基于当前基线垂直落差最大化的凸壳递归新算法

周启海[1,2]　黄　涛[1,2]

（西南财经大学信息技术应用研究所　成都 610074）[1]　（西南财经大学经济信息工程学院　成都 610074）[2]

摘　要　本文依据同构化凸壳构造基本定理，率先发现并证明了凸壳顶点的分布域性态与垂直落差特性；首次给出当前基线垂直落差最大化的二维点集凸壳算法构造创新思想，提出了比迄今最优秀凸壳算法之一的快凸壳算法效率更高的、基于当前垂直落差最大化的凸壳递归新算法，指出了它具有进一步改造为并行算法的潜力。该新算法的主要特点是：1）找出初始点分布域的所有最外点（其个数，下限为 3，上限为 8），作为所求凸壳的初始顶点。2）删除这些最外点所构成最外点凸多边形（其边数，下限为 3，上限为 8）所覆盖的凸壳内点后，把所剩点分布域，分为若干个初始子分布域（其个数，下限为 0，上限为 4）。3）①对各个非空初始子分布域顺次调用本新算法的递归过程子算法，分别在各初始子分布域中找出其当前基线垂直落差最大点（其个数，下限为 1，上限为 2），并作为其各初始子分布域内凸壳的新顶点；②删除当前基线与垂直落差最大点所构成基线凸多边形（其边数，下限为 3，上限为 4）内的凸壳内点后，把所剩点分布域，分为多个更小的子分布域（其个数，下限为 0，上限为 2）；③对各个更小的当前子分布域，分别递归调用过程子算法，以找出其当前基线的垂直落差最大点作为凸壳新顶点。

关键词　同构化，当前基线垂直落差，凸壳，递归算法

New Recurrence Algorithm for Finding Convex Hull Based on Maximum Current Base Line Vertical Drop

ZHOU Qi-hai[1,2]　HUANG Tao[1,2]

(Research Institute of Information Technology Application, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074, China)[1]

(School of Economic Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074, China)[2]

Abstract　In this paper, the domain state natures and vertical drop characters of the apexes of a convex hull are found and proofed in the lead; a creative new thought for constructing an algorithm with the maximum current base line vertical drop is given; a new recurrence algorithm of finding convex hull based on maximum current base line vertical drop which is better than the quick hull algorithm for convex hulls as one of the most excellent convex hull algorithms is advanced; the potentialities to reform into parallel algorithm are pointed out. The general characters of this new recurrence algorithm are: 1) Find out all most-outside points (its total lower limit is 3, and upper limit is 8) as the initial apexes of a convex hull. 2) After deleting all interior points covered by the most-outside points' convex polygon, the rest points' domain is divided into some initial sub-domains (its total lower limit is 0, and upper limit is 4). 3) 1st, to every not empty current initial sub-domain, call separately the recurrence procedure sub-algorithm to find out the maximum current base vertical drop points of the current sub-domain (its total lower limit is 1, and upper limit is 2) as the convex hull apexes; 2nd, after deleting all interior points covered by the current base's convex polygon, the rest points' sub-domain is divided into some smaller sub-domains (its total lower limit is 0, and upper limit is 2); 3rd, to every not empty smaller current sub-domain, call separately the recurrence procedure sub-algorithm to find out the maximum current base vertical drop points of the current sub-domain as the convex hull apexes.

Keywords　Isomorphic, Current base line vertical drop, Convex hull, Recurrence algorithm

1 引言

自 20 世纪 70 年代以来，二维点集凸壳所具有的问题复杂性与应用重要性，一直使不少国内外专家学者不懈关注和深入研究二维点集凸壳算法（以下简称凸壳算法）及其改进[1-10]。1996-1997 年间，C. Bradford Barber, David P. Dobkin 和 Hannu Huhdanpaa 提出的快凸壳算法（The Quick hull algorithm for convex hulls）[1]，堪称当时凸壳算法研究成果之巅峰，且迄今仍不失为全世界最优秀的凸壳算法之一。文献[2]将快凸壳算法思想精华概括为"动态基线距离最大化"，但其动态基线距离最大点的计算量较大，制约了算法效率提高。为此，本文依据同构化凸壳构造基本定理，提出一种比快凸壳算法效率更高的、基于基线垂直落差最大化的串行凸壳递归新算法。

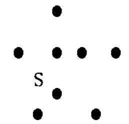
2 二维凸壳问题与凸壳算法简述

定义 1　设多边形 Q 的顶点是给定平面内的点 $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2), \cdots, Q_n(x_n, y_n)$。如果线段 Q_iQ_j $(i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 总不在多边形 Q 外，则称 Q 为凸多边形。设二维点集 $S=\{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 由给定平面内的点构成。如果凸多边形 Q 顶点 $Q_i \in S$，且 Q 是可覆盖 S 中各点的最小凸多边形；则称凸多边形 Q 为二维点集 S 的凸壳。如何寻求给定二维点集 $S=\{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 的二维凸壳，称为二维凸壳问题。凡能构造性生成给定二维点集 $S=\{P_i(x_i, y_i)$

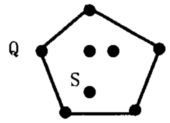
周启海　教授，博（硕）士生导师，主要研究方向为计算几何、算法研究与应用、财经计算、同构化信息处理等；黄　涛　讲师，主要研究方向为计算机应用。

$|1\leqslant i\leqslant m\geqslant 3\}$的二维凸壳的算法，统称二维凸壳生成算法。

凸壳问题的几何原型，可通俗简单而形象地说明，如图1所示。设$1\leqslant i\leqslant m$，$3\leqslant m<+\infty$，对木版上的有限点集S中各点$P_i(x_i,y_i)$处，分别各钉一个图钉，再用一条橡皮带从该点集的外沿去围绕一圈这些图钉。显然有：首先，被缠紧的橡皮带圈必定构成一个凸多边形Q；其次，所有图钉总不会出现在该橡皮带圈（即：所得凸多边形Q）所围成的区域之外。



