

# 具有保留效用的一般网络价格竞争博弈的寡占均衡<sup>\*</sup>

洪永发<sup>1,2,3</sup> 徐娟<sup>1,2</sup> 蒋昌俊<sup>1,2</sup>

(同济大学计算机科学与技术系 上海 201804)<sup>1</sup> (教育部嵌入式系统与服务计算重点实验室 上海 201804)<sup>2</sup>  
(山东科技大学信息科学与工程学院 青岛 266510)<sup>3</sup>

**摘要** 本文讨论了具有保留效用的一般网络的多个服务提供商之间的价格竞争博弈问题。给出了用户均衡的定义,并证明了其存在性、唯一性和连续性。由服务提供商所给价格和对应价格的用户均衡,给出了寡占均衡和严格寡占均衡的定义。根据 Wardrop 原理,给出了给定价格下用户均衡流量分配的特征刻画。本文还讨论了寡占均衡和严格寡占均衡的性质,给出严格寡占均衡价格的特征刻画,并用并行链路网络例证了文章的主要结果。

**关键词** 价格竞争博弈,均衡,寡占,保留效用,均衡价格

## Oligopoly Equilibrium Price of Price Competition Game with Reserved Utility in General Networks

HONG Yong-fa<sup>1,2,3</sup> XU Juan<sup>1,2</sup> JIANG Chang-jun<sup>1,2</sup>

(Department of Computer Science and Technology, Tongji University, Shanghai 201804, China)<sup>1</sup>

(Key Lab of Embedded System and Service Computing of the Ministry Education, Tongji University, Shanghai 201804, China)<sup>2</sup>

(College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China)<sup>3</sup>

**Abstract** This paper discusses the price competition game among multiple service providers in a general network with reserved utility. We give the definition of user equilibrium, show its existence, uniqueness and continuity with respect to price, and then define the oligopoly equilibrium as the equilibrium prices set by the service provider and the corresponding user equilibrium. For a given price, we provide a characterization of the user equilibrium of flow rates under the Wardrop assumption. Furthermore, we discuss some properties of the oligopoly equilibrium and strict oligopoly equilibrium and explicitly characterize the oligopoly equilibrium price. We also illustrate our main result with parallel link network.

**Keywords** Price competition game, Equilibrium, Oligopoly, Reserved utility, Equilibrium price

## 1 引言

博弈论(game theory)是使用严谨的数学模型研究给定信息结构下最优决策问题的理论,其主要由三种基本元素组成:一是参与人的集合;二是给定的信息结构;三是效用函数,又称偏好、收益或支付函数<sup>[1]</sup>。许多网络行为也可以被理解为某种博弈问题<sup>[2-8]</sup>。

价格竞争博弈是一类特殊的两阶段非合作博弈。在第一阶段各个不同的网络服务提供商同时选择其所拥有链路(路径)的价格,而后在价格已知的情况下,用户根据对应的用户均衡分配传输其数据流量。由于某一服务提供商的利润需依赖于其他服务提供商所给出价格,因此各服务提供商之间存在价格竞争。寡占均衡是价格竞争博弈的一类均衡状态。

文献[2-4]研究了并行链路网络的价格竞争博弈问题。文献[2]给出了垄断均衡和寡占均衡的定义及均衡条件下的均衡价格特征,证明了垄断均衡解与社会最优解之间的等价性。文献[3]证明了在保留效用的条件下,如果链路延迟仅仅由流量引起时,则价格竞争博弈的纯策略寡占均衡可以取得至少 5/6 的效率,并且该下界是紧的。文献[4]则证明了在弹性效用函数的条件下,如果链路延迟仅仅由流量引起时,则价格竞争博弈的纯策略寡占均衡可以取得至少 2/3 的效率,并且该下界是紧的。文献[5]证明了在保留效用函数的条件下,如果链路延迟仅仅由流量引起时,对于并行路径网络,其

价格竞争博弈的强寡占均衡可以取得至少 1/2 的效率,并且该下界是紧的。然而在纯策略寡占均衡条件下,其效率可能任意地差。文献[6-8]也研究了均衡的效率问题,然而这些文献是从用户的角度出发,考虑了由于用户的自私行为所造成的效率损失测度。在这过程中,没有涉及服务提供商之间的非合作行为。

