直觉区间值模糊集的熵、距离测度和相似测度

俞　峰　杨成梧

（南京理工大学动力工程学院　南京 210094）

摘　要　熵、距离测度和相似测度是模糊集理论中的三个基本概念。本文中，我们给出了直觉区间值模糊集的熵、距离测度和相似测度的公理化定义并讨论了它们之间的基本关系。有别于以往的交、并运算，我们提出了直觉区间值模糊集的加法、乘法运算，并在此基础上讨论了直觉区间值模糊集的熵、距离测度和相似测度的性质。

关键词　直觉区间值模糊集，公理化定义，熵，距离测度，相似测度

Entropy, Distance Measure and Similarity Measure of Intuitionistic Interval-valued Fuzzy Sets

YU Feng　YANG Cheng-wu

(School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract　Entropy, distance measure and similarity measure are three basic concepts in fuzzy set theory. In this paper we give the axiom definitions of entropy, distance measure and similarity measure of intuitionistic interval-valued fuzzy sets, and discuss basic relations among them. Different from the former intersection and union calculation, we propose the addition, multiplication calculation of intuitionistic interval-valued fuzzy sets, and discuss the properties on these calculations of entropy, distance measure and similarity measure.

Keywords　Intuitionistic interval-valued fuzzy sets, Axiom definition, Entropy, Distance measure, Similarity measure

1　直觉区间值模糊集

定义 1.1[1]

$D=\{a \mid a=\langle[\bar{a}^-,\bar{a}^+],[\underline{a}^-,\underline{a}^+]\rangle,[\bar{a}^-,\bar{a}^+]\subseteq[0,1],[\underline{a}^-,\underline{a}^+]\subseteq[0,1],\bar{a}^++\underline{a}^+\leqslant 1\}$，

$a\leqslant b\Leftrightarrow \bar{a}^-\leqslant\bar{b}^-,\bar{a}^+\leqslant\bar{b}^+,\underline{a}^-\geqslant\underline{b}^-,\underline{a}^+\geqslant\underline{b}^+$，

$a\vee b=\langle[\bar{a}^-\vee\bar{b}^-,\bar{a}^+\vee\bar{b}^+],[\underline{a}^-\wedge\underline{b}^-,\underline{a}^+\wedge\underline{b}^+]\rangle$，

$a\wedge b=\langle[\bar{a}^-\wedge\bar{b}^-,\bar{a}^+\wedge\bar{b}^+],[\underline{a}^-\vee\underline{b}^-,\underline{a}^+\vee\underline{b}^+]\rangle$，

则直觉区间值集合$(D,\leqslant)$是一个完备格，$\langle[1,1],[0,0]\rangle$与$\langle[0,0],[1,1]\rangle$分别为最大元与最小元。

定义 1.2[1]　给定论域 X 的直觉区间值模糊集 A，即指映射

$A:X\to D$,

$x\to A(x)=\langle[\bar{A}^-(x),\bar{A}^+(x)],[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\rangle$

$[\bar{A}^-(x),\bar{A}^+(x)]\subseteq[0,1],[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\subseteq[0,1],\bar{A}(x)+\underline{A}(x)\leqslant 1$，

将 X 上直觉区间值模糊集的全体记为 IIVFS(X)，即“Intuitionistic Interval-valued Fuzzy Sets”的意思。

定义 1.3[1]　设 $A,B\in$ IIVFS(X)，规定序及运算如下：

(1)$A\subseteq B\Leftrightarrow\bar{A}^-(x)\leqslant\bar{B}^-(x),\bar{A}^+(x)\leqslant\bar{B}^+(x),\underline{A}^-(x)\geqslant\underline{B}^-(x),\underline{A}^+(x)\geqslant\underline{B}^+(x)$；

(2)$A=B\Leftrightarrow B\subseteq B,B\subseteq A$；

(3)$A^c(x)=\langle[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)],[\bar{A}^-(x),\bar{A}^+(x)]\rangle$；

(4)$(A\cup B)(x)=\langle[\bar{A}^-(x)\vee\bar{B}^-(x),\bar{A}^+(x)\vee\bar{B}^+(x)],[\underline{A}^-(x)\wedge\underline{B}^-(x),\underline{A}^+(x)\wedge\underline{B}^+(x)]\rangle$；

(5)$(A\cup B)(x)=\langle[\bar{A}^-(x)\wedge\bar{B}^-(x),\bar{A}^+(x)\wedge\bar{B}^+(x)],[\underline{A}^-(x)\vee\underline{B}^-(x),\underline{A}^+(x)\vee\underline{B}^+(x)]\rangle$。