(a) 木版上各点处各钉一个图钉：二维点集 S



(b) 外围缠绕各图钉所得橡皮带圈：凸壳 Q

图1 凸壳问题几何原型的形象说明示意图

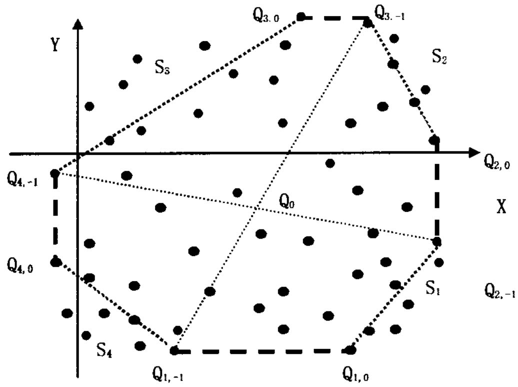


图2 非退化最外点分布形态：8个最外点，4个初始子分布域

3 凸壳算法改进和优化的同构化方向与捷径

在文献[3]中，作者提出并阐明了下述同构化凸壳构造基本定理。

定义2 若二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$，$Q$为二维点集$S$的凸壳，则二维点集$S$中除凸壳$Q$各顶点外的所有点，称为凸壳$Q$的内点。

同构化凸壳构造基本定理 记二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m,3\leqslant m<+\infty\}$，凸多边形$Q$的顶点集为$R=\{Q_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\leqslant m<+\infty,3\leqslant n,3\leqslant m\}$。如果凸多边形$Q$是二维点集$S$的凸壳，则有：

ⅰ.（顶点对内点的）**凸壳内点无关性定理** 凸壳Q的所有顶点$Q_i(x_i,y_i)$必不在S与R的余集中，即$Q_i(x_i,y_i)\notin S-R$，$1\leqslant i\leqslant n\leqslant m<+\infty$，$3\leqslant n$，$3\leqslant m$。

ⅱ.（顶点对顶点的）**凸壳顶点独立性定理** 凸壳Q的任一顶点$Q_k(x_k,y_k)$必不在R与$\{Q_k\}$的余集中，即$Q_k(x_k,y_k)\notin R-\{Q_k\}$，$1\leqslant k\leqslant n\leqslant m<+\infty$，$3\leqslant n$。

基于同构化凸壳构造基本定理，作者认为凸壳生成算法改进与优化的同构化方向应是：

第一，根据凸壳内点无关性定理，应一方面使凸壳顶点分布域极小化，即让包含凸壳顶点的判定区域尽可能小，以大大减少凸壳顶点判定时的内点（指非凸壳顶点的所有点）无效处理量；另一方面使顶点判定对象直接化，即让所判定对象尽可能接近当前所寻顶点，以大幅提高凸壳顶点判定对象的直接针对性。

第二，根据凸壳顶点独立性定理，一方面可从不同初始对象出发，来改进和优化串行凸壳新算法；另一方面可对不同视角对象处理，来改造和创造并行凸壳新算法。

因此，在生成凸壳过程中，应尽力缩小顶点的可能分布域——在尽可能小的分布域内，尽可能快地直接找出并只找出其各个顶点（即凸壳各条边的各端点）的凸壳算法；进而，再对有潜力的优秀串行凸壳新算法施以并行化改造与创新。无疑，这必定是今后进一步提高凸壳算法效率的主要捷径。

4 凸壳顶点的分布域性态

一般说来，尽快找出能覆盖给定平面点集S中尽可能更多初始内点的初始顶点子凸壳，可大大缩小搜寻凸壳其余顶点的可能后续分布区域，从而有效提高凸壳算法效率。

定义3 若Q为二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的凸壳，则称二维点集$S$为凸壳$Q$的初始点分布域，简称初始分布域。

定义4 记Q为二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的凸壳。初始点分布域$S$中，称$X$轴或$Y$轴的坐标最值（包括最大值或最小值）点为初始点分布域S的最值点，且称这些最值点中可构成凸壳Q顶点的最值点为初始点分布域S的最外点（即凸壳Q的初始顶点）。

定理1（凸壳顶点分布域性态定理） 在二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m,3\leqslant m<+\infty\}$的初始分布域$S$中，其最外点个数$k_1$满足$3\leqslant k_1\leqslant 8$；其最外点凸多边形边数$k_2$满足$3\leqslant k_2\leqslant 8$；删除最外点凸多边形所覆盖的凸壳内点后所剩点，凸壳其余顶点所在初始子分布域个数k_3满足$0\leqslant k_3\leqslant 4$。

定理1可证明如下：不失一般性，二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m,3\leqslant m<+\infty\}$的初始分布域$S$的所有最外点的分布形态，可分为非退化、局部退化、完全退化3种基本类型。

(1) 非退化最外点分布形态——当所有最外点均互不相同，且“有多个Y轴最大值点（即垂直方向最高点）、有多个Y轴最小值点（即垂直方向最低点）、有多个X轴最大值点（即水平方向最右点）、有多个X轴最小值点（即水平方向最左点）”时：