而本文的目的是研究一般网络拓扑结构下网络服务提供商之间价格竞争博弈的寡占均衡的性质。相比较文献[2-5]所研究的并行链路网络或并行路径网络,一般拓扑网络由于结构复杂,因此研究起来相对更困难。文献[10]作为文献[2]结论在一般网络拓扑结构下的推广,也研究了一般网络拓扑结构下价格竞争博弈的效率损失问题,然而文献[10]只研究了垄断均衡的效率损失问题,并证明了在垄断均衡情形下,垄断均衡可以达到社会最优,即效率没有损失。而寡占均衡却没有如此好的性质,正如文献[5]所指出,对并行路径网络,其纯策略寡占均衡的效率可能任意地差。因此,研究一般拓扑网络的价格竞争博弈的寡占均衡的性质具有重要的理论和应用价值。

## 2 网络模型与假设

对一有向图  $G = (V, E)$ , 其中  $V$  是所有网络结点的集合,  $E$  是有向链路的集合。在网络中存在  $m$  个源-目的(OD)对  $\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, \dots, \{s_m, t_m\}$ , 记所有 OD 对的集合为  $M$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(Nos. 60473094)、上海市科技研究基金(Nos. 05JC14063)、上海市登山行动重点基础研究项目(Nos. 06JC14065)。

$= \{1, 2, \dots, m\}$ 。在每一 OD 对之间存在一条或多条路径连接此 OD 对的源端和目的端。记连接 OD 对  $\{s_k, t_k\}$  的源端和目的端的所有路径集合为  $P_k$ , 网络中所有路径的集合为  $P = \bigcup_{k \in M} P_k$ 。记  $f_k^e$  为 OD 对  $k$  在路径  $p$  上分配的流量的大小, 其中  $p \in P_k$ 。记  $f^e = \sum_{k \in M(p|e \in p, p \in P_k)} f_k^e$  为链路  $e$  上所有 OD 对流量的总和,  $f_k = \sum_{p \in P_k} f_k^p$  为 OD 对  $k$  在所有路径上的流量之和。网络中的每条链路都伴随一个基于流量的延迟函数  $l^e(f^e)$  ( $e \in E$ ), 因此沿着路径  $p$  传输一单位流量所导致的延迟费用为  $\sum_{e \in p} l^e(f^e)$ 。至于服务费用, 每个网络服务提供商对使用路径  $p$  的 OD 对收取价格为  $q^p$  的单位带宽费用, 记  $q = [q^p]_{p \in P}$  为价格向量。链路延迟是由通信链路本身的特性所决定的, 而单位流量价格则是由提供该路径的服务提供商所设定。设每个 OD 对  $k$  均有一个保留效用  $R_k$  ( $R_k > 0$ ) ( $k \in M$ ), 当有效费用超过其保留效用时, 其将不往网络传输任何流量。每个 OD 对  $k$  想要传输的总的流量记为  $d_k$  ( $d_k > 0$ )。

本文对链路的延迟函数作如下假设:

**假设 1** 对任意  $e \in E$ , 延迟函数  $l^e: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  是非负的、严格递增的、连续可微的凸函数, 且满足  $l^e(0) = 0$ 。

本文采用 Wardrop 原理来定义给定价格向量的流量分配, Wardrop 原理在交通网络和通信网络的研究中已经得到了较为广泛的应用<sup>[2-8]</sup>。具体地, 有下述 Wardrop 均衡的定义:

**定义 1** 对给定的价格向量  $q = [q^p]_{p \in P} \geq 0$ , 向量  $f^{WE} \geq 0$  如果满足

$$(f_k^{WE})_{k \in M} \in \arg \max_{f \geq 0} \left\{ \sum_{p \in P_k} (R_k - \sum_{e \in p} l^e(f^e) - q^p) f_k^p \mid \sum_{p \in P_k} f_k^p \leq d_k \right\}, f^e = \sum_{k \in M(p|e \in p, p \in P_k)} (f_k^{WE})^e, \forall e \in E$$