2　直觉区间值模糊集的熵、距离测度和相似测度的公理化定义

定义 2.1[4]　称映射 e: IIVFS$(X)\to[0,1]$为 IIVFS(X)的一个熵，如果 e 满足下面的性质：

(1)$e(A)=0\Leftrightarrow A$ 为分明集；

(2)$e(A)=1\Leftrightarrow[\bar{A}^-(x),\bar{A}^+(x)]=[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]$，$\forall x\in X$；

(3)对于任意的 $A\in$ IIVFS(X)，$e(A)=e(A^C)$；

(4)对于任意的 $A,B\in$ IIVFS(X)，当 $\bar{B}^-(x)\leqslant\underline{B}^-(x)$，$\bar{B}^+(x)\leqslant\underline{B}^+(x)$ 时，有 $\bar{A}^-(x)\leqslant\bar{B}^-(x),\bar{A}^+(x)\leqslant\bar{B}^+(x),\underline{A}^-(x)\geqslant\underline{B}^-(x),\underline{A}^+(x)\geqslant\underline{B}^+(x),\forall x\in X$，或者当 $\bar{B}^-(x)\geqslant\underline{B}^-(x)$，$\bar{B}^+(x)\geqslant\underline{B}^+(x)$ 时，有 $\bar{A}^-(x)\geqslant\bar{B}^-(x),\bar{A}^+(x)\geqslant\bar{B}^+(x),\underline{A}^-(x)\leqslant\underline{B}^-(x),\underline{A}^+(x)\leqslant\underline{B}^+(x),\forall x\in X$，则 $e(A)\leqslant e(B)$。

定义 2.2[4]　称映射 d: IIVFS$(X)\times$IIVFS$(X)\to[0,1]$为 IIVFS(X)的一个距离测度，如果 d 满足下面的性质：

(1)$d(H,H^C)=1\Leftrightarrow H$ 为分明集；

(2)$A=B\Leftrightarrow d(A,B)=0$；

(3)对于任意的 $A,B\in$ IIVFS(X)，$d(A,B)=d(B,A)$；

(4)对于任意的 $A,B,H\in$ IIVFS(X)，如果 $A\subseteq H\subseteq B$ 或者 $B\subseteq H\subseteq A$，则 $d(A,H)\leqslant d(A,B)$且 $d(B,H)\leqslant d(A,B)$。

定义 2.3[4]　称映射 s: IIVFS$(X)\times$IIVFS$(X)\to[0,1]$为 IIVFS(X)的一个相似测度，如果 s 满足下面的性质：

(1)$s(H,H^C)=0\Leftrightarrow H$ 为分明集；

(2)$s(H,H)=1$；

(3)对于任意的 $A,B\in$ IIVFS(X)，$s(A,B)=s(B,A)$；

(4)对于任意的 $A,B,H\in$ IIVFS(X)，如果 $A\subseteq H\subseteq B$ 或者 $B\subseteq H\subseteq A$，则 $s(A,H)\geqslant s(A,B)$且 $s(B,H)\geqslant s(A,B)$。

3　直觉区间值模糊集的熵、距离测度和相似测度之间的关系

命题 3.1　在直觉区间值模糊集的所有距离测度和所有相似测度之间，存在一个一一对应关系，并且一个距离测度 d 和它对应的相似测度 s 之间满足 $d+s=1$。称 $s=1-d$ 是由

俞　峰　博士生，主要从事智能决策支持方法与系统方面的研究。

距离测度 d 诱导的相似测度；称 $d=1-s$ 是由相似测度 s 诱导的距离测度。

由命题 3.1 可知，距离测度和相似测度是对偶概念，距离测度用于度量两个 IIVF 集的异性，相似测度用于度量两个 IIVF 集的共性。

命题 3.2 设 d 是 IIVFS(X)的距离测度，且 $e(A)=1-d(A,A^C)$，其中 $A\in$ IIVFS(X)，则 $e(A)$ 是 IIVFS(X)的一个熵，且称 $e(A)$ 是由距离测度 d 诱导的熵。

证明：因为 $0\leqslant d(A,A^C)\leqslant 1$，所以 $0\leqslant e(A)\leqslant 1$。

(1)A 为分明集 $\Leftrightarrow d(A,A^C)=1\Leftrightarrow e(A)=1-d(A,A^C)=0$。

(2)设 $A(x)=\langle[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)],[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\rangle$，$A^c(x)=\langle[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)],[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]\rangle$，

