

# 约束三角剖分研究<sup>\*</sup>

陈羽<sup>1</sup> 王相海<sup>1,2</sup>

(辽宁师范大学计算机与信息技术学院 大连 116029)<sup>1</sup>

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027)<sup>2</sup>

**摘要** 约束三角剖分在有限元分析和信息可视化等工程领域具有重要的应用背景,同时是计算几何和计算机辅助几何设计的一个热点问题。本文首先对约束三角剖分进行了分类,然后对其发展及典型算法进行了分析和讨论,最后对约束三角剖分所存在的问题和进一步发展进行了分析。

**关键词** 三角形,约束三角剖分,特性线,Delaunay,三角剖分

## Research of Constrained Triangulation

CHEN Yu<sup>1</sup> WANG Xiang-hai<sup>1,2</sup>

(College of Computer and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)<sup>1</sup>

(State Key of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)<sup>2</sup>

**Abstract** Constrained triangulation plays an important part in finite element analysis and information visualization, also it is a hotspot problem of computational geometry and computer aided geometric design(CAGD). This paper first asorts constrained triangulation, then analyses and discusses its development and representative arithmetic, in the end analyses the problem and farther development of constrained triangulation.

**Keywords** Triangle, Constrained triangulation, Character line, Delaunay triangulation

## 1 引言

三角剖分问题是计算几何和计算机辅助设计与分析中的一个重要问题,它在有限元分析、信息可视化等应用领域有着重要应用,特别在对科学计算和工程分析中不规则的复杂数据场方面,三角剖分网格显示出了较矩形网格更强的适应能力<sup>[1]</sup>。在实际三角应用中,除了按照某一种最优原则进行三角剖分外,通常还要求满足用户所需求的一些约束条件,比如初始集内有某两点之间的连线必须出现在三角剖分中,等等,从而衍生出带约束的三角剖分<sup>[2,3]</sup>。约束三角剖分具有很强的应用背景,比如地学领域中的山脊线、山谷线、断裂线等在进行地学分析的三角剖分过程中通常需要作为一个约束条件,此外,约束三角剖分在计算机视觉、表面对象重建、有限元分析、公路 CAD 技术、机械工件 CAD/CAM 和三维物体模型重构等领域具有广泛的应用<sup>[4-6]</sup>。

本文首先对约束三角剖分进行了分类,然后对各类约束三角剖分的发展情况进行了分析,特别对一些典型算法进行了讨论,最后对约束三角剖分的未来发展情况进行了展望。

## 2 约束三角剖分的分类

设在区域  $D$  内,存在不重合的点列  $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$  及约束线段集合  $\{P_i P_j | i, j \in \{1, 2, \dots, N\}\}$ , 所谓约束三角剖分是指在对  $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$  进行三角剖分所生成的最后的三角网格中包含约束线段集合  $\{P_i P_j | i, j \in \{1, 2, \dots, N\}\}$  中的每条线段<sup>[6,7]</sup>。这样的约束三角剖分总体上可分为两类,即平面约束三角剖分和三维曲面的三角剖分。

### 2.1 平面约束三角剖分

平面约束三角剖分通常还可以分为两类:一类是不明确限定边界的约束三角剖分,该类三角剖分大多应用在地理信息系统中,初始时给出一系列大量的数据高程点,约束条件为在最后的三角剖分中包含诸如等值线、山谷山脊线等实际地理特征线,图 1 是该类约束三角剖分的一个实际例子<sup>[8]</sup>。在该类三角剖分的实现过程中,通常可以通过一种类似于金字塔的结构模型来满足多分辨率的要求,该方案已在虚拟现实和电子地图观测中有着非常广泛的应用<sup>[9]</sup>。另一类是基于限定边界的约束三角剖分,该类三角剖分要求在边界范围内进行三角剖分,这些边界可以是一个简单的矩形,也可以是诸如简单多边形和复杂多边形的一般多边形。此外,在多边形的内部也可以给出一些约束条件,比如孔洞、卷曲、缠绕等(参见图 2)。