①此时（如图2所示），Y轴最小值各点，必定同在一条平行于X轴的最低水平线段$Q_{1,-1}Q_{1,0}$（其中，最低点$Q_{1,-1}$，$Q_{1,0}$分别为最低水平线段$Q_{1,-1}Q_{1,0}$沿逆时针方向的首、尾端点或近、远端点；下类同）。而此时，二维点集S中所有点必都不会在此最低水平线段之下，故此最低水平线段$Q_{1,-1}Q_{1,0}$必为二维点集S的凸壳Q的一条边。在此最低水平线段$Q_{1,-1}Q_{1,0}$上，除其两端点可为凸壳Q的2个顶点外，其余各点显然均为凸壳Q的内点；故此最低水平线段$Q_{1,-1}Q_{1,0}$最多有2个最外点（即它的2个端点）。同理可证：最右垂直线段$Q_{2,-1}Q_{2,0}$、最高水平线段$Q_{3,-1}Q_{3,0}$、最左垂直线段$Q_{4,-1}Q_{4,0}$，各自最多可有2个最外点。所以，初始分布域S此时最多可有8个互不相同的最外点（即：$Q_{1,-1}$，$Q_{1,0}$，$Q_{2,-1}$，$Q_{2,0}$，$Q_{3,-1}$，$Q_{3,0}$，$Q_{4,-1}$，$Q_{4,0}$），而这些最外点最多可构成有8条边的最外点凸多边形（即：凸八边形$Q_{1,-1}Q_{1,0}Q_{2,-1}Q_{2,0}Q_{3,-1}Q_{3,0}Q_{4,-1}Q_{4,0}$）。

②此时，因最外线段（即由最外点为端点的最低水平线

段、最右垂直线段、最高水平线段、最左垂直线段之总称)外已无二维点集 S 中的点,而(最外线段所构成的)最外点凸多边形最多可有 4 条斜边;故删除最外点凸多边形所覆盖的凸壳内点后所剩点后,凸壳其余顶点必在二维点集 S 的剩余点集中,且只能位于这 4 条斜边之外:

若二维点集 S 尚有剩余点,且分别各位于这 4 条斜边(即:由最低点、最右点决定的斜边 $Q_{1,0}Q_{2,-1}$,由最右点、最高点决定的斜边 $Q_{2,0}Q_{3,-1}$,由最高点、最左点决定的斜边 $Q_{3,0}Q_{4,-1}$,由最左点、最低点决定的斜边 $Q_{4,0}Q_{1,-1}$;下类同,略)外的 4 个小区域,则有 4 个初始子分布域(即:斜边 $Q_{1,0}Q_{2,-1}$ 外侧的初始子分布域 S_1,斜边 $Q_{2,0}Q_{3,-1}$ 外侧的初始子分布域 S_2 水平线段,斜边 $Q_{3,0}Q_{4,-1}$ 外侧的初始子分布域 S_3 水平线段,$Q_{4,0}Q_{1,-1}$ 外侧的初始子分布域 S_4;下类同,略)。

若二维点集 S 尚有剩余点,且分别各位于其中 3 条斜边外的 3 个小区域,则有 3 个初始子分布域中;

若二维点集 S 尚有剩余点,且分别各位于其中 2 条斜边外的 2 个区域,则可有 2 个初始子分布域中;

若二维点集 S 尚有剩余点,但只位于仅 1 条斜边外的 1 个小区域,则仅有 1 个初始子分布域中;

若二维点集 S 已无剩余点,即已无剩余点可位于各斜边外的任何小区域,则有 0 个初始子分布域中。

所以,在非退化最外点分布形态下,最外点个数满足 $k_1=8$,最外点凸多边形边数 k_2 满足 $k_2=8$,初始子分布域个数 k_3 满足 $0\leqslant k_3\leqslant 4$。

(2) 局部退化最外点分布形态——当不同向最外点互不相同且 4 种最外线段中至少有 $k(1\leqslant k\leqslant 4)$ 种最外线段退化为仅有 1 个最值点 $Q_{j,0}(1\leqslant j\leqslant 4)$ 时:

①此时,所得最外点凸多边形最多可有 $8-k$ 条边,故此时的最外点个数上、下限依次为 7,4,使这些最外点(即 $Q_{1,-1}$,$Q_{1,0}$,$Q_{2,-1}$,$Q_{2,0}$,$Q_{3,-1}$,$Q_{3,0}$,$Q_{4,-1}$,$Q_{4,0}$ 中的 k 个最外点;但若其最外线段出现退化,则仅保留 1 个最值点 $Q_{j,0}$,$1\leqslant j\leqslant 4$),可构成有 4~7 条边的最外点凸多边形,而最外点凸多边形仍最多可为 4 条斜边。

②此时,因最外线段外已无二维点集 S 中的点,且最外线段所构成的最外点凸多边形最多可有 4 条斜边之外,方可能有二维点集 S 中的其它点。而最外点凸多边形除其顶点外,其余所覆盖各点均为凸壳 Q 的内点;故删除最外点凸多边形所覆盖的(凸壳 Q 的)这些内点后,凸壳其余顶点必在剩余点集中:

若二维点集 S 尚有剩余点,且分别各位于这 4 条斜边外的 4 个小区域,则有 4 个初始子分布域中;

若二维点集 S 尚有剩余点,且分别各位于其中 3 条斜边外的 3 个小区域,则有 3 个初始子分布域中;

若二维点集 S 尚有剩余点,且分别各位于其中 2 条斜边外的 2 个区域,则可有 2 个初始子分布域中;

若二维点集 S 尚有剩余点,但只位于仅 1 条斜边外的 1 个小区域,则仅有 1 个初始子分布域中;

若二维点集 S 已无剩余点,即已无剩余点可位于各斜边外的任何小区域,则有 0 个初始子分布域中。

所以,在局部退化最外点分布形态下,最外点个数 k_1 满足 $4\leqslant k_1\leqslant 7$,最外点凸多边形边数 k_2 满足 $4\leqslant k_2\leqslant 7$,初始子分布域个数 k_3 满足 $0\leqslant k_3\leqslant 4$。