可得 $[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]=[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\Leftrightarrow A=A^C\Leftrightarrow d(A,A^C)=0\Leftrightarrow e(A)=1-d(A,A^C)=1$。

(3)因为 $d(A,A^C)=d(A^C,A)$，所以 $e(A)=1-d(A,A^C)=1-d(A^C,A)=1-d(A^C,(A^C)^C)=e(A^C)$。

(4)设 $A(x)=\langle[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)],[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\rangle$，$A^c(x)=\langle[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)],[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]\rangle$，

$B(x)=\langle[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)],[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]\rangle$，$B^c(x)=\langle[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)],\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)\rangle$。

当 $[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]\leqslant[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]$ 时，有

$[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]\leqslant[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]$，

$[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\geqslant[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]\ \forall x\in X$，

即为 $A\subseteq B\subseteq B^C$，也就是说 $B\subseteq B^c\subseteq A^C$，所以 $A\subseteq B\subseteq B^c\subseteq A^C$，根据距离测度定义，可得

$d(A,A^C)\geqslant d(B,A^C)\geqslant d(B,B^C)$，

从而，有

$e(A)=1-d(A,A^C)\leqslant 1-d(B,B^C)=e(B)$。

同理，当 $[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]\geqslant[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]$ 时，有

$[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]\geqslant[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]$，

$[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\leqslant[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]$，$\forall x\in X$，

易知 $e(A)\leqslant e(B)$。

命题 3.3 设 s 是 IIVFS(X)的相似测度，且 $e(A)=s(A,A^C)$，其中 $\forall A\in$ IIVFS(X)，则 $e(A)$ 是 IIVFS(X)的一个熵，且称 $e(A)$ 是由相似测度 d 诱导的熵。

证明：显然 $0\leqslant e(A)=s(A,A^C)\leqslant 1$。

(1)A 为分明集 $\Leftrightarrow s(A,A^C)=0\Leftrightarrow e(A)=0$。

(2)设

$A(x)=\langle[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)],[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\rangle$，$A^c(x)=\langle[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)],[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]\rangle$

可得

$[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]=[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\Leftrightarrow A=A^C\Leftrightarrow s(A,A^C)=1\Leftrightarrow e(A)=1$。

(3)对于任意的 $A\in$ IIVFS(X)，便有 $s(A,A^C)=s(A^C,A)$，进而

$e(A)=s(A,A^C)=s(A^C,A)=s(A^C,(A^C)^C)=e(A^C)$。

(4)设

$A(x)=\langle[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)],[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\rangle$，$A^c(x)=\langle[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)],[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]\rangle$，

$B(x)=\langle[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)],[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]\rangle$，$B^c(x)=\langle[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)],[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]\rangle$。

当 $[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]\leqslant[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]$ 时，有

$[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]\leqslant[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]$，$[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\geqslant[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]$，$\forall x\in X$，即为 $A\subseteq B\subseteq B^C$，也就是说 $B\subseteq B^c\subseteq A^C$，所以 $A\subseteq B\subseteq B^c\subseteq A^C$，根据相似测度定义，可得

$s(A,A^C)\leqslant s(B,A^C)\leqslant s(B,B^C)$，

从而，有

$e(A)=s(A,A^C)\leqslant s(B,B^C)=e(B)$。

同理，当 $[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]\geqslant[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]$ 时，有

$[\overline{A}^-(x),\overline{A}^+(x)]\geqslant[\overline{B}^-(x),\overline{B}^+(x)]$，$[\underline{A}^-(x),\underline{A}^+(x)]\leqslant[\underline{B}^-(x),\underline{B}^+(x)]$，$\forall x\in X$，

易知 $e(A)\leqslant e(B)$。

4 加法与乘法下的 IIVF 集

集合之间的交、并通常采用 Zadeh 算子（$\wedge$，$\vee$）来定义。Zadeh 算子的优点是运算简单，除了不满足互补律外，与经典的运算相似。但是也有缺点，因“$\wedge$”是取小运算，两个集合的交的结果只保留了它们的“下端”信息，其余的都被取小运算舍弃了；而“$\vee$”是取大运算，两个集合的并的结果只保留了它们的“上端”信息，其余的都被取大运算舍弃了。因此采用 Zadeh 算子，往往使计算与实际情况有较大出入，不能满足实际的需要，为了适应不同的描述对象，本文在讨论 IIVF 集关于加法和乘法的运算及性质的基础上，研究了 IIVF 集关于加法和乘法运算下熵、距离测度和相似测度的性质。