则称  $f^{WE} \geq 0$  为一 Wardrop 均衡 (WE)。记价格向量  $q$  所对应的 Wardrop 均衡点集合为  $W(q)$ 。

由上述优化问题的最优性条件, 我们可得向量  $f^{WE} \geq 0$  为一 Wardrop 均衡 (WE) 当且仅当  $\sum_{p \in P_k} (f_k^{WE})^p \leq d_k$ , 且存在  $\lambda_k \geq 0$  ( $k \in M$ ) 满足  $\lambda_k (\sum_{p \in P_k} (f_k^{WE})^p - d_k) = 0$ , 及对任意的  $p \in P_k, k \in M$  有

$$R_k - \sum_{e \in p} l^e(f^e) - q^p \leq \lambda_k, \text{ 如果 } (f_k^{WE})^p = 0; R_k - \sum_{e \in p} l^e(f^e) - q^p = \lambda_k, \text{ 如果 } (f_k^{WE})^p > 0, \\ \text{其中 } f^e = \sum_{k \in M(p|e \in p, p \in P_k)} (f_k^{WE})^e, \forall e \in E.$$

由 Wardrop 均衡的定义, 可得如下向量  $f^{WE} \geq 0$  为一 Wardrop 均衡的一个刻画结论, 由于证明过程是直接的, 本文省略其证明。

**引理 1** 对一给定的价格向量  $q = [q^p]_{p \in P} \geq 0$ , 向量  $f^{WE} \geq 0$  为一 Wardrop 均衡当且仅当

$$\sum_{e \in p_i} l^e(f^e) + q^{p_i} = \min_{p_j \in P_k, e \in p_j} \{ \sum_{e \in p_j} l^e(f^e) + q^{p_j} \}, \forall p_i \text{ 满足 } f_{p_i}^{WE} > 0, \forall k \in M \\ \sum_{e \in p_i} l^e(f^e) + q^{p_i} \leq R_k, \forall i \text{ 满足 } f_{p_i}^{WE} > 0, p_i \in P_k, \forall k \in M \\ \sum_{p \in P_k} f_k^p \leq d_k, \forall k \in M$$

此外, 如果  $\min_{p_j \in P_k, e \in p_j} \{ \sum_{e \in p_j} l^e(f^e) + q^{p_j} \} < R_k$ , 则有  $\sum_{p \in P_k} f_k^p = d_k$ 。

**引理 2** 如果假设 1 条件满足, 则对任意给定的价格向量  $q = [q^p]_{p \in P} \geq 0$ , 其所对应的 Wardrop 均衡点集合  $W$

( $q$ ) 为单点集, 且  $W(q)$  是连续的。

证明: 对任意给定的价格向量  $q = [q^p]_{p \in P} \geq 0$ , 我们考察如下优化问题:

$$\max_{f \geq 0} \sum_{k \in M} \sum_{p \in P_k} ((R_k - q^p) f_k^p) - \sum_{p \in P} q^p f^p \leq d_k, \forall k \in M \\ \sum_{e \in p} \int_0^{\sum_{k \in M(p|e \in p, p \in P_k)} (f_k^e)} l^e(z) dz$$

显然上述优化问题的可行集是非空的凸集。由假设 1 的链路延迟函数的严格递增性知上述优化问题的目标函数是严格凸函数。因此其一阶最优性条件也是其充分条件。考察其一阶最优性条件知其与向量  $f^{WE} \geq 0$  为一 Wardrop 均衡 (WE) 的充要条件是一致的。因此向量  $f^{WE} \geq 0$  为一 Wardrop 均衡 (WE) 当且仅当其为上述优化问题的最优解。由于上述优化问题的目标函数是连续函数, 且其可行集为紧集, 因此存在最优解。同时, 由于目标函数是严格凸函数, 因此最优解是唯一的。所以 Wardrop 均衡点集合  $W(q)$  为单点集。  $W(q)$  的连续性则可由文献[10]中的最大值定理直接得出。

