# 微蜂窝结构分布式天线系统下行链路 性能与信道容量分析\*<sup>)</sup>

## 曹 汐 朱光喜 梁学俊

(华中科技大学电子与信息工程系 武汉 430074)

摘 要 近期研究表明分布式天线系統(DAS)能有效扩展系统覆盖,增加系统容量并减小辐射功率。本文提出了两种应用于微蜂窝结构 DAS 的传输策略;单天线选择方式(STAS)和双天线选择方式(DTAS),并从信息论的角度分析 了这两种方式下的接收端信噪比(SNR)、误码率(SER)和各态遍历信道容量。理论分析结果证明,与传统蜂窝系统相 比,本文提出的微蜂窝结构 DAS 能显著提高接收端 SNR 和信道容量并降低误码率,特别是对于小区边缘区域用户。 此外,该微蜂窝结构 DAS 在提高 30%的平均 SNR 和信道容量的同时能降低至少 75%的发射功率,并能有效对抗实 际系统中的路径衰落。因此,在功率受限的蜂窝系统中微蜂窝结构的 DAS 将成为提高信道容量、对抗大尺度衰落的 有效解决方案。

关键词 微蜂窝,分布式天线,信道容量,空间分集

#### Downlink Performance and Channel Capacity Analysis for Micro-cellular Distributed Antenna Systems

CAO Xi ZHU Guang-xi LIANG Xue-jun

(Department of Electronics & Information Engineering, Huazhong Univ. of Sci. & Tech., Wuhan 430074, China)

Abstract Distributed antenna systems (DAS) is considered to be a promising candidate for future mobile communications. Recent studies have shown that DAS can extend coverage, increase system capacity and reduce radiated power. In this paper, received signal-to-noise ratio (SNR) symbol error probability (SER) and ergodic capacity of two transmission strategies: single transmit antenna selection (STAS) scheme and dual transmit antennas selection (DTAS) scheme are analyzed in downlink micro-cellular DAS. The results show that compared with conventional cellular systems, the proposed micro-cellular DAS obviously improves received SNR and capacity for the users near the cell boundary. Moreover, average SNR and capacity are both improved more than 30% while saving more than 75% transmit power. Therefore, micro-cellular DAS architecture appears to be an effective solution to improve capacity and resist path loss for power-limited cellular systems.

Keywords Micro-cell, Distributed antenna, Channel capacity, Spatial diversity

## 1 引言

随着移动通信用户数量的持续增长,系统容量限制成为 制约传统蜂窝系统(CCS)发展的一个重大问题。相比而言, 分布式天线系统(DAS)能提供更大传输分集增益,扩展系统 覆盖并提高系统容量,因此 DAS 在未来移动通信系统中将有 很大的应用潜力,并成为研究热点。文献[1]最早在室内环境 下提出 DAS,并利用泄漏同轴电缆广播信号以解决室内无线 通信的覆盖问题。关于 DAS 的近期研究主要关注于最大化 系统覆盖,降低辐射功率和提高中断容量等方面<sup>[2,8]</sup>。由于下 行链路更容易分析,大多数文献集中分析了上行链路的传输 性能<sup>[24]</sup>,Roh 在文献[3]中证明广义 DAS(GDAS)的中断容 量超过传统 MIMO 系统,但移动终端位置对容量的影响并没 有提到。虽然也有少量文献研究了 DAS 的下行链路传输性 能<sup>[64]</sup>,然而文献[6]对基于空间复用的 DAS 下行链路性能的 研究是在非蜂窝环境下进行的,文献[7]分析了用于码分多址 (CDMA)情况下的 DAS 下行信道容量,但分析结果只是来源 于计算机仿真,文献[8]对用于广播和组播业务的 DAS 下行 链路性能的研究也只是基于计算机仿真。尽管计算机仿真有 一定的参考价值,但基于信息论的理论分析能更清楚地为我 们揭示系统所能达到的容量上限。

本文从信息论的角度研究了微蜂窝结构 DAS 在系统结构上的优势,提出了两种应用于微蜂窝结构 DAS 的下行链路传输策略:单天线选择方式(STAS)和双天线选择方式(DTAS),并分析了这两种方式下的接收端信噪比(SNR)、误码率(SER)性能和各态遍历信道容量。理论分析结果表明,在功率受限的蜂窝系统中微蜂窝结构的 DAS 将成为提高信道容量、对抗大尺度衰落的有效解决方案。