在这一节，我们首先给出 IIVF 集关于加法和乘法的运算及性质。

命题 4.1 设 $A,B\in$ IIVFS(X)，定义加法和乘法分别为：

$A\oplus B=\{\langle x,[\overline{A}^-(x)+\overline{B}^-(x)-\overline{A}^-(x)+\overline{B}^-(x)+\overline{A}^+(x),\overline{B}^+(x)-\overline{A}^+(x),\overline{B}^+(x)]$，

$[\underline{A}^-(x),\underline{B}^-(x),\underline{A}^+(x),\underline{B}^+(x)]\rangle\mid x\in X\}$，

$A\odot B=\{\langle x,[\overline{A}^-(x),\overline{B}^-(x),\overline{A}^+(x),\overline{B}^+(x)]$，

$[\underline{A}^-(x),\underline{B}^-(x)-\underline{A}^-(x),\underline{B}^-(x),\underline{A}^+(x),\underline{B}^+(x)-\underline{A}^+(x)\underline{B}^+(x)]\rangle\mid x\in X\}$。

则 $A\oplus B$ 和 $A\odot B$ 也是论域 X 上的 IIVF 集。

证明：仅证加法，乘法类似可证。由 $0\leqslant\overline{A}^-(x)\leqslant\overline{A}^+(x)\leqslant 1$，$0\leqslant\overline{B}^-(x)\leqslant\overline{B}^+(x)\leqslant 1$，可有 $0\leqslant 1-(1-\overline{A}^-(x))(1-\overline{B}^-(x))\leqslant 1-(1-\overline{A}^+(x))(1-\overline{B}^+(x))\leqslant 1$，即

$$0\leqslant\overline{A}^-(x)+\overline{B}^-(x)-\overline{A}^-(x)\overline{B}^-(x)\leqslant\overline{A}^+(x)+\overline{B}^+(x)-\overline{A}^+(x)\overline{B}^+(x)\leqslant 1。\tag{4.1}$$

因为 $0\leqslant\underline{A}^-(x)\leqslant\underline{A}^+(x)\leqslant 1$，$0\leqslant\underline{B}^-(x)\leqslant\underline{B}^+(x)\leqslant 1$，所以

$$0\leqslant\underline{A}^-(x)+\underline{B}^-(x)\leqslant\underline{A}^+(x)+\underline{B}^+(x)\leqslant 1\tag{4.2}$$

根据 $\overline{A}^+(x)+\underline{A}^+(x)\leqslant 1$，$\overline{B}^+(x)+\underline{B}^+(x)\leqslant 1$，有 $\underline{A}^+(x)\underline{B}^+(x)\leqslant(1-\overline{A}^+(x))(1-\overline{B}^+(x))$，易知

$$\overline{A}^+(x)+\overline{B}^+(x)-\overline{A}^+(x)\overline{B}^+(x)+\underline{A}^+(x)\underline{B}^+(x)\leqslant 1\tag{4.3}$$

综合(4.1)-(4.3)三式，便得 $A\oplus B$ 是论域 X 上的 IIVF 集。

设 $2A=A\oplus A$，$3A=A\oplus A\oplus A$，…，即知

$2A=\{\langle x,[1-(1-\overline{A}^-(x))^2,1-(1-\overline{A}^+(x))^2],[(\underline{A}^-(x))^2,(\underline{A}^+(x))^2]\rangle\mid x\in X\}$，

$3A=\{\langle x,[1-(1-\overline{A}^-(x))^3,1-(1-\overline{A}^+(x))^3],[(\underline{A}^-(x))^3,(\underline{A}^+(x))^3]\rangle\mid x\in X\}$，

$\vdots$

$nA=\{\langle x,[1-(1-\overline{A}^-(x))^n,1-(1-\overline{A}^+(x))^n],[(\underline{A}^-(x))^n,(\underline{A}^+(x))^n]\rangle\mid x\in X\}$。

同理，可设 $A^2=A\odot A$，$A^3=A\odot A\odot A$，…，则有

$A^2=\{\langle x,[(\overline{A}^-(x))^2,(\overline{A}^+(x))^2],[1-(1-\underline{A}^-(x))^2,1$

$-(1-\underline{A}^{+}(x))^{2}]\rangle|x\in X\}$,

$A^{3}=\{\langle x,[(\overline{A}^{-}(x))^{3},(\overline{A}^{+}(x))^{3}],[1-(1-\underline{A}^{-}(x))^{3},1-(1-\underline{A}^{+}(x))^{3}]\rangle|x\in X\}$,