证毕。

有了 Wardrop 均衡的定义, 我们就可以定义网络服务提供商在给定价格条件下其所得的利润。具体的有: 在给定其他服务提供商单位流量价格向量  $q^{-p} = [q^k]_{k \neq p}$ , 拥有链路  $p$  的服务提供商在设定其单位流量价格为  $q^p$  时的利润为  $\Pi_p(q^p, q^{-p}) = q^p f^p$ ,  $f^e = \sum_{k \in M(p|e \in p, p \in P_k)} (f_k^{WE})^e, \forall e \in E$ , 其中  $f \in W(q^p, q^{-p})$  为给定价格向量下的 Wardrop 均衡流量。

**定义 2** 向量  $(q^{OE}, f^{OE}) \geq 0$  如果满足

$$f^{OE} \in W((q^p)^{OE}, (q^{-p})^{OE})$$

$$\Pi_p((q^p)^{OE}, (q^{-p})^{OE}, f^{OE}) \geq \Pi_p(q^p, (q^{-p})^{OE}, f), \forall q^p \geq 0, f \in W(q^p, (q^{-p})^{OE})$$

则称  $(q^{OE}, f^{OE}) \geq 0$  为一纯策略寡占均衡,  $q^{OE}$  为寡占价格。进一步地, 如果对任意  $0 \leq q^p \neq (q^p)^{OE}$  及任意的  $f \in W(q^p, (q^{-p})^{OE})$  均有  $\Pi_p((q^p)^{OE}, (q^{-p})^{OE}, f^{OE}) > \Pi_p(q^p, (q^{-p})^{OE}, f)$ , 则称  $(q^{OE}, f^{OE})$  为一严格寡占均衡,  $q^{OE}$  为严格寡占价格。

### 3 纯策略寡占均衡的价格特征刻画

在本节, 我们给出在寡占均衡条件下, 各网络服务提供商所给价格的特征刻画。首先我们证明一个引理:

**引理 3** 设  $(q^{OE}, f^{OE}) \geq 0$  为一寡占均衡, 且假设 1 条件满足, 记  $\Pi_p = \Pi_p((q^p)^{OE}, (q^{-p})^{OE}) = (q^p)^{OE} (f^p)^{OE}$  为拥有路径  $p$  的网络服务提供商所得利润。设  $\bar{P}_k = \{p | p \in P_k, (f_k^{OE})^p > 0\}$ ,  $\bar{P} = \bigcup_{k \in M} \bar{P}_k$ , 则对任意  $p \in \bar{P}$ , 有  $(q^p)^{OE} > 0$ 。

证明: (反证法) 假设存在  $p' \in \bar{P}_k$ , 使得  $(q^{p'})^{OE} = 0$ 。由于  $p' \in \bar{P}_k$ , 因此有  $(f_k^{OE})^{p'} > 0$ , 所以存在正数  $\varepsilon > 0$ , 使得  $(f_k^{OE})^{p'} > \varepsilon > 0$ 。定义一个新的价格向量如下

$$\bar{q}^p = (q^p)^{OE} + \sum_{e: e \in p, e \in p'} (l^e((f^e)^{OE}) - l^e((f^e)^{OE} - \varepsilon)), \\ \forall p \in P_k, k \in M$$

由于延迟函数是严格递增的, 因此有  $\bar{q}^p > (q^p)^{OE}, \forall p \in P_k, k \in M$ , 考虑如下流量向量:

$$\bar{f}_k^{p'} = (f_k^{OE})^{p'} - \varepsilon; \bar{f}_k^p = (f_k^{OE})^p, \text{ 其他}$$

下面我们将证明  $\bar{f}$  为对应价格向量  $\bar{q}$  下的 Wardrop 均衡。由上式可得

$$\bar{f}^e = (f^e)^{OE} - \varepsilon, e \in p'; \bar{f}^e = (f^e)^{OE}, \text{ 其他}$$