图 1 不明确限定边界的约束剖分实例

<sup>\*</sup> 本文受辽宁省高等学校优秀人才支持计划(RC-04-11)、辽宁省自然科学基金(2003205)和辽宁省教育厅科学技术研究项目(20060486)资助。王相海 博士,教授,CCF 高级会员,主要研究领域为 CG、CAGD、多媒体信息处理。

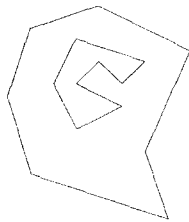


图2 限定边界约束剖分图例

## 2.2 三维表面的三角剖分

三角形本身所固有的特点使得三角剖分被广泛应用于3D曲面重构中,比如在CA GD/CAD、自由曲面设计、计算机视觉、地学等领域的许多应用中都会应用到曲面的三角剖分。该类三角剖分是限制在三维形体的表面上进行,其过程有些类似简单多边形的三角剖分。可以运用Delaunay方法进行三角剖分,即在曲面上将满足Delaunay约束的三角形连接起来,该类方法可以避免曲面的自交<sup>[10]</sup>。此外,也可以结合Voronoi图进行三角剖分<sup>[11-12]</sup>,该类方法的弱点是计算量较大。除了上述传统方法外,近年来还出现了一种区域增长法,即从数据的一点开始,向外逐渐扩散形成三角网格曲面,该类算法简单且速度较快<sup>[13-15]</sup>。

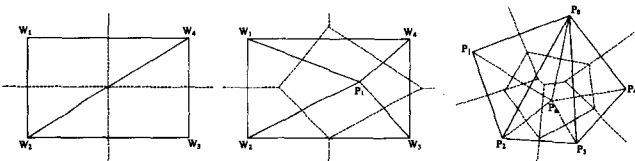
在3D曲面的重构过程中,由于用于剖分的数据点之间可能存在着一定的数据关系,因此仅考虑三维曲面上某一二维多边形内部的约束并不能很好地表达所重构的曲面。此外,考虑到三维表面数据点之间形成表面的复杂性,有时需要添加更多的约束条件来提高三角剖分的效率,比如在形体表面添加一些点来提高三角剖分结果的平整性和光滑性;此外,在三角剖分的过程中,有时会打破传统的在二维三角剖分中的最优三角剖分原则。

## 3 约束三角剖分的算法研究

### 3.1 平面点集的约束三角剖分

大多数约束三角剖分都遵循这样一个原则:首先不考虑特征约束,将数据点用一个足够大的矩形框框起来,并对这些数据点进行无约束Delaunay三角剖分(DT)。此时的三角网格是全局优化的。然后再将特征约束嵌入到这个已有的三角网格当中,并运用Circle等优化准则对其进行优化,最终形成有特征约束的三角剖分。特征约束嵌入方法的不同决定了算法的优劣性。目前使用较多的是插入算法,即把数据点逐个地添加到已有的三角网格当中,因为这样可以动态地改变三角网格数据点的规模。一些典型算法如下<sup>[16-18]</sup>:

(1) 任意多边形内带特征约束的散列数据的最优三角剖分



a)最大外接矩形 b)三角网格的变化 c)新点插入后三角网格的调整

首先建立包含全体数据点的最大外接矩形 $W(W_1, W_2, W_3, W_4)$ ,把 $W$ 剖分为两个初始的大三角形(如图3a),并将其顶点逐个插入其中(如图3b)。新插入的点 $p_1$ 的插入将引起

三角形网格的变化,原先的两个大三角形将变成四个新三角形。如此插入新点,循环下去,直到所有的数据点被插入完毕。下面对新几何点的插入将破坏哪些三角形及如何构造新几何点插入后的三角网格进行介绍。