$\vdots$

$A^{n}=\{\langle x,[(\overline{A}^{-}(x))^{n},(\overline{A}^{+}(x))^{n}],[1-(1-\underline{A}^{-}(x))^{n},1-(1-\underline{A}^{+}(x))^{n}]\rangle|x\in X\}$ 。

因而,可得加法和乘法的下列性质:

命题 4.2 如果 n,m 都是正整数,且 $n\leqslant m,A\in$ IIVFS(X),则 $nA\subseteq mA,A^{m}\subseteq A^{n}$。

命题 4.3 如果 n 是正整数,$A,B\in$ IIVFS(X),且 $A\subseteq B$,则 $nA\subseteq nB,A^{n}\subseteq B^{n}$。

命题 4.4 如果 n 是正整数,$A,B\in$ IIVFS(X),则 $n(A\oplus B)=nA\oplus nB,(A\odot B)^{n}=A^{n}\odot B^{n}$。

证明:根据加法定义,易知

$$
\begin{aligned}
&n(A\oplus B)\\
&=\{\langle x,[1-(1-\overline{A}^{-}(x)-\overline{B}^{-}(x)+\overline{A}^{-}(x)\overline{B}^{-}(x))^{n},\\
&1-(1-\overline{A}^{+}(x)-\overline{B}^{+}(x)+\overline{A}^{+}(x)\overline{B}^{+}(x))^{n}],\\
&[(\underline{A}^{-}(x)\underline{B}^{-}(x))^{n},(\underline{A}^{+}(x)\underline{B}^{+}(x))^{n}]\rangle|x\in X\}\\
&=\{\langle x,[1-(1-\overline{A}^{-}(x))^{n}(1-\overline{B}^{-}(x))^{n},\\
&1-(1-\overline{A}^{+}(x))^{n}(1-\overline{B}^{+}(x))^{n}],\\
&[(\underline{A}^{-}(x))^{n}(\underline{B}^{-}(x))^{n},(\underline{A}^{+}(x))^{n}(\underline{B}^{+}(x))^{n}]\rangle|x\in X\},
\end{aligned}
$$

同理,可有

$$
\begin{aligned}
&nA\oplus nB\\
&=\{\langle x,[1-(1-\overline{A}^{-}(x))^{n}+1-(1-\overline{B}^{-}(x))^{n}-(1-(1-\overline{A}^{-}(x))^{n})(1-(1-\overline{B}^{-}(x))^{n}),\\
&1-(1-\overline{A}^{+}(x))^{n}+1-(1-\overline{B}^{+}(x))^{n}-(1-(1-\overline{A}^{+}(x))^{n}(1-(1-\overline{B}^{+}(x))^{n})],\\
&[(\underline{A}^{-}(x))^{n}(\underline{B}^{-}(x))^{n},(\underline{A}^{+}(x))^{n}(\underline{B}^{+}(x))^{n}]\rangle|x\in X\}\\
&=\{\langle x,[1-(1-\overline{A}^{-}(x))^{n}(1-\overline{B}^{-}(x))^{n},\\
&1-(1-\overline{A}^{+}(x))^{n}(1-\overline{B}^{+}(x))^{n}],\\
&[(\underline{A}^{-}(x))^{n}(\underline{B}^{-}(x))^{n},(\underline{A}^{+}(x))^{n}(\underline{B}^{+}(x))^{n}]\rangle|x\in X\},
\end{aligned}
$$

因此,$n(A\oplus B)=nA\oplus nB$ 得证,对于 $(A\odot B)^{n}=A^{n}\odot B^{n}$ 类似可证。

命题 4.5 对于任意的 $A,B\in$ IIVFS(X),有 $A^{C}\odot B^{C}=(A\oplus B)^{C},A^{C}\oplus B^{C}=(A\odot B)^{C}$。

证明:根据加法和乘法的定义,可得

$A^{c}\odot B^{c}=\{\langle x,[\underline{A}^{-}(x)\underline{B}^{-}(x)\underline{A}^{+}(x)\underline{B}^{+}(x)],[\overline{A}^{-}(x)+\overline{B}^{-}(x)-\overline{A}^{-}(x)\overline{B}^{+}(x),\overline{A}^{+}(x)+\overline{B}^{+}(x)-\overline{A}^{+}(x)\overline{B}^{+}(x)]\rangle|x\in X\}$,