对任意的  $p \in P_k$ , 由  $(q^{OE}, f^{OE})$  为寡占均衡有

$$R_k \leq \sum_{e \in p} l^e((f^e)^{OE}) + (q^p)^{OE} = \sum_{e \in p} l^e((f^e)^{OE}) + \bar{q}^p - \sum_{e \in p, e \in p'} (l^e((f^e)^{OE}) - l^e((f^e)^{OE} - \varepsilon)) = \sum_{e \in p} l^e((f^e)^{OE}) + \bar{q}^p - \sum_{e \in p, e \in p'} (l^e(f^e) - l^e(\bar{f}^e)) = \sum_{e \in p} l^e(\bar{f}^e) + \bar{q}^p$$

且由于  $\bar{f}_k^e > 0$  当且仅当  $(f_k^e)^{OE} > 0$ , 因此当  $\bar{f}_k^e > 0$  上述不等式等号成立。类似地, 对任意的  $p \in P_k, k \neq k'$ , 有

$$R_k \leq \sum_{e \in p} l^e((f^e)^{OE}) + (q^p)^{OE} = \sum_{e \in p} l^e((f^e)^{OE}) + \bar{q}^p - \sum_{e \in p, e \in p'} (l^e((f^e)^{OE}) - l^e((f^e)^{OE} - \varepsilon)) = \sum_{e \in p} l^e((f^e)^{OE}) + \bar{q}^p - \sum_{e \in p, e \in p'} (l^e(f^e) - l^e(\bar{f}^e)) = \sum_{e \in p} l^e(\bar{f}^e) + \bar{q}^p$$

因此有  $\bar{f}_k^e \bar{q}^p > 0, \bar{f}_k^e \bar{q}^p > (q^p)^{OE} (f_k^e)^{OE}$ , 这与  $(q^{OE}, f^{OE})$  为寡占均衡矛盾。因此对任意  $p \in \bar{P}$ , 均有  $(q^p)^{OE} > 0$ 。证毕。

**引理 4** 设  $(q^{OE}, f^{OE}) \geq 0$  为一严格寡占均衡, 且假设 1 条件满足, 记  $\Pi_p = \Pi_p((q^p)^{OE}, (q^{-p})^{OE}) = (q^p)^{OE} (f^p)^{OE}$  为拥有路径  $p$  的网络服务提供商所得利润, 则对任意  $p \in P$ , 有  $\Pi_p = (q^p)^{OE} (f^p)^{OE} > 0$ 。

**证明:** (反证法) 假设存在  $p \in P$ , 有  $\Pi_p = (q^p)^{OE} (f^p)^{OE} = 0$ , 则对任意  $q^p > (q^p)^{OE}$  的价格  $q^p$  及任意的  $f \in W(q^p, (q^{-p})^{OE})$ , 有  $\Pi_p(q^p, (q^{-p})^{OE}, f) \geq 0 = \Pi_p((q^p)^{OE}, (q^{-p})^{OE}, f^{OE})$  这与  $(q^{OE}, f^{OE}) \geq 0$  为一严格寡占均衡矛盾。

**证毕。**

**定理 1** 设  $(q^{OE}, f^{OE}) \geq 0$  为一个严格寡占均衡, 且假设 1 条件满足。则有

(1) 如果  $\min_{p' \in P_k} \{ \sum_{e \in p'} l^e(f^e) + (q^{p'})^{OE} \} < R_k$ , 则对任意的  $p_k^n \in P_k$ , 严格寡占均衡价格可表示为

$$(q^{p_k^n})^{OE} = (f_{p_k^n}^{p_k^n})^{OE} \sum_{e \in p_k^n} l^e(f^e) + \sum_{i \neq n} \frac{D_i}{D} \sum_{e \in p_k^n, e \in p_k^i} l^e(f^e) - \frac{D_k}{D}$$

其中  $D, D_i, D_k$  的意义在证明过程中自然明了。

(2) 如果  $\min_{p_j \in P_k} \{ \sum_{e \in p_j} l^e(f^e) + q^{p_j} \} = R_k$ , 则对任意的  $p_k^n \in P_k$ , 严格寡占均衡价格可表示为  $(q^{p_k^n})^{OE} = R_k - \sum_{e \in p_k^n} l^e(f^e)$ 。