### 2 系统模型

#### 2.1 蜂窝结构与多址方式

如图 1 所示,考虑由一个小基站(SBS)和多个分布式天 线单元(DAM)组成的微蜂窝结构 DAS,每个 DAM 通过专 线、光纤或专用射频链路与 SBS 建立物理连接。DAM 的实

<sup>\*)</sup>国家高技术研究发展计划资助项目(2003AA12331005)和(2006AA01Z277)、国家自然科学基金资助项目(60496315)。曹 汐 博士研究 生,主要研究方向为分布式 MIMO-OFDM 系统中的信道模型与传输策略;朱光喜 教授,博士生导师,研究方向为宽带无线通信、多媒体技术; 梁学俊 博士研究生,主要研究方向为 MIMO-OFDM 系统自适应传输及信道反馈。

际数量往往由用户分布、覆盖情况和其他环境因素决定,本文 考虑一个合理而常见的例子:1 个 SBS 加 6 个 DAM 均匀分 布。传统蜂窝系统(CCS)只有一个大功率的基站覆盖整个蜂 窝区域,相比而言本文提出的微蜂窝结构 DAS 将整个蜂窝区 域分成由 7 个均匀分布的天线分别覆盖的 7 个微蜂窝。假设 整个蜂窝区域的半径是 R,微蜂窝的半径是 r。第 i 个 DAM 的发射功率设为  $P_i(i=0,1,\dots,6)$ ,约定 SBS 的编号为 i=0。 为公平起见,设 $\sum_{i=0}^{e} P_i = P$ ,其中 P 是 CCS 中基站的总发射 功率。



图1 微蜂窝结构 DAS

为简化分析,文中假设单用户情况。然而该假设并不影 响本文的分析结果应用于实际多用户系统,例如时分多址 (TDMA)、频分多址(FDMA)、码分多址(CDMA)和正交频分 多址(OFDMA)系统等。

#### 2.2 传输策略

得益于微蜂窝结构 DAS 在空间自由度上的增加,相比于 CCS 的简单传输策略,DAS 中可以通过利用各种可能的分布 式多天线的组合获得更多可行的传输策略。为降低总的发射 功率,本文考虑两种基于发射天线选择的传输策略;单发射天 线选择(STAS)方式和双发射天线选择(DTAS)方式。其中, STAS 方式通过以最小传播路径损失为准则选择单个 DAM 或 SBS 传输信号,这种方式能最小化发射功率并获得宏选择 分集增益;DTAS 方式则通过 SBS 和所选的某个 DAM 同时 传输信号,天线选择准则也是最小化传播路径损失。相比于 STAS 方式,DTAS 方式通过增加一倍的发射功率,能获得更 多宏选择分集增益。

#### 2.3 信道模型与接收信号

为方便分析,先考虑一般情况,假设信号通过所有 6 个 DAM 和 SBS 传输到移动端。在这种方式下,所有 DAM 和 SBS 一起构成一个大尺度多人单出(MISO)系统,该 MISO 信 道向量以距离向量 *d*=[*d*<sub>0</sub>,*d*<sub>1</sub>,...,*d*<sub>6</sub>]为参数,并可表示为

$$H(d) = L(d)H_s \tag{1}$$

其中 $L(d) = [\sqrt{L_0}, \sqrt{L_1}, \dots, \sqrt{L_6}]$ 是大尺度衰落向量, $L_i$ = $d_i$ 表示第i个 DAM 到移动端的传播路径衰落, $d_i$ 为第i个 DAM 到移动端的距离, $\alpha$ 为路径衰落指数。 $H_8 = \text{diag}(h_0, h_1, \dots, h_6)$ 是小尺度衰落信道矩阵, $h_i$ 表示第i个 DAM 到移 动端的小尺度衰落,并合理假设为独立同分布的归一化零均 值复高斯随机变量。因此,该 MISO 信道向量可表示为

$$H(d) = \left[ \sqrt{L_0} h_0, \sqrt{L_1} h_1, \cdots, \sqrt{L_6} h_6 \right]$$
(2)

本文中,假设在一个发送符号周期内信道衰落不变,那么 移动端接收到的信号可以表示为

$$r(t) = H(d)s(t) + z(t)$$
(3)