(3) 完全退化最外点分布形态——当不同向最外点可相同(例如:最高点同时又是最左点,最右点同时又是最低点,最高点同时又是最左点、最右点,等等),且不同最外点退化为个数最少情形(即仅有 3 个最外点,个数再少就不可能构成凸多边形了,其示例如图 3 - 图 5 所示)时:

①此时,最外点个数只是 3,最外点三角形边数仅为 3,而最外点三角形可有最多 3 条斜边、最少 1 条斜边。

②此时,因最外线段外已无二维点集 S 中的点,且最外线段所构成的最外点三角形斜边(最多 3 条、最少 1 条)外,方可能有二维点集 S 中的其它点。而最外点三角形除其顶点外,其余所覆盖各点均为凸壳 Q 的内点;故删除最外点三角形所覆盖的凸壳 Q 内点后,凸壳其余顶点必在 S 的剩余点集中:

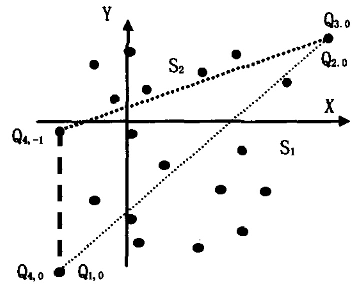


图 3 完全退化最外点分布形态示例 1:3 个最外点,2 个初始子分布域

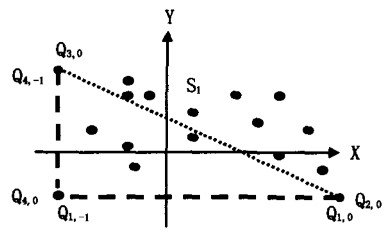


图 4 完全退化最外点分布形态示例 2:3 个最外点,1 个初始子分布域

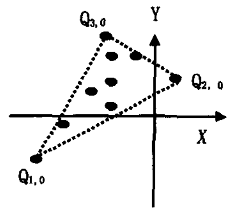


图 5 完全退化最外点分布形态示例 3:3 个最外点,0 个初始子分布域

若二维点集 S 尚有剩余点,且分别各位于这 3 条斜边外的 3 个小区域,则有 3 个初始子分布域中;

若二维点集 S 尚有剩余点,且分别各位于其中 2 条斜边外的 2 个小区域,则有 2 个初始子分布域中;

若二维点集 S 尚有剩余点,但只位于仅 1 条斜边外的 1 个小区域,则仅有 1 个初始子分布域中;

若二维点集 S 已无剩余点,即已无剩余点可位于各斜边外的任何小区域,则有 0 个初始子分布域中。

所以,在完全退化最外点分布形态下,最外点个数 k_1 满足 $k_1=3$,最外点凸多边形边数 k_2 满足 $k_2=3$,初始子分布域个数 k_3 满足 $0\leqslant k_3\leqslant 3$。

因此,定理 1 成立。

定理1表明：除非已可断定所给平面点集中确无凸壳内点；否则，尽可能早地具体确定凸壳顶点所在初始子分布域，通常是有效提高凸壳算法效率的重要可行途径。

5 凸壳顶点的垂直落差最大性质

定义5 若Q为二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的凸壳，最外点凸多边形的各斜边为$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$，(其中：①斜边$Q_{4,0}Q_{1,-1}$可等价表示为$Q_{4,0}Q_{5,-1}$；②当同类最外点$Q_{j,0}$，$Q_{j,-1}$退化为一点时，只保留$Q_{j,0}$)；则称最外点凸多边形的斜边$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$为初始子分布域$S_j$的初始基线，$1\leqslant j\leqslant 4$。

定理2 记S_j为二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的初始子分布域，$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$为$S_j$的斜边，而$S_j$的点$P$是凸壳$Q$在$S_j$中的新顶点，$1\leqslant j\leqslant 4$。若初始子分布域$S_j$删除其三角形$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}P$覆盖的凸壳内点后，所得$S_j$之余集$R_j$非空，则$R_j$可分割成斜边为$Q_{j,0}P$的子分布域$S_{j,1}$与斜边$Q_{j+1,-1}P$的子分布域$S_{j,2}$，且$S_j$中凸壳$Q$的其余顶点必在所得非空子分布域$S_{j,1}$或$S_{j,2}$中。

定理2可证明如下：

首先，因二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的最外点凸多边形$Q'$的各非斜边外，已必无$S$的凸壳顶点；否则，最外点凸多边形$Q'$之外必至少有一个更外顶点$\in S$，从而至少还有一个更外的凸多边形$Q''$。进而，必使$Q'$不是最外点凸多边形，但这与$Q'$是最外点凸多边形$Q'$相矛盾)；故$S$的凸壳的各待求顶点，不会出现在最外点凸多边形$Q'$之外。同时，如果最外点凸多边形$Q'$有最外线段(即：最低水平线段、最右垂直线段、最高水平线段、最左垂直线段)，则各最外线段外已无二维点集S中的点；而最外点凸多边形最多可有4条斜边，故S的凸壳的各待求顶点，必须且只能出现在以最外点凸多边形斜边$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$为初始基线的初始子分布域S_j中，$1\leqslant j\leqslant 4$。

其次，因$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$为二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的初始子分布域$S_j(1\leqslant j\leqslant 4)$的斜边，点$P$是凸壳$Q$在$S_j$中的新顶点，而非空集是$S_j$删除其三角形$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}P$覆盖的凸壳内点后所得之$S_j$的余集，故$S_j$中凸壳$Q$各待求顶点必都在非空余集$R_j$中。