**证明:** 记  $I_k = \{1, 2, \dots, |P_k|\}$  为路径集合  $P_k$  的指标集,  $p_k^i$  为源-目的对  $k$  的第  $i$  条路径。由于  $(q^{OE}, f^{OE}) \geq 0$  为一个严格寡占均衡, 因此由引理 4 可知对任意  $p \in P$ , 有  $\Pi_p = (q^p)^{OE} (f^p)^{OE} > 0$  成立。因此对任意的  $p_k^i \in P_k, k \in M$ ,  $((q^{p_k^i})^{OE}, f^{OE})$  为下列优化问题的最优解:

$$\begin{aligned} \max_{\substack{p_k^n \geq 0 \\ f \geq 0}} & q^{p_k^n} f_{p_k^n}^{p_k^n} \\ \text{s. t. } & \sum_{e \in p_k^n} l^e(f^e) + q^{p_k^n} = \sum_{e \in p_k^n} l^e(f^e) + (q^{p_k^i})^{OE}, \forall p_k^i \in P_k, \\ & p_k^i \neq p_k^n \end{aligned}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} \sum_{e \in p_k^1} l^e(f^e) & \dots & (f_{p_k^1}^{p_k^1})^{OE} & \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^i} l^e(f^e) & \dots & \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^i} l^e(f^e) & -1 \\ \vdots & & & & & \vdots & -1 \\ \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^i} l^e(f^e) & \dots & (f_{p_k^i}^{p_k^i})^{OE} & \sum_{e \in p_k^i, e \in p_k^i} l^e(f^e) & \ddots & \sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) & \vdots \\ 1 & \dots & -(f_{p_k^i}^{p_k^i})^{OE} & \dots & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) + (q^{p_k^i})^{OE} & \leq R_k, \forall p_k^i \in P_k \\ \sum_{p_k^i \in P_k} f_{p_k^i}^{p_k^i} & \leq d_k, f^e = \sum_{k \in M} \sum_{p \in P_k} (f_k^p), \forall e \in E \end{aligned}$$

上述优化问题的 Lagrangian 函数为

$$\begin{aligned} L(q^p, f, \mu, \lambda, \varepsilon_k) &= q^{p_k^n} f_{p_k^n}^{p_k^n} + \varepsilon_k (\sum_{p_k^i \in P_k} f_{p_k^i}^{p_k^i} - d_k) + \sum_{p_k^i \in P_k} \lambda_i (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) + (q^{p_k^i})^{OE} - R_k) + \sum_{i \neq n} \mu_i (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) + q^{p_k^i} - (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) + (q^{p_k^i})^{OE})) \end{aligned}$$

其中  $\mu, \lambda, \varepsilon_k$  分别为对应约束条件的 Lagrange 乘子。由于对任意  $p \in P$ , 有  $\Pi_p = (q^p)^{OE} (f^p)^{OE} > 0$  成立, 因此对任意  $p \in P$ , 有  $(q^p)^{OE} > 0, (f^p)^{OE} > 0$ 。其一阶最优性条件可以表示为

$$\text{由 } \frac{\partial L}{\partial q^{p_k^n}} \Big|_{q^{p_k^n} = (q^{p_k^n})^{OE}} = 0, \text{ 可得 } (f_{p_k^n}^{p_k^n})^{OE} + \sum_{i \neq n} \mu_i + \lambda_n = 0;$$

$$\text{由 } \frac{\partial L}{\partial f_{p_k^i}^{p_k^i}} \Big|_{f_{p_k^i}^{p_k^i} = (f_{p_k^i}^{p_k^i})^{OE}} = 0, \text{ 可得}$$

$$(q^{p_k^n})^{OE} + \sum_{i \neq n} \mu_i (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) - \sum_{e \in p_k^i, e \in p_k^n} l^e(f^e)) + \sum_{p_k^i \in P_k} \lambda_i (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) + \varepsilon_k) = 0;$$

$$\text{由 } \frac{\partial L}{\partial f_{p_k^m}^{p_k^m}} \Big|_{f_{p_k^m}^{p_k^m} = (f_{p_k^m}^{p_k^m})^{OE}} = 0, p_k^m \neq p_k^n, m \in I_k, \text{ 可得}$$

$$\sum_{i \neq n} \mu_i (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) - \sum_{e \in p_k^i, e \in p_k^m} l^e(f^e)) + \sum_{p_k^i \in P_k} \lambda_i (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) + \varepsilon_k) = 0$$