其中 z(t)是零均值加性高斯白噪声,其方差为  $E[zz^{H}] = \sigma_{t}^{2}$ 。  $s(t) = [s_{0}(t), s_{1}(t), \dots, s_{6}(t)]^{T}$  为下行发送信号向量,其中  $s_{i}$  $(t) 表示从第 i \uparrow DAM 发送的信号,信号发射功率为 <math>E[|s_{i}(t)|^{2}] = P_{i}$ 。

当采用 STAS 方式时,接收信号可由(3)式化简为

$$r_{\text{STAS}}(t) = \sqrt{L_k} h_k s_k(t) + z(t) \tag{4}$$

其中 k=arg max<sub>i \in {0,1,...,6}</sub> {L<sub>0</sub>, L<sub>1</sub>,...,L<sub>6</sub>}。 当采用 DTAS 方式时,接收信号可由(3)式重写为

$$r_{DTAS}(t) = \sqrt{L_0} h_0 s_0(t) + \sqrt{L_k} h_k s_k(t) + z(t)$$
(5)

其中  $k = \arg \max_{i \in \{1,\dots,6\}} \{L_1,\dots,L_6\}$ 。

## 3 DAS 下行链路性能与容量分析

### 3.1 接收端信噪比(SNR)性能

先考虑一般情况,假设未编码信号通过所有 DAM 和 SBS 传输到移动端,为公平起见,设 $\sum_{i=0}^{n} P_i = P$ ,则接收端 SNR 的通用表达式为

$$SNR = \frac{\sum_{i=0}^{6} L_i P_i}{\sigma_z^2} \tag{6}$$

由(6)式可以得到 CCS, STAS 和 DTAS 方式下的接收端 SNR,分别重写为(7)式、(8)式和(9)式。

$$SNR_{CCS} = \frac{L_0 P}{\sigma_z^2} \tag{7}$$

$$SNR_{STAS} = \frac{L_k P_k}{\sigma_z^2} \tag{8}$$

其中  $k = \arg \max_{i \in \{0, 1, \dots, 6\}} \{L_0, L_1, \dots, L_6\},\$ 

$$SNR_{DTAS} = \frac{L_0 P_0 + L_k P_k}{\sigma_z^2} \tag{9}$$

其中  $k = \arg \max_{i \in \{1, \dots, 6\}} \{L_1, \dots, L_6\}$ 。

#### 3.2 误码率(SER)性能

如前所述,本文提出的微蜂窝结构 DAS 构造了一个大尺度 MISO 信道。当发射机知道信道状态信息(CSI)时,发射最大比合并(TMRC)能最大化 MISO 信道的发射分集增益<sup>[9,10]</sup>。因此,本小节分析了采用 TMRC 的 DAS 的 SER 性能,并可作为其他算法的 SER 理论上界。对于 TMRC,移动端接收到的信号可以表示为

$$r=H(d)ws+z$$
 (10)  
其中 w 是发送权系数向量,它的选取准则为最大化接收端

SNR: $\eta = |H(d)w|^2 P_i/\sigma_x^2$ 。由 Cauchy-Schwarz 不等式,接收端 SNR: $\eta$ 满足

$$\eta \leq \frac{\|H(d)\|^2 \|w\|^2 P_i}{r^2}$$
(11)

其中  $\|\cdot\|$ 表示  $L^2$  向量范数,当且仅当 w 和  $H(d)^H$  成比例时 等号成立。因此,权向量应为  $H(d)^H / \| H(d) \|$ ,则对应的 SNR 可重写为

$$\eta = \frac{\parallel H(d) \parallel^2 P_i}{\sigma_x^2} \tag{12}$$

于是,可得 SER 为[11]

$$P_{\epsilon} \approx E \left[ \overline{N_{\epsilon}} Q \left( \sqrt{\frac{\eta d_{\min}^{2}}{2}} \right) \right]$$
(13)

• 119 •

其中N<sub>e</sub>和 d<sub>min</sub> 分别表示在给定的调制模式下,调制星座图中最近相邻点的平均个数和最小距离。

由于η的概率密度函数(PDF)为

$$f_{PDF}(\eta) = \sum_{i=0}^{6} \frac{\sigma_z^2 \pi_i}{L_i P_i} \exp\left(-\frac{\sigma_z^2 \eta}{L_i P_i}\right)$$
(14)