其三，因S_j的余集R_j非空，故R_j的子分布域$S_{j,1}$与$S_{j,2}$将至少有1个非空(否则，将出现使R_j非空的矛盾)。

其四，根据同构化凸壳构造基本定理之凸壳内点无关性定理，非空余集R_j中凸壳Q各待求顶点必须且只能出现在1个非空子分布域$S_{j,1}$或$S_{j,2}$(否则，将使凸壳Q顶点出现不是丢失就是重复的矛盾)凸壳Q的其余顶点。因此，定理2成立。

定义6 为叙述简便并不失一般性，可把源于二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$初始子分布域$S_j(1\leqslant j\leqslant 4)$的、根据定理2构造各非初始子分布域法而衍生出的非空子分布域集合中的1个所论当前子分布域，仍简记为S_j；当前子分布域S_j之非空余集R_j的非空子分布域仍简记为$S_{j,1}$与$S_{j,2}$。

推论1 若S_j是定义6的1个所论当前子分布域，$S_{j,1}$与$S_{j,2}$为当前子分布域S_j之非空子分布域；则当前子分布域S_j中凸壳Q的其余顶点必在其非空子分布域$S_{j,1}$或$S_{j,2}$中。

根据定理2和定义6，不难用数学归纳法证明推论1(略)。

定义7 若Q为二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的凸壳，点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})\in$初始子分布域$S_j(1\leqslant j\leqslant 4)$，最外点斜边$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$称为初始子分布域$S_j$的初始基线，点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})$到$X$轴的垂线与$S_j$的初始基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$之交点为$A_{P,j,x}(x_{P,j,x},y_{P,j,x})$；则线段$P_{j,x}A_{P,j,x}$称为点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})$到初始基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$的初始基线垂直落程，而初始基线垂直落程$P_{j,x}A_{P,j,x}$的长度$|y_{j,x}-y_{P,j,x}|$称为点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})$到初始基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$的初始基线垂直落差。

定义8 若Q为二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的凸壳，$S_j$是定义6的1个所论当前子分布域，点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})\in$当前子分布域$S_j(1\leqslant j\leqslant 4)$，当前子分布域$S_j$的当前基线仍记为$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$，点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})$到$X$轴的垂线与$S_j$的当前基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$之交点为$A_{P,j,x}(x_{P,j,x},y_{P,j,x})$；则线段$P_{j,x}A_{P,j,x}$称为点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})$到当前基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$的当前基线垂直落程，而当前基线垂直落程$P_{j,x}A_{P,j,x}$的长度$|y_{j,x}-y_{P,j,x}|$称为点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})$到当前基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$的当前基线垂直落差。

显然，定义7只是定义8的特例(即：当所论当前子分布域就是二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的初始子分布域时，定义8就蜕化为定义7以下，不再说明。)。

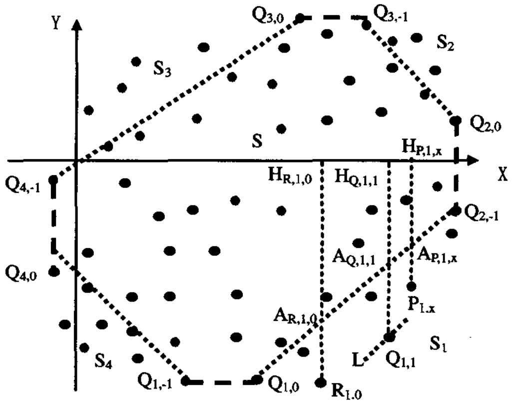


图6 凸壳顶点垂直落差最大性质示意图

定理3(凸壳顶点垂直落差最大性质定理) 记Q为二维点集$S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$的凸壳，$S_j(1\leqslant j\leqslant 4)$是定义6的1个所论当前子分布域，线段$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$为$S_j$的当前基线；$S_j$的点$P_{j,x}(x_{j,x},y_{j,x})$，$Q_{j,1}(x_{j,1},y_{j,1})$，各自到$X$轴的垂线之垂足分别为$H_{P,j,x}$，$H_{Q,j,1}$，各自$X$轴垂线$P_{j,x}H_{P,j,x}$，$Q_{j,1}H_{Q,j,1}$与$S_j$的当前基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$之交点分别为$A_{P,j,x}(x_{P,j,x},y_{AP,j,x})$，$A_{Q,j,1}(x_{Q,j,1},y_{AQ,j,1})$，各自到当前基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$的当前基线垂直落程分别为线段$P_{j,x}A_{P,j,x}$，$Q_{j,1}A_{Q,j,1}$，各自到当前基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$的当前基线垂直落差分别为$|Y_{P,j,x}-y_{AP,j,x}|$，$|y_{Q,j,1}-y_{AQ,j,1}|$。必有：

(1)若仅有1个点$Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{j,1})$满足$|y_{Q,j,1}-y_{AQ,j,1}|=\max\{|y_{P,j,x}-y_{A,P,j,1}|\mid P_{j,x}(x_{P,j,x},y_{P,j,x})\in S_j\}$，则只有点$Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{Q,j,1})$才是凸壳$Q$在$S_j$中的当前基线垂直落差最大的新顶点。

(2)若存在多个点$Q_{j,q}(x_{Q,j,q},y_{Q,j,q})(1\leqslant q)$满足$|y_{Q,j,q}-y_{AQ,j,q}|=\max\{|y_{P,j,x}-y_{AP,j,x}|\mid P_{j,x}(x_{P,j,x},y_{P,j,x})\in S_j\}$，则这些点$Q_{j,q}(x_{Q,j,q},y_{Q,j,q})$中有且仅有沿逆时针方向的首、尾端点或近、远端点才是凸壳Q在S_j中的2个当前基线垂直落差最大的新顶点。

定理3可证明如下：

首先，断言"若过点$Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{Q,j,1})$作$S_j$当前基线$Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$的平行线$Q_{j,1}L$，则$S_j(1\leqslant j\leqslant 4)$的所有点$P_{j,x}(x_{P,j,x}$，