由图4可知,新点 $p_n$ 加入后所在的 $\Delta p_0 p_2 p_3$ 是必然要删掉的。根据外接圆准则,DT网格中每一个三角形的外接圆内不存在任何其它三角形的顶点。故此,我们可以从 $\Delta p_0 p_2 p_3$ 出发,利用DT数据结构记录的相邻关系做树搜索,可得到 $\Delta p_0 p_1 p_2$ 、 $\Delta p_0 p_3 p_4$ ,计算这些三角形的外接圆半径,计算点 $p_n$ 到外接圆圆心距离是否小于该外接圆的半径。若是,则待测三角形不满足外接圆准则,应予以删除;否则予以保留。把由所有被删除三角形构成的区域称作 $p_n$ 的“影响域”。影响域的多边形边界上每一个顶点与新点 $p_n$ 满足所谓“点可见性”,即这些顶点与 $p_n$ 的连线完全位于影响域内。只需将 $p_n$ 与影响域边界封闭多边形之顶点逐个相连,便得到新的DT网格,并且该网格无论局部还是全局均满足DT特性。

现在我们得到了包含全部几何点的DT网络。接下来需要把约束特征,包括有向折线和封闭多边形,嵌入到DT网格中。类似DT构造时点插入的情况(参见图5), $p_i p_j$ 的嵌入只破坏影响域内(在这里很显然所有与 $p_i p_j$ 相交的三角形都需要删除,这些三角形即为影响域)的三角形,所以 $p_i p_j$ 嵌入与影响域外无关。删除影响域内的三角形后,加入线段 $p_i p_j$ ,并构造出影响域内的其他三角形。为保证局部DT特性(实际中插入这 $p_i p_j$ 之后大多会出现狭长三角形,所以需要进一步利用DT特性来局部优化三角网格),可以采用一种分上下两半分别剖分的算法,称之为“( $m+2$ )边形对角线交换技术”<sup>[20]</sup>,可以很好地完成 $p_i p_j$ 的插入。这种技术是在影响域信息(包括影响域内的三角形序列及影响边界顶点序列)建立的基础上,先对影响域进行初始剖分。初始剖分是通过将“基线”(在这里即为 $p_i p_j$ )两个端点与离基线最近的影响域顶点相连。此后,利用圆规则对初始剖分做逐段测试,进行局部优化,最后得到除 $p_i p_j$ 线段所在的四边形外其余各处均满足DT特性的三角剖分。

上述算法可以处理大多数情况下出现的复杂特征约束。

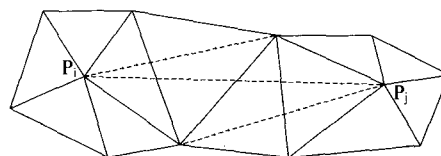


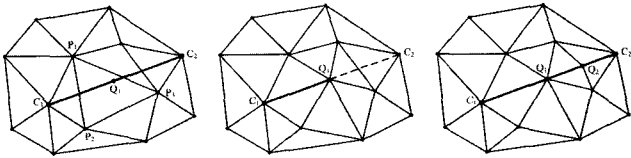
图5 边的嵌入对“影响域”三角形的调整

(2) 满足全局Delaunay特性的带特征约束的散乱数据最优三角剖分

一般在嵌入特征线之后,所得到的三角剖分结果往往不是全局最优的,在局部仍然可能会出现狭长的令人不满意的结果。为此许多学者进行了研究,在特征线上或者其它地方嵌入新的数据点,再对原始数据和新增数据一起进行三角剖分,使之满足全局Delaunay优化<sup>[19]</sup>。

文献<sup>[20]</sup>提出了一种有效的“对半划分增量型附加点插入”算法。如图6a所示。设 $C_1 C_2$ 为特征线,它在DT网格下不被包含,令 $Q_1$ 为短线 $C_1$ 和 $C_2$ 的中点,将 $Q_1$ 作为附加点插入网格,重新构造新的DT网格,结果如图6b所示,这里线段 $C_1 Q_1$ 和 $Q_1 C_2$ 将作为特征线 $C_1 C_2$ 的两个分段,它们将分别被测试,看是否被新的DT网格所包含(即将 $Q_1$ 作为一个

