 5 所示。为使滤波器组之间满足完全重构条件，必须增加三组中间滤波器参数。

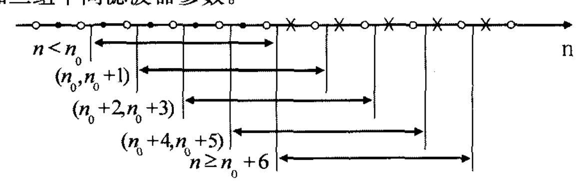

图 5 过渡期的混合数据

中间滤波器组参数的设计可依据完全重构条件(PR 条件)进行。由 PR 条件的时域表达式可知，综合滤波器组的单位取样响应矢量 g 应由方程组 $A(n)g=e_k$ 确定，而

$$A^T(n)=\begin{bmatrix} [\lambda(n)H] & , & 0 & , & 0 & , & \cdots & , & 0 \\ 0 & , & [\lambda(n-1)H] & , & 0 & , & \cdots & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & [\lambda(n-2)H] & , & \cdots & , & 0 \\ \vdots & , & \vdots & , & \vdots & , & & , & \vdots \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & \cdots & , & [\lambda(n-N+1)H] \end{bmatrix}$$

式中 H 为分析滤波器组的单位响应矩阵。现令$[AB]$段的分析滤波器组的单位响应矩阵为 H_a，$[c]$段的分析滤波器组的单位响应矩阵为 H_b，则在 $n=n_0$ 时刻由于 H_a 变为 H_b 则有

$$A^T(n_0)=\begin{bmatrix}[\lambda(n_0)H_b] & , & 0 & , & 0 & , & \cdots & , & 0\\ 0 & , & [\lambda(n_0-1)H_a] & , & 0 & , & \cdots & , & 0\\ 0 & , & 0 & , & [\lambda(n_0-2)H_a] & , & \cdots & , & 0\\ \vdots & , & \vdots & , & \vdots & , & & , & \vdots\\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & \cdots & , & [\lambda(n_0-N+1)H_a]\end{bmatrix}$$

而在 $n=n_0+1$ 时刻则为

$$A^T(n_0+1)=\begin{bmatrix}[\lambda(n_0+1)H_b] & , & 0 & , & 0 & , & \cdots & , & 0\\ 0 & , & [\lambda(n_0)H_b] & , & 0 & , & \cdots & , & 0\\ 0 & , & 0 & , & [\lambda(n_0-1)H_a] & , & \cdots & , & 0\\ \vdots & , & \vdots & , & \vdots & , & & , & \vdots\\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & \cdots & , & [\lambda(n_0-N+2)H_a]\end{bmatrix}$$

如此继续，直到 H_a 全部被 H_b 替换为止。

值得注意的是，在中间滤波器参数作用的过渡期，滤波器组的输出不是真正的小波包变换，但只有滤波器长度与各段数据长度相比是足够的小，其误差不会太大。

4 自适应扫描次序的确定及图像压缩编码算法

4.1 自适应扫描次序的确定

(1)小波包系数的带间自适应扫描策略

小波包系数的子带间自适应扫描过程如下[5]：

步骤 1 对于小波包分解得到的每一个子带计算子带内小波包系数的样本平均值；

步骤 2 计算出子带内小波包系数的标准差；

步骤 3 依据标准差 S 值(通过比较大小)，确定子带的带间扫描次序。

(2) 小波包系数的带内自适应扫描策略

步骤 1 首先通过计算子带内小波包系数的重要程度初步确定扫描次序。即对子带内小波包系数(按照绝对值大小)排序，并以此初步确定小波包系数扫描编码时的优先顺序(大者优先)；

步骤 2 再通过计算子带小波包系数所处背景亮度确定子带内小波包系数的最终扫描顺序。

4.2 基于小波包变换的图像压缩编码算法

基于小波包变换的图像压缩编码算法主要包含 3 个部分[6]：1)选择最佳小波包基，进行小波包分解以计算出小波包系数。2)将最佳小波包基所对应的分解结构作为编码器的头信息输出。3) 确定小波包系数的扫描次序，并依次对小波包系数进行编码。

5 计算机仿真研究

为验证算法的有效性，采用 MATLAB7.0 进行仿真。在仿真中，按照如下步骤进行，首先对图像信号进行小波包分解，然后按时变滤波器组作最优方案的搜索方法寻找最优小波包基，接着对小波包分解系数进行阈值量化，最后根据量化处理系数，进行小波包重构。采用小波包最优基对图像进行数据压缩，代价函数选取信息熵，采用时变滤波器组算法来寻找最优基，分解水平为 3，硬阈值处理方法，阈值设为 30，最大尺度上的剩余尺度函数不进行阈值处理，阈值处理后小波系数零元素的个数与总元素个数之比为 86.5%，阈值处理后非零元素的范数之和与阈值处理前所有元素的范数之和之比 97%，仿真结果如图 6 所示，其中图 a 为原始图像，图 b 为重建图像，可见重建后的图像能很好地保持原有波形图的信息，效果令人满意，是一种有效的压缩方法。

a 原始图像

b 重建图像

图 6 仿真结果

结束语 小波包具有能将空间做精细分解的性质，非常适合于进行图像数据的压缩。当然，在不同的应用中，何种小波更加有效仍值得关注。若要进一步提高图像的压缩率，还需要综合利用多种其他技术，小波编码及分形编码各有优势，在特定应用条件下，使用它们有机结合的编码技术去提高压缩比，将是今后一段时期发展的主要方向。对于小波编码，诸如变换系数的有效组织、小波最优基的选取、多小波和小波包等技术仍将是一个值得研究的课题。

参考文献

[1] 徐佩霞. 小波分析与应用实例[M]. 安徽：中国科学技术大学出版社，2001：161-164

[2] 李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现[M]. 重庆：重庆出版社，1997

[3] 李弼程. 小波分析与应用[M]. 北京：电子工业出版社，2005：77-104

[4] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安：西安交通大学出版社，1999

[5] 徐昊，俞军，骆晓，等. 基于小波分析的一种自适应图像压缩编码[J]. 计算机工程与应用，2002，38(4)：72-75

[6] 徐林，邱敏华，高昌淑，等. 一种基于小波变换图像压缩编码方法[J]. 复旦大学学报(自然科学版)，2004，43(1)：115-118