$A\oplus B=\{\langle x,[\overline{A}^{-}(x)+\overline{B}^{-}(x)]-\overline{A}^{-}(x)\overline{B}^{-}(x),\overline{A}^{+}(x)+\overline{A}^{+}(x)-\overline{A}^{+}(x)\overline{B}^{+}(x)],[\underline{A}^{-}(x)\underline{B}^{-}(x),\underline{A}^{+}(x)\underline{B}^{+}(x)]\rangle|x\in X\}$,

所以 $A^{c}\odot B^{c}=(A\oplus B)^{c}$。同理可证 $A^{C}\oplus B^{C}=(A\odot B)^{C}$。

易证:

命题 4.6 若 $A,B\in$ IIVFS(X),则$(A\cap B)\ (A\cup B)=A\ B,(A\cap B)\odot(A\cup B)=A\odot B$。

命题 4.7 若 $A,B\in$ IIVFS(X),则 $A\odot B\subseteq A\cap B\subseteq A\cup B\subseteq A\subseteq B$。

5 加法与乘法下的 γ-熵

IIVF 集关于加法和乘法运算下的 γ-熵与文献[5]定义的 σ-熵较为类似,但是又有所不同。

定义 5.1 设 e 是 IIVFS(X)的一个熵。称 e 为 IIVFS(X)的 γ-熵,如果对于任意的 $A\in$ IIVFS(X),任意的分明集 B,有

$e(A)=e(A\odot B)+e(A\odot B^{C})$。

命题 5.2 e 为 IIVFS(X)的 γ-熵,当且仅当对于任意的 $A\in$ IIVFS(X),任意的分明集 B,有

$e(A)=e(A\oplus B)+e(A\oplus B^{C})$。

证明:必要性。设 e 为 IIVFS(X)的 γ-熵,则对于任意的 $A\in$ IIVFS(X),任意的分明集 B,有 $e(A)=e(A\odot B)+e(A\odot B^{C})$。进而

$e((A\oplus B))=e((A\oplus B)\odot B)+e((A\oplus B)\odot B^{C}),e(A\oplus B^{C})=e((A\subseteq\oplus B^{C})\odot B)+e((A\subseteq\oplus B^{C})\odot B^{C})$,

可有

$$B(x)=\begin{cases}\langle[1,1],[0,0]\rangle,x\in B\\ \langle[0,0],[1,1]\rangle x\notin B\end{cases},$$

$$B^{c}(x)=\begin{cases}\langle[1,1],[0,0]\rangle,x\in B\\ \langle[0,0],[1,1]\rangle x\notin B\end{cases},$$

易知

$(A\oplus B)\odot B=B,(A\oplus B)\odot B^{C}=A\odot B^{C},(A\oplus B^{C})\odot B=B^{C},(A\oplus B^{C})\odot B^{C}=A\odot B$,注意到 $e(B)=0,e(B^{C})=0$,则得

$e((A\oplus B))=e(B)+e(A\odot B^{C})=e(A\odot B^{C}),e(A\oplus BC)=e(B^{C})+e(A\odot B)=e(A\odot B)$,

即 $e(A)=e(A\odot B^{C})+e(A\odot B)$。

充分性类似可证。

命题 5.3 e 为 IIVFS(X)的 γ-熵,当且仅当对于任意的 $A\in$ IIVFS(X),任意的分明集 B,有 $e(A)=e(A\oplus B)+e(A\odot B)$。

证明:充分性。对于任意的 $A\in$ IIVFS(X),任意的分明集 B,有 $e(A)=e(A\odot B)+e(A\oplus B)$,又因为

$$B(x)=\begin{cases}\langle[1,1],[0,0]\rangle,x\in B\\ \langle[0,0],[1,1]\rangle x\notin B\end{cases}$$

所以

$$(A\oplus B)(x)=((A\odot B^{c})\oplus B)(x)=\begin{cases}\langle[1,1],[0,0]\rangle, & x\in B\\ \langle[\overline{A}^{-}(x),\overline{A}^{+}(x)],[[\underline{A}^{-}(x),\underline{A}^{+}(x)]]\rangle, & x\notin B\end{cases}$$

则知 $e(A)=e(A\odot B)+e((A\odot B^{C})\oplus B)$。对于 IIVF 集 $A\odot B^{C}$,分明集 B,便得

$e(A\odot B^{C})=e((A\odot B^{C})\odot B)+e((A\odot B^{C})\ B)$

注意到

$$((A\odot B^{c})\odot B)(x)=\begin{cases}\langle[1,1],[0,0]\rangle,x\in B\\ \langle[0,0],[1,1]\rangle x\notin B\end{cases}$$