新的数据点插入到原来的 DT 网格当中,检验  $C_1Q_1$  和  $Q_1C_2$  是否满足 DT 特性)。图 6b 中的  $C_1Q_1$  已被包含。而  $Q_1C_2$  未被包含,然后,未被包含的  $Q_1C_2$  将被进一步划分,把中点  $Q_2$  插入网格。类似的步骤一直进行下去,直到所有的分段均被包含在三角网格当中,如图 6c 所示。待全部完成以后,尽管特征线被重新进行了分段,但最后的结果可满足全局 Delaunay 优化特性。



a)用  $Q_1$  对半划分特征线  $C_1C_2$  b)特征线  $C_1Q_1$  被包含 c)用  $Q_2$  对半划分  $Q_1C_2$

图 6

### (3) 无边界的约束三角剖分

此类算法由于并不限定边界,因此它在使用三角形描述具体二维图形时用处不是很大,但是在地理地形应用领域中,因为要针对数量庞大的数据点,而且不需要边界,只需在全部的数据点外套一个矩形(实际上在一定意义上也可将该大矩形视为边界)即可。此类算法应多注意适用性、简洁性和实现的高速性。算法较有边界的三角剖分并无本质不同,在此不再赘述。

## 3.2 三维曲面点集的约束三角剖分

曲面剖分通常有两种方法:其一是将点投影到某一平面,运用平面的三角剖分算法完成剖分,而三维点间拓扑关系不变。这种方法将三维问题转化为平面问题,可称为平面投影法。其二是直接由三维点来构造剖分,称为直接剖分法。通常有两种类型:第一类是三角剖分  $T$  的顶点就是所给点集  $P$ ,不改变原点集的拓扑结构,实质是对  $P$  的线性插值;另外一类是在一定的误差范围内用剖分  $T$  来逼近曲面,这时  $T$  的顶点在数量和位置上均不同于原点集<sup>[21]</sup>。

### 3.2.1 平面投影法

平面投影法就是将三维点投影到某平面,如  $XY$  平面,然后对投影点集做平面域的三角剖分,最终形成的曲面三角剖分的点间连接关系与相应的投影点间的连接关系相同。这种方法的实质是平面域的三角剖分,可以遵循早期 Delaunay 三角剖分的各种准则:最小内角最大原则、最大空圆原则等。关于 DT 的算法实现有很多,大致分为以下两大类:一类是增量算法,每一步增加一点,直至点集为空,常用的有 Lawson 算法<sup>[22]</sup>、Green2Sibson 算法<sup>[23]</sup>、Bowyer 算法<sup>[24]</sup>、Cline2Renka 算法<sup>[25]</sup>、L-S 算法<sup>[26]</sup>、Watson 算法<sup>[27]</sup>、F-P 算法<sup>[28]</sup>等,其中部分算法详见文献<sup>[29]</sup>。另一类为分治算法,该算法基于分而治之的思想,每次将点集分为规模相当的两个子集,分别进行递归实现,最后拼合,目前较好的有 DeWall 算法<sup>[30]</sup>。

此类算法先将点投影到二维平面上,在二维平面上利用 DT 准则进行剖分,剖分结束之后在保持拓扑结构不变的基础上再投影到三维形体上。二维平面的三角剖分不必赘述,此类算法由于在二维平面上剖分,不能充分考虑到三维表面上的约束。随着三维数据容量的逐渐加大以及计算机性能的提高,这种算法不能很好地解决复杂情况下的拓扑关系,因此具有一定的局限性。

### 3.2.2 直接剖分算法

与平面投影法不同,直接剖分算法是直接根据三维散乱

点来构造三角剖分,同时保持原有的三维拓扑关系不变。此类算法中较为典型的要数 Choi 提出的增量算法<sup>[31]</sup>。后来的学者多根据此算法进行一些修改来提高效率,该算法的简要过程如下:

#### Step1 预处理

首先确定一点  $P_c$ ,使从  $P_c$  点能够看到所有的散乱点,并做一过  $P_c$  的轴  $u$ ;对所有点做变换  $P_i \rightarrow V_i$ ,其中  $V_i = P_i - P_c$ ;按  $V_i$  与  $u$  的夹角大小,将  $V_i$  升序排列。

#### Step2 三角剖分

##### (1) 初始三角剖分

最初的剖分是从  $V_1, V_2$  开始,首先得到边  $V_1V_2$ ,接着从  $V_3$  开始逐点搜索,若共面则继续搜索,直至找到一不与前面点共面的顶点,连接此点与前面所有点从而构成初始剖分,如图 7a 所示(图中点 1-4 共面,5 与它们不共面)。

##### (2) 剖分主过程

当下一个新点  $N$  插入时,搜索  $N$  的所有可见点并确定最左可见点  $lvn(V_3)$  和最右可见点  $rvn(V_4)$ ;构造一个三角形,它的顶点是  $N, lvn$  和  $lvn$  的下一点(图 7b 中的  $\triangle V_6V_3V_1$ )。若此时边界非凸,则继续从此非凸点开始与其下一点和  $N$  点构造三角形(图 7c 中  $\triangle V_1V_6V_2$ ),并删去该非凸点,直至边界为凸(参见图 7d)。每处理完一个点,就将此点从点集中删除;若点集为空,则停止,否则转到本过程的开始。

#### Step3 轨迹生成。

#### Step4 边界剪裁。

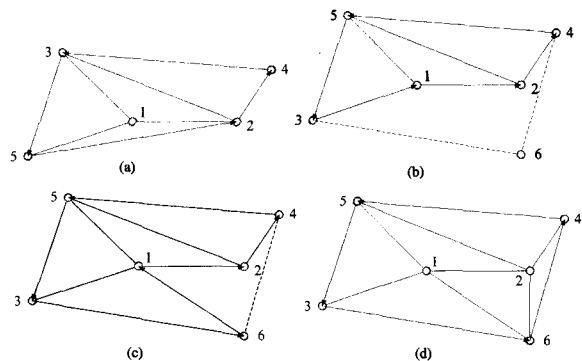


图 7 三角剖分的过程图示

三维曲面重构的多分辨率模型一直是人们关注的问题,三角剖分网格为三维表面的多分辨率显示提供了一种重要途径。实现这一多分辨率模型的一种方法是通过每一个三维数据点赋予一个“重要度”参数来实现。在得到用户的分辨率要求后,可通过删除一些“不重要”数据点(也可以理解为点的合并)来简化重构模型并可动态执行<sup>[32,33]</sup>。此外,三维曲面的三角剖分在医学 CT, MRI 图像重建以及地质地表可视化等领域有着广泛的应用,比如由二维轮廓重构三维形体<sup>[34-36]</sup>、人脸特征重构<sup>[37-39]</sup>、任意三维形体重构、简化<sup>[40,41]</sup>等。由于三维数据的复杂多变性,需要做的工作很多。目前这一类的算法主要集中在三角剖分准则的确定(目前尚不存在统一的准则)、保持三维形体表面原型及光滑平整性、三维数据的存储及读取等方面。

**结束语** 通过对约束三角剖分算法的研究和分析,我们认为今后该领域以下各方面的研究将受到重视:

(1) 尽管目前已出现了很多有关约束三角剖分的算法,但大多对某一“特定的约束”进行的、对于不连续界面情况,比

如山脊线、陡坎、岛区、断层等还没有一种通用实用、成熟的算法及数学模型来真实表达地物。

(2) 所有的 DT 均是对矢量结构的三角剖分,而实际上也可对栅格影像数据进行三角剖分,这就是基于数学形态学的 DT 三角剖分。这种方法可建立和栅格影像数据相对应的 DT。基于数学形态学的 DT 可减少许多矢量方法的操作,还可进行并行处理并提高三角剖分的效率<sup>[42-45]</sup>。目前有关这方面的许多性质还有待进一步研究。