$y_{P,j,x}$)必定都在当前基线 $Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$ 与平行线 $Q_{j,1}L$ 之间"必成立。此断言,可用反证法证明之:假设在平行线 $Q_{j,1}L$ 之外,至少存在某个点 $R_{j,0}(x_{R,j,0},y_{R,j,0})\in$ 当前子分布域 S_j。由于点 $R_{j,0}(x_{R,j,0},y_{R,j,0})$ 的当前基线垂直落程 $R_{j,0}A_{R,j,0}$ 必平行于点 $Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{Q,j,1})$ 的当前基线垂直落程 $Q_{j,1}A_{Q,j,1}$,故它们与当前基线 $Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$ 及其平行线 $Q_{j,1}L$ 可构成一个平行四边形。因该平行四边形对边相等,而点 $R_{j,0}(x_{R,j,0},y_{R,j,0})$ 在平行线 $Q_{j,1}L$ 之外,故点 $R_{j,0}(x_{R,j,0},y_{R,j,0})$ 的当前基线垂直落差 $|Y_{R,j,0}-y_{A,P,j,x}|$ 必大于点 $Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{Q,j,1})$ 的当前基线垂直落差 $|Y_{Q,j,0}-y_{AQ,j,1}|$。但这与点 $Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{Q,j,1})$ 的当前基线垂直落差 $|Y_{Q,j,0}-y_{AQ,j,1}|$ 为当前基线垂直落差最大点。所以,此断言成立。

其次,在已知仅有 1 个点 $Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{j,1})$ 满足 $|y_{Q,j,1}-y_{AQ,j,1}|=\max\{|y_{P,j,x}-y_{A,P,j,1}|\mid P_{j,x}(x_{P,j,x},y_{P,j,x})\in S_j\}$ 的情况下,由上述断言可知,点 $Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{Q,j,1})$ 必然是相对于当前基线 $Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$ 而言最远的唯一边沿点。因而,只有 1 个点 $Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{Q,j,1})$,才是凸壳 Q 在 S_j 中的当前基线垂直落差最大的新顶点。

其三,在已知确有多个点 $Q_{j,q}(x_{Q,j,q},y_{Q,j,q})$ $(1\leqslant q)$ 满足 $|y_{Q,j,q}-y_{AQ,j,q}|=\max\{|y_{P,j,x}-y_{AP,j,x}|\mid P_{j,x}(x_{P,j,x},y_{P,j,x})\in S_j\}$ 的情况下,同理可知,不仅各个点 $Q_{j,q}(x_{Q,j,q},y_{Q,j,q})$ 都是相对于当前基线 $Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$ 而言最远的边沿点,而且这些点 $Q_{j,q}(x_{Q,j,q},y_{Q,j,q})$ 一定共线(即:它们都在过点 $Q_{j,1}(x_{Q,j,1},y_{Q,j,1})$ 而平行于 S_j 当前基线 $Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$ 的平行线 $Q_{j,1}L$ 上),故连接所有 $Q_{j,q}(x_{Q,j,q},y_{Q,j,q})$ 必可构成相对于当前基线 $Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$ 而言最远的一条边,而这条边就是平行于 S_j 当前基线 $Q_{j,0}Q_{j+1,-1}$ 的、凸壳 Q 在 S_j 中的一条边。因而,只有这条边的 2 个端点(注意:除此当前基线垂直落差最大的线段两端点外,其余各点均为凸壳 Q 的内点),才是凸壳 Q 在 S_j 中的当前基线垂直落差最大的新顶点。

因此,凸壳顶点垂直落差最大性质定理成立。

6 基线垂直落差最大化凸壳递归新算法

笔者依据同构化凸壳构造基本定理,利用凸壳顶点的分布域性态与垂直落差特性的上述定理,首创出基于基线垂直落差最大化的凸壳递归新算法,其效率高于迄今最优秀凸壳算法之一的快凸壳算法。本新算法分为主算法与递归子算法两部分;下面,简述其主要算法思想。

6.1 垂直落差最大化凸壳递归新算法的主算法描述

本主算法可找出二维点集 $S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$ 的凸壳 Q 各顶点,其核心算法思想可简述如下:

第 0 步 "初始二维点集 S 小域化"初始化处理。

第 0-1 步 "最外点凸多边形"生成处理:寻找给定二维点集 S 的初始分布域(仍记为 S)的 X 轴、Y 轴坐标值最大、最小的全部最外点(注意:若有多个相同最值点,则只取其同类最值点的沿逆时针方向的首、尾端点或近、远端点;下类同),并标记这些最外点为二维点集 S 的凸壳 Q 之顶点,同时构造出其最外点凸多边形;

第 0-2 步 "最外点凸多边形"空心化处理:删除最外点凸多边形所覆盖的凸壳 Q 各内点,并把所剩点集仍标记为二维点集 S,并仍标记为初始分布域 S;

第 0-3 步 "初始分布域 S 斜边划分"小域化处理:如果初始分布域 S 为空,则转而执行最后步;否则,用最外点凸多边形的斜边,把初始分布域 S 划分为 j 个初始子分布域 S_j($1\leqslant j\leqslant 4$),并顺次执行第 1 步。

第 1 步 "凸壳 Q 在初始子分布域 S_j 中的各顶点,$1\leqslant j\leqslant 4$"生成处理。

第 1-1 步 如果当前子分布域 S_1 非空,则调用可找出位于 S_1 中的凸壳 Q 各顶点的递归过程子算法 Find_SubConvexHull (S_1);否则,顺次执行第 0-2 步;

第 1-2 步 如果当前子分布域 S_2 非空,则调用可找出位于 S_2 中的凸壳 Q 各顶点的递归过程子算法 Find_SubConvexHull (S_2);否则,顺次执行第 0-3 步;