此外, 还必须满足对偶约束条件  $\lambda_i (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) + (q^{p_k^i})^{OE} - R_k) = 0; \varepsilon_k (\sum_{p_k^i \in P_k} f_{p_k^i}^{p_k^i} - d_k) = 0$ 。

$$\text{首先, 如果 } \min_{p_k^i \in P_k} \{ \sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) + (q^{p_k^i})^{OE} \} < R_k, \text{ 则有 } \sum_{p_k^i \in P_k} (f_{p_k^i}^{p_k^i})^{OE} = d_k, \lambda_i = 0, \forall i \in I_k, \varepsilon_k \geq 0. \text{ 因此由上述最优性条件可得}$$

$$\sum_{i \neq n} \mu_i (\sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) - \sum_{e \in p_k^i, e \in p_k^n} l^e(f^e)) + \varepsilon_k = 0,$$

$$m \in I_k, m \neq n; (f_{p_k^m}^{p_k^m})^{OE} + \sum_{i \neq n} \mu_i = 0$$

上述方程为关于  $\mu_i (i \neq n, i \in I_k)$  与  $\varepsilon_k$  的非齐次线性方程组, 由 KKT 条件可知 Lagrange 乘子  $\mu, \varepsilon_k$  肯定存在, 因此上述线性方程组有解, 其解可由克莱姆法则得到。具体有, 如果记系数矩阵行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^1} l^e(f^e) & \dots & \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^1} l^e(f^e) & -1 \\ \vdots & & \vdots & -1 \\ \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^i} l^e(f^e) & \ddots & \sum_{e \in p_k^i} l^e(f^e) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_k = \begin{bmatrix} \sum_{e \in p_k^1} l'(f^e) & \cdots & \sum_{e \in p_k^1} l'(f^e) & (f_k^n)^{OE} & \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^n} l'(f^e) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^1} l'(f^e) & \cdots & \sum_{e \in p_k^1} l'(f^e) & (f_k^n)^{OE} & \sum_{e \in p_k^n, e \in p_k^1} l'(f^e) \\ 1 & \cdots & 1 & -(f_k^n)^{OE} \end{bmatrix}$$

则可得 Lagrange 乘子  $\mu, \epsilon_k$  分别为  $\mu_i = \frac{D_i}{D}, i \neq n, i \in I_k, \epsilon_k =$

$\frac{D_k}{D}$ 。将其代入方程

$$(q_k^n)^{OE} + \sum_{i \neq n} \mu_i \left( \sum_{e \in p_k^n} l'(f^e) - \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^n} l'(f^e) \right) + \epsilon_k = 0$$

则可得严格寡占均衡价格表示为  $(q_k^n)^{OE} = (f_k^n)^{OE} \sum_{e \in p_k^n} l'(f^e) +$

$$\sum_{i \neq n} \frac{D_i}{D} \sum_{e \in p_k^1, e \in p_k^n} l'(f^e) - \frac{D_k}{D} \quad \text{证毕。}$$

#### 4 一类特殊网络——并行链路网络的情形

在本节中,我们将讨论一种特殊拓扑结构的网络,即并行链路网络。这种拓扑结构网络的寡占均衡的性质即效率分析已在文献[3]中得到了较为深入的研究。对这种特殊拓扑结构的网络,由上节所使用的方法,可得关于  $\mu_i (i \neq n, i \in I_k)$  与  $\epsilon_k$  的非齐次线性方程组为

$$\mu_m - \epsilon_k = 0, m \in I_k, m \neq n; (x_n)^{OE} + \sum_{i \neq n} \mu_i = 0$$