(3) 大多数三角剖分算法都事先忽略一个问题,那就是退化。退化是指在计算机计算过程中由于很小的误差而导致计算失败<sup>[46]</sup>,特别是对大规模数据点进行剖分时这个问题尤为突出,这在很大程度上影响了算法的健壮性<sup>[47]</sup>,在这方面的研究还需进一步加强。

(4) 三角剖分在 3D 曲面构造方面有着广泛的应用。由于为了保证三维实体表面的平整和光滑性,需要在原有数据点的基础上添加更多的数据点。多种数学工具的有机结合可能会在这一领域有着更好的发展,这也是一个非常值得研究的问题。

### 参 考 文 献

- [1] Preparata F P, Shamos M I. Computational Geometry. New York: Springer-Verlay, 1985
- [2] Faugeras O D, Bras-Mehlman E L, Boissonnat J D. Representing stereo data with the Delaunay triangulation[J]. Artificial Intelligence, 1990, 44: 41-87
- [3] Floriani L D, Puppo E. Constrained Delaunay for multiresolution surface description[J]//Proc. 9 th Int Conf. on Pattern Recognition. Rome, 1988; 566-569
- [4] 文和平, 柯映林, 程耀东. 任意多边形边界内散乱点的三角剖分[J]. 工程图学学报, 1994, 2: 65-69
- [5] Li Wei, Zheng Nanning, Yuan Lixing. Delaunay triangulation of flexible contour model//Proc. Geometrical Modeling & Invariants For Computer Vision. Xi'an, 1995; 41-46
- [6] Schumaker L L. T riangulations in CAGD[J]. IEEE CG & A, Jan. 1993; 47-52
- [7] 唐泽圣, 徐志强. 二维点集三角剖分的动态生成与修改 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1990, 2 (3): 1-8
- [8] 付建林, 周美玉. 不规则三角形网格(TIN)地形的生成[J]. RG-IS 工程, 2001(12)
- [9] 汤国安, 刘学军, 闫国年. 数字高程模型及地学分析的原理与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2005; 121
- [10] Edelsbrunner H, Mucke E. 3D alpha shapes[J]. ACM Transactions on Graphics, 1994, 13(1): 43-72
- [11] Adamy U, Giesen J, John M. Surface reconstruction using umbrella filters[J]. Computational Geometry Theory & Applications, 2002, 21(1/2): 63-86
- [12] Chaine R. A geometric convection approach of 3-D reconstruction[J]//Proceedings of the Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing. Aachen, Germany, 2003; 218-229
- [13] Huang J, Menq C H. Combinational manifold mesh reconstruction and optimization from unorganized points with arbitrary meshes[J]. Computer Aided Design, 2002, 34(2): 149-165
- [14] Lin H-W, Tai C-L, Wang G-J. A mesh reconstruction algorithm driven by an intrinsic property of a point cloud[J]//Computer Aided Design, 2004, 36(1): 1-9
- [15] Tan Jian-Rong, Li Li-Xin. An algorithm for topology reconstruction from unorganized points based on local flatness of surface [J]. Journal of Software, 2002, 13 (11): 2121-2126(in Chinese)
- [16] 卢朝阳, 吴成柯. 任意多边形内带特征约束的散列数据的最优三角剖分[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(4): 302-308
- [17] 卢朝阳, 吴成柯, 陆心如. 简单多边形的优化三角剖分[J]. 电子学报, 1991, 19(2): 82-87
- [18] 卢朝阳, 吴成柯, 陆心如. 优化 TSP 算法的完善与推广[J]. 电子学报, 1994, 22 (1): 86-89
- [19] Faugeras O D. Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint. MA: MIT Press, 1993; 403-477
- [20] 卢朝阳, 吴成柯, 周幸妮. 满足全局 Delaunay 特性的带特征约束的散乱数据最优三角剖分[J]. 计算机学报, 1997, 20(2): 118-124
- [21] 张永春, 达飞鹏, 宋文忠. 三维散乱点集的曲面三角剖分[J]. 2003, 8A(12): 1379-1388
- [22] Lawson C L. Generation of a triangulation grid with application to contour plotting [M]. Technology Memorandum 299, California Institute of Technology Jet Propulsion Laboratory, 1972