第 1-3 步 如果当前子分布域 S_3 非空,则调用可找出位于 S_3 中的凸壳 Q 各顶点的递归过程子算法 Find_SubConvexHull (S_3);否则,顺次执行第 0-4 步;

第 1-4 步 如果当前子分布域 S_4 非空,则调用可找出位于 S_4 中的凸壳 Q 各顶点的递归过程子算法 Find_SubConvexHull (S_4);否则,顺次执行第 2 步;

最后步 形成凸壳处理。顺序把各子分布域 S_1,S_2,S_3,S_4 中所得各顶点,依次两两连接而得到的凸多边形 Q,必定是所求二维有限点集 S 的凸壳 Q。

6.2 垂直落差最大化凸壳递归新算法的子算法描述

本过程子算法可找出二维点集 $S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$ 的凸壳 Q 位于当前子分布域 S_j($1\leqslant j\leqslant 4$)中的各顶点,其核心算法思想可简述如下(其中,注释结构描述形式采用"{……}"表征):

Find_SubConvexHull(S_0) {递归过程子算法}

功能:找出二维点集 $S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$ 的凸壳 Q 位于当前子分布域 S_j($1\leqslant j\leqslant 4$)中的各顶点。

入口参数:S_0 为当前子分布域(注:主算法中,其第 1-j 步首次调用时,分别为各自所处理的初始子分布域 S_j,$1\leqslant j\leqslant 4$)。

第 0 步 进入子算法 {过程子算法入口端};

第 1 步 如果"当前子分布域 S_0 为空"{注:此即递归条件},则转而执行第 2 步;否则,顺次分步执行下列各子操作;

第 1-1 步 找出当前子分布域 S_0 的当前基线垂直落差最大点 $R_1(x_1,y_1)$ {注:当仅有唯一最值点时},或者最多两个最大点 $R_1(x_1,y_1)$,$R_2(x_2,y_2)$ {注:当有多个最值点时,};

第 1-2 步 标记所得当前基线垂直落差最大点为凸壳 Q 已求得顶点;

第 1-3 步 删除由当前基线及其垂直落差最大点构成的当前子分布域 S_0 的当前基线凸多边形{简称:当前基线凸多边形,且它必定不是三角形,就是四边形}所覆盖的凸壳 Q 各内点,并把其所剩点集仍标记为当前子分布域 S_0;

第 1-4 步 若此新的当前子分布域 S_0 为空,则转而执行第 2 步;否则,在此当前基线凸多边形中,用当前基线两端点各与其紧邻的当前基线垂直落差最大点所构成的两斜边,把当前子分布域 S_0 划分为最多两个更小的子分布域 $S_{0,1}$(或 $S_{0,1}$ 和 $S_{0,2}$),且这两斜边作为各自 $S_{0,1}$,$S_{0,2}$ 的当前基线,顺次执行后续递归调用子操作;

第 1-5 步 如果"子分布域 $S_{0,1}$ 非空",则递归调用子算法 Find_Sub_ConvexHull($S_{0,1}$);

第 1-6 步 如果"子分布域 $S_{0,2}$ 非空",则递归调用子算法 Find_Sub_ConvexHull($S_{0,2}$)";

第 2 步 返回调用点 {过程子算法出口端};

快凸壳算法的"基线距离最大化"的基线距离最大点的计

(下转第 240 页)

管理算法 ManySuppliers_SOFS_1：

算法 ManySuppliers_SOFS_1｛多供方主导型小单优先式等差划分订单管理算法｝

```
…；{常量、变量定义(略)}
>>>{算法开始(注意:以下只给出其关键部分,其余从略)}
…{初始化供方、需方个数,订量等(略)}
…{订单需求量 p[i]升序化处理(略)}
q←n DIV m; r←n MOD m; {生成等差化参数}
对 i←1,m @:S[i] ←0; {各队等待时间累加器初值化}
对 i←1,q @:\\ {需方个数控制}
  k←(i-1) * m; {生成需方定位参数}
  对 j←1,r @: {有尾项q+1队数控制}
    S[j]←S[j]+(q+1-i) * p[k+j]; {求有尾项q+1各队等待时间}
  对 j←r+1,m @: {无尾项q+1队数控制}
    S[j]←S[j]+(q-i) * p[k+j]; {求无尾项q-1各队等待时间}
//;
W←0; {总等待时间累加器初值化}
对 j←1,m @: {各队等待时间个数控制}
  W←W+S[j]; {求总等待时间}
行输出; 行输出; 行输出 "订单供应序列为:";
对 j←1,r @:\\ {有尾项q+1队数控制}
  行输出 "第",j,"个供方的订单供应子序列为:";
  对 i←1,q @:\\ {当前队的需方个数控制}
    k←(i-1) * m; {生成需方定位参数}
    输出 "(",j,",",i,D[k+j],",",p[k+j],"),", {输出前 q 项}
  //;
  行输出 "(",j,",",D[q * m+j],",",p[q * m+j],")",{输出第 q+
1 项}
//;
对 j←r+1,m @:\\ {无尾项q+1队数控制}
  行输出 "第",j,"个供方的订单供应子序列为:";
  对 i←1,q-1 @:\\ {当前队的需方个数控制}
    k←(i-1) * m; {生成需方定位参数}
    输出 "(",j,",",i,D[k+j],",",p[k+j],"),", {输出前 q-1
项}
  //;
  行输出 "(",j,",",D[(q-1) * m+j],",",p[(q-1) * m+j],")",
{输出第 q 项}
//;
…{总等待时间输出(略)}
!!!{算法结束}
```