其系数矩阵行列式为

$$D = \begin{vmatrix} l'_1(x_1) & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & -1 \\ 0 & \ddots & l'_{|P_k|}(x_{|P_k|}) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i \neq n} l'_i(x_i) \left( \sum_{i \neq n} \frac{1}{l'_i(x_i)} \right)$$

$$D_m = \begin{vmatrix} l'_1(x_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & l'_{|P_k|}(x_{|P_k|}) & \vdots \\ 1 & \cdots & -(x_n)^{OE} & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i \neq n, m} l'_i(x_i) l'_i(x_i) (x_n)^{OE}$$

$$D_k = \begin{vmatrix} l'_1(x_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & l'_{|P_k|}(x_{|P_k|}) & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & -(x_n)^{OE} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i \neq n} l'_i(x_i) (-(x_n)^{OE})$$

因此可得

$$\mu_m = \frac{D_m}{D} = \frac{\prod_{i \neq n, m} l'_i(x_i) (x_n)^{OE}}{\prod_{i \neq n} l'_i(x_i) \left( \sum_{i \neq n} \frac{1}{l'_i(x_i)} \right)}$$

$$= \frac{(x_n)^{OE}}{l'_m(x_m) \left( \sum_{i \neq n} \frac{1}{l'_i(x_i)} \right)}, m \neq n, m \in I_k$$

$$\epsilon_k = \frac{D_k}{D} = \frac{\prod_{i \neq n} l'_i(x_i) (-(x_n)^{OE})}{\prod_{i \neq n} l'_i(x_i) \left( \sum_{i \neq n} \frac{1}{l'_i(x_i)} \right)} = \frac{-(x_n)^{OE}}{\left( \sum_{i \neq n} \frac{1}{l'_i(x_i)} \right)}$$

将其代入方程

$$(q_n)^{OE} + \sum_{i \neq n} \mu_i l'_n(x_n) + \epsilon_k = 0$$

得

$$(q_n)^{OE} = -l'_n(x_n) \sum_{m \neq n} \frac{-(x_n)^{OE}}{l'_m(x_m) \left( \sum_{i \neq n} \frac{1}{l'_i(x_i)} \right)} -$$

$$\frac{-(x_n)^{OE}}{\left( \sum_{i \neq n} \frac{1}{l'_i(x_i)} \right)} = (x_n)^{OE} l'_n(x_n) + \frac{(x_n)^{OE}}{\left( \sum_{i \neq n} \frac{1}{l'_i(x_i)} \right)}$$

这与文献[3]得到的结果是完全一致的,因此本文得到的结果是文献[3]中结果在一般拓扑结构网络情形下的推广,其结论具有一般性。

**结束语** 本文证明在一般拓扑网络结构下,网络服务提供商之间价格竞争博弈的严格寡占均衡的性质,并给出了严格寡占均衡条件下,各网络服务提供商所给价格的特征刻画。进一步的研究工作包括一般网络拓扑结构下具有保留效用或弹性效用函数的价格竞争博弈的纯策略寡占均衡的存在性及其效率分析。同时相应价格竞争博弈的混合策略寡占均衡的存在性及其效率分析也是一个重要的研究方面。

#### 参考文献

- [1] Fudenberg D, Tirole J. Game Theory [M]. The MIT Press, 1991
- [2] Acemoglu D, Ozdaglar A. Flow control, routing, and performance from service provider viewpoint [R]. LIDS report. WP-1696, September 2004
- [3] Acemoglu D, Ozdaglar A. Competition and efficiency in congested markets [J]. Mathematics of Operations Research, 2007, 32(1): 1-31
- [4] Ozdaglar A. Price Competition with Elastic Traffic, Networks, 2006
- [5] Acemoglu D, Ozdaglar A. Competition in Parallel-serial Networks. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2007, 26(6): 1180-1192
- [6] Correa J R, Schulz A S, et al. Selfish Routing in Capacitated Networks [J]. Mathematics of Operations Research, 2004, 29(4): 961-976
- [7] Hayrapetyan A, Tardos E, Wexler T. A network pricing game for selfish traffic [J]. Journal Distributed Computing, 2007, 19: 255-266
- [8] Roughgarden T, Tardos E. How bad is selfish routing [J]. Journal of the ACM, 2002, 49(2): 236-259
- [9] Shenker S. Fundamental design issues for the future Internet [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1995, 13(7): 1176-1188
- [10] Berge C. Topological spaces [M]. Dover Press, 1997