- [23] Green P J, Sibson R. Computing Dirichlet tessellations in the p-plane[J]. The Computer Journal, 1978, 21(2): 168-173
- [24] Bowyer A. Computing Dirichlet tessellations[J]. The Computer Journal, 1981, 24(2): 162-166
- [25] Cline A K, Renka R L. A storage-efficient method for construction of a Thiessen triangulation [J]. Rocky Mount Journal of Mathematics, 1984, 14(1): 119-139
- [26] Lee D T, Schachter B J. Two algorithms for construction a Delaunay Triangulation [J]. Int'l. Journal Computer & Information Sciences, 1980, 9(3): 219-243
- [27] Watson D F. Computing the 2-dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes [J]. The Computer Journal, 1981, 24(2): 167-172
- [28] Fang T-P, Piegl L A. Algorithm for Delaunay triangulation and convex hull computation using a sparse matrix [J]. CAD, 1992, 24(8): 425-436
- [29] 周晓云, 朱心雄. 散乱数据点三角剖分方法综述[J]. 工程图学学报, 1993, 13(1): 48-54
- [30] Cignoni P, Montani C, Scopigno R. DeWall: A fast divide and conquer Delaunay triangulation algorithm in Ed[J]. CAD, 1998, 30(5): 333-341
- [31] Choi B K, Shin H Y, Yoon Y I, et al. Triangulation of scattered data in 3D space[J]. CAD, 1988, 20(5): 239-248
- [32] Hoppe H, De Rose T, Duchamp T, et al. Mesh Optimization//Proceedings Computer Graphics, Aug. 1993; 19-26
- [33] 唐泽圣, 等. 三位数剧场可视化[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999; 205-218
- [34] Fuchs H, Kedem Z M, Uselton S P. Optimal Surface Reconstruction from Planar Contours. Communication of the ACM, 1977, 20(10): 693-702
- [35] Keppel E. Approximating Complex Surfaces by Triangulation of Contour Lines. IBM Journal Res. Develop, 1975(1): 2-10
- [36] Meyers D, Skinner S. Surfaces from Contours. ACM Transactions on Graphics, 1992, 11(3): 228-258
- [37] Parke F I. A Parametric Model for Human Faces[D]. University of Utah, Salt Lake City, Utah, 1974
- [38] Parke F I. A model for human faces that allows speech synchronized animation[J]. Journal of Computers and Graphics, 1975, 1(1): 1-4
- [39] De Carlo D, Metasas D, Stone M. Anthropometric Face Model using Variational Technique[M]//Siggraph Proceedings. 1998
- [40] Hoppe H. Progressive Meshes//Proceeding Computer Graphics, 1999(8): 99-108
- [41] Ronfard R, Rossignac J. Full-range Approximation of Triangulated Polyhedra//Computer Graphics Forum(Eurographics'96). 1996, 15(3): 67-76
- [42] Serra J. Introduction to Mathematical Mophology[J]. Comput. Vision Graphics Image Process, 1986, 35(3): 283-305
- [43] Stenberg S R. Grayscale Mophology[J]. Comput. Vision Graphics Image Process, 1986, 35: 333-355
- [44] 李德仁, 陈晓勇. 用数学形态学变换自动生成 DTM 三角形网格的方法[J]. 测绘学报, 1990, 19(3): 161-172
- [45] 陈晓勇. DTM 不规则三角形网格的规则化压缩存储[J]. 测绘学报, 1992, 21(3): 193-204
- [46] 邓俊辉译. 计算几何——算法与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005; 5-6
- [47] 周晓云, 刘慎权. 实现约束 Delaunay 三角剖分的健壮算法[J]. 1996, 19(8): 615-624