进而有 $e((A\odot BC)\odot B)=0$,因此 $e(A\odot B^{C})=e((A\odot B^{C})\ B)$,故 $e(A)=e(A\odot B)+e(A\odot B^{C})$,即 e 为 IIVFS(X)的 γ-熵。对于必要性类似可证。

6 加法与乘法下的距离测度

命题 6.1 设 d 为 IIVFS(X)上的距离测度,则对于任意的 $A,B\in$ IIVFS(X),任意的分明集 H,有

$d(A,B)=d(A\oplus H,B\oplus H)+d(A\oplus H^{C},B\oplus H^{C})\Leftrightarrow(A,B)=d(A\odot H,B\odot H)+d(A\odot H^{C},B\odot H^{C})$。

证明:"$\Leftarrow$"。设 $d(A,B)=d(A\odot H,B\odot H)+d(A\odot H^{C},B\odot H^{C})$,则对于 IIVF 集 $A\oplus H$ 和 $B\oplus H$,分明集 H,可得

$d(A\oplus H,B\oplus H)=d((A\oplus H)\odot H,(B\oplus H)\odot H)+d((A\oplus H)\odot H^{C},(B\oplus H)\odot H^{C})$,

根据上一节的证明,有

$(A\oplus H)\odot H=H,(B\oplus H)\odot H=H,(A\oplus H)\odot H^{C}=A\odot H^{C},(B\oplus H)\odot H^{C}=B\odot H^{C}$,

所以

(下转第 205 页)

在 $RT_1^{\neg}$ 中，Li[6] 给出了两个约束域，树约束域(tree domain)和范围约束域(range domain)，Li 证明这两个约束域是量词可消除的，并且消除量词后的可满足性判断具有相对于程序大小的多项式时间解。我们证明扩展的范围约束域同样满足允许闭性，并且程序的计算时间复杂度为 PTIME。

定义 3.4 一个扩展的范围约束域，是一个 Li[6] 描述的范围约束域，其上增加一种原始约束 $x \neq y$。

定理 3.3 一个扩展的范围约束域满足量词可消除的。

证明：考虑 $\tilde{\exists}\varphi_1 \wedge \cdots \varphi_n$，其中 φ_i 是原始约束，当原始约束为 $x \neq y$ 时，可取 $x=c$，c 为常量，$y=c_1$，c_1 为大于 c 的常量，将 $x \neq y$ 代以 $(x=c) \wedge (y=c_1)$ 这样原始约束的存在量词可消除，当原始约束为别的形式时，参考 Li[6] 的证明，量词消除可成立。

定理 3.4 设 C 是扩展的范围约束域，D 是其上的解释，则 D 是允许闭的(admissible closed)。

证明：考虑原始约束的否定，由范围约束域的定义，原始约束只有如下几种：$x=y, x \neq y, x=c, x \in (c_1, c_2)$（括弧可以是方括弧），可以验证每个原始约束的否定也是原始约束或原始约束的析取，如 $x \notin (c_1, c_2) \leftrightarrow x \in (*, c_1) \vee (c_2, *)$，由定理 3.3 和文献[11]可得扩展范围约束域上的结构 D 是允许闭的。

由此得知：模型的操作计算在扩展的范围约束域上是可行的。

结束语 本文通过将 Stuckey 的 CLP-CN 的语义引入 RT 授权模型中，给出了在分布协作环境中的一个支持否定授权的委托模型，给出了否定推理的操作计算语义，讨论了该模型的可靠性和完备性，并对适合该模型的约束域进行了简单讨论，给出了可行的约束域。进一步的工作是找到更多的约束域类型以适应应用环境的需求，这是我们今后的研究工作。