根据可适用于第 i 个供方 S_i 的上述总等待时间公式 $W=t[p_1+(p_1+p_2)+(p_1+p_2+p_3)+\cdots+(p_1+p_2+\cdots+p_{n-3}+p_{n-2})+(p_1+p_2+\cdots+p_{n-2}+p_{n-1})]$，则只需对算法 ManySuppliers_SOFS_1 作少量置换处理，便可得多供方主导型小单优先式等差划分订单管理算法 ManySuplliers_SOFS_2(略)。

4.2.2 多供方主导型小单优先式变差划分订单管理模型与算法

多供方主导型小单优先式等差多队订单管理模型与算法，使同一订单供应子序列中相邻两订单下标之差强行固定为 m，固然有划分简单、注重均衡的优点，但显得有些机械勉强、不够自然的局限。为了克服此弱点，在将原始订单需求量序列$\{p_j\}$升序化映射为准订单供应序列$\{(D'_j, p'_j)\}$后$(1\leqslant j\leqslant n\geqslant 2)$，倘若考虑到各供方 $S_i(1\leqslant i\leqslant m\geqslant 2)$提供服务的响应及时性(指：当前供方一旦结束对其当前需方的服务，就立即响应其下一个需方的服务要求)，则可采用变差划分方法(指：使同一订单供应子序列中相邻两订单下标之差为非确定值)排定各个供方 S_i 的订单供应子序列$\{(S_i, k, D'_j, p'_j)\}(1\leqslant k)$，进而可构成所求多供方主导型小单优先式变差划分订单供应序列。显然，变差划分方法比等差划分方法具有更大的机动性、灵活性、适应性与敏捷性，从而可进一步提升供应链订单管理效率、水平与价值。但限于篇幅，作者将另文阐述多供方主导型小单优先式变差划分订单管理策略、模型及其算法。

结束语 本文提出的"基于先来优先、小量优先，采用等差划分、变差划分"的供方主导型供应链订单管理策略、模型及其算法，可有效提高供应链订单管理效率与水平，有利于深入研究供应链订单管理策略、模型，并进一步提升其订单管理算法效率。但这两种订单管理策略仅考虑了供方主导性与需方平等性的自然形态(即只按照订单到达次序、需求量、供方主导等参数来设计订单管理策略、模型及其算法)，尚未虑及客户意愿、客户价值、供需和谐等其它订单管理基本要素，而这正是下一步应当不懈图之的追求目标、研究方向、探索内容与重要课题。

参 考 文 献

[1] 一类生产调度问题的微电脑辅助决策[J]. 财经科学，1985(2)

[2] 李严锋，张丽娟. 现代物流管理[M]. 沈阳：东北财经大学出版社，2004

[3] 魏修建. 电子商务物流管理[M]. 重庆：重庆大学出版社，2004

[4] 魏修建，严建援，王焰. 电子商务物流[M]. 北京：人民邮电出版社，2001

[5] 周启海. C++同构化对象程序设计原理. 北京：清华大学出版社，北方交通大学出版社，2004

(上接第 223 页)

算量，比本文提出的"基线垂直落差最大化"的基线垂直落差最大点的计算量显然更大。因而，与迄今最优秀凸壳算法之一的快凸壳算法相比，基于基线垂直落差最大化的凸壳递归新算法，不仅同样简明高妙，而且其算法复杂度更低而算法效率更高。

结束语 依据同构化凸壳构造基本定理，本文率先指出并证明的凸壳顶点的分布域性态与垂直落差特性，为作者提出比快凸壳算法效率更高的垂直落差最大化凸壳递归新算法，奠定了算法构造创新的思想理论基础。同时，由于垂直落差最大化凸壳递归新算法对各初始子分布域及其各下级更小的当前子分布域垂直落差最大化串行处理，各自具有数据对象的独立性与处理过程的无关性，故垂直落差最大化凸壳递归新算法易作并行化改造，从而为把它进一步升级为垂直落差最大化凸壳并行新算法铺平了道路。因此，该算法可进一步改进和提高其算法效率，且更易于推广到基于机群的 m 群、n 域、p 向$(m>2, n>2, p>2)$的凸壳并行新算法研究；它将有效提高二维凸壳生成速度，可进一步改进和提高二维凸壳在图象处理、文字分解、模式识别、物体分类、计算图形、指纹识别、遥测遥控、地物辨识、地质勘探、空天利用等的应用水平和工作效率。

参 考 文 献

[1] Barber C, Dobkin D, Huhdanpaa H. The Quick hull algorithm for convex hulls[J]. ACM Trans. on Mathematical Software, 1997, 22: 469-483

[2] 周启海，黄涛. 基于四群四域四向动态基线倾角最大化圈绕凸壳并行新算法[J]. 计算机科学，2008，35(3)

[3] 周启海，杨祥茂，吴红玉. 单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 西华大学学报(自科版)，2006(2)

[4] 周启海. 论二维点集或线段集凸壳生成算法改进与优化的同构化方向[J]. 计算机科学，2007，34(7)

[5] 周启海. 简论二维点集凸壳研究的意义、现状与创新[C]//第三届全国几何设计与计算学术会议论文集. 北京：电子工业出版社，2007

[6] 周启海，黄涛，吴红玉，等. 基于最大基线倾角智能逼近的凸壳新算法[J]. 计算机科学，2007，34(9)

[7] 周启海，吴红玉，黄涛. 单域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 计算机科学，2007，34(8)

[8] 黄涛，周启海. 双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 计算机科学，2007，34(12)

[9] 黄涛，周启海，吴红玉. 双域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 计算机科学，2008，35(2)

[10] 周启海，黄涛. 基于双群双域四向水平倾角最小化圈绕的凸壳并行新算法[J]. 计算机科学，2008，35(2)