参 考 文 献

[1] Li Ninghui, Mitchell J C, Winsborough W H. Design of a role-based trust management framework // Proceedings of the 2002 IEEE Symposium on Security and Privacy. Oakland, CA, USA, 2002: 114-130
[2] Ye Chunxiao, et al. An attribute-based extended delegation model. Journal of Computer Research and Development, 2006, 43 (6): 1050-1057
[3] Li Ninghui, et al. Delegation logic: a logic-based approach to distributed authorization. ACM Transactions on Information and System Security, 2003, 6(1): 128-171
[4] Trevor J. SD3: a trust management system with certificate evaluation // Proceedings of the 2001 IEEE Symposium on Security and Privacy. IEEE Computer Society Press, May 2001: 106-115
[5] Freudenthal E, et al. dRBAC: distributed role-based access control for dynamic coalition Environment // Proc. 22nd International Conference on Distributed Computing Systems (ICDCS'02). Vienna: IEEE, 2002: 294-306
[6] Li Ninghui, Mitchell J C. Datalog with constraints: A foundation for trust management languages // Proceedings of the Fifth International Symposium on Practical Aspects of Declarative Languages, (PADL 2003). Lecture Notes in Computer Science, vol. 2562, New York, Springer-Verlag: 58-73
[7] JaffarJ, Maher M, Marriott K, et al. The semantics of constraint logic programs. Journal of logic programming, 1994, 19(20): 1-679
[8] Lloyd J W. Foundations of logic programming. Springer-Verlag, 1987
[9] Chan D. Constructive Negation Based on the Completed DataBase // Proceedings of 5th International Conference and Symposium on Logic Programming. 1988: 111-125
[10] Drabent W. What is Failure? An Approach to Constructive Negation. Acta Inf., 1995, 32(1): 27-29
[11] Stuckey J C. Negation and constraint logic programming. Information and Computation, 1995, 118(1): 12-33
[12] Dovier A, Pontelli E, Rossi G. A necessary condition for constructive negation in constraint logic programming. Information Processing Letters, 2000, 74(3/4): 147-156

（上接第 201 页）

$d(A \oplus H, B \oplus H) = d(H, H) + d(A \odot H^C, B \odot H^C) = d(A \odot H^C, B \odot H^C)$，

同理，即知

$d(A \oplus H^C, B \oplus H^C) = d(H^C, H^C) + d(A \odot H, B \odot H) = d(A \odot H, B \odot H)$，

因此

$d(A,B) = d(A \odot H, B \odot H) + d(A \odot H^C, B \odot H^C) = d(A \oplus H^C, B \oplus H^C) + d(A \oplus H, B \oplus H)$。

对于“⇒”类似可证。

易证：

命题 6.2 设 d 为 IIVFS(X)上的一个距离测度，对于任意的 $A, B, H \in$ IIVFS(X)，如果 $A \subseteq B \subseteq H$，则有

$d(A, B \oplus H) \geqslant d(B, A \oplus H)$。

命题 6.3 设 d 为 IIVFS(X)上的一个距离测度，对于任意的 $A, B, H \in$ IIVFS(X)，如果 $A \subseteq B$，则有

$d(A \odot H, B \oplus H) \geqslant d(A, B)$。

命题 6.4 设 d 为 IIVFS(X)上的一个距离测度，对于任意的 $A, B \in$ IIVFS(X)，则有

$d(A \odot B, A \oplus B) \geqslant d(A \cap B, A \cup B)$。

7 加法与乘法下的相似测度

相似测度与距离测度有着较为相似的性质，我们可以类似地证明下列命题：

命题 7.1 设 s 为 IIVFS(X)上的相似测度，则对于任意的 $A, B \in$ IIVFS(X)，任意的分明集 H，有

$s(A,B) = s(A \odot H, B \oplus H^C) + s(A \odot H^C, B \oplus H) \Leftrightarrow s(A,B) = s(A \odot H, B \oplus H^C) + s(A \oplus H, B \odot H^C)$。

命题 7.2 设 s 和 d 为 IIVFS(X)上相互诱导的相似测度和距离测度，则对于任意的 $A, B \in$ IIVFS(X)，任意的分明集 H，有

$s(A,B) = s(A \odot H, B \oplus H^C) + s(A \odot H^C, B \oplus H) \Leftrightarrow d(A,B) = d(A \oplus H, B \oplus H) + d(A \oplus H^C, B \oplus H^C)$。

命题 7.3 设 s 是 IIVFS(X)上的相似测度，且对于任意的 $A, B \in$ IIVFS(X)，任意的分明集 H，均有 $s(A,B) = s(A \odot H, B \oplus H^C) + s(A \odot H^C, B \oplus H)$，则由 s 诱导的熵为 γ-熵。

参 考 文 献

[1] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31: 343-349
[2] Atanassov K. Operations over interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64: 159-174
[3] Mondal T, Samanta S. Topology of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 119: 483-194
[4] 郭效芝. 模糊不确定性度量的探讨及扩展[D]. 西北大学硕士学位论文. 2004: 48-50
[5] Liu X. Entropy distance measures and similarity measure of fuzzy sets and their relations [J]. Fuzzy sets and systems, 1992, 72: 331-348