其中

$$\pi_{i} = \int_{j=0, j \neq i}^{6} \frac{L_{i}P_{i}}{L_{i}P_{i} - L_{j}P_{j}}$$
(15)  
由文献[12]可得 SER 可写为

$$P_{e} \approx \int_{0}^{\infty} \overline{N_{e}} Q \left[ \sqrt{\frac{\eta d_{\min}^{2}}{2}} \right] f_{FDF}(\eta) \mathrm{d}\eta$$

$$(16)$$

$$=\sum_{i=0}^{\circ}\frac{\pi_{i}N_{\epsilon}}{2}\left[1-\sqrt{\frac{d_{\min}^{2}L_{i}P_{i}}{d_{\min}^{2}L_{i}P_{i}+4\sigma_{\epsilon}^{2}}}\right]$$
(17)

- 根据(17)式,CCS,STAS和DTAS方式下的SER可分别 由(18)式、(19)式和(20)式表示

$$P_{e,CCS} = \frac{\overline{N_e}}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{d_{\min}^2 L_0 P}{d_{\min}^2 L_0 P + 4\sigma_z^2}} \right]$$
(18)

$$P_{\epsilon,STAS} = \frac{\overline{N_{\epsilon}}}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{d_{\min}^2 L_k P_k}{d_{\min}^2 L_k P_k + 4\sigma_z^2}} \right]$$
(18)

其中  $k = \arg \max_{i \in \{0,1,\dots,6\}} \{L_0, L_1, \dots, L_6\},\$ 

$$P_{e,DTAS} = \frac{\overline{N_{\epsilon}}}{2} \frac{L_0 P_0}{L_0 P_0 - L_k P_k} \left[ 1 - \sqrt{\frac{d_{\min}^2 L_0 P_0}{d_{\min}^2 L_0 P_0 + 4\sigma_z^2}} \right] + \frac{\overline{N_{\epsilon}}}{2}$$
$$\frac{L_k P_k}{L_k P_k - L_0 P_0} \left[ 1 - \sqrt{\frac{d_{\min}^2 L_k P_k}{d_{\min}^2 L_k P_k + 4\sigma_z^2}} \right]$$
(20)

其中 $k = \arg \max_{i \in \{1,\dots,6\}} \{L_1,\dots,L_6\}$ 。

#### 3.3 各态遍历信道容量分析

假设仅接收端知道 CSI,则移动端在指定位置的各态遍 历 Shannon 信道容量可用下式表示

$$C_{\sigma} = E_{H(d)} \left[ \log_2 \left( 1 + \frac{H(d)SH(d)^{H}}{\sigma_z^2} \right) \right]$$
(21)

其中 S 是发送信号向量 s(t)的协方差矩阵,并可表示为 diag  $(P_0, P_1, \dots, P_6)$ 。因此,由(2)式和(21)式可得,各态遍历 Shannon 信道容量可重写为

$$C_{e_{s}} = E_{H(d)} \left[ \log_{2} \left( 1 + \frac{1}{\sigma_{z}^{2}} \sum_{i=0}^{\circ} |h_{i}|^{2} L_{i} P_{i} \right) \right]$$
$$= \int_{0}^{\infty} \log_{2} (1+\eta) f_{PDF}(\eta) d\eta \qquad (22)$$

根据(14)式、(15)式和(22)式,信道容量表达式可简化为[12]

$$C_{es} = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i=0}^{6} \pi_i \exp\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_i P_i}\right) Ei\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_i P_i}\right)$$
(23)  
# E:(x) = -  $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t}}{e^{-t}} dt$ 

其中  $Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ 。

因此,根据(23)式,CCS,STAS和 DTAS 方式下的各态 遍历容量可分别由(24)式、(25)式和(26)式表示

$$C_{s,CCS} = -\frac{1}{\ln 2} \exp\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_0 P}\right) Ei\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_0 P}\right)$$
(24)

$$C_{s,STAS} = -\frac{1}{\ln 2} \exp\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_k P_k}\right) Ei\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_k P_k}\right)$$
(25)

其中 $k = \arg \max_{i \in \{0,1,\dots,6\}} \{L_0, L_1, \dots, L_6\},\$ 

$$C_{\sigma,DTAS} = -\frac{1}{\ln 2} \frac{L_0 P_0}{L_0 P_0 - L_k P_k} \exp\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_0 P_0}\right)$$
$$Ei\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_0 P_0}\right) - \frac{1}{\ln 2} \frac{L_k P_k}{L_k P_k - L_0 P_0}$$
$$\exp\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_k P_k}\right) Ei\left(-\frac{\sigma_z^2}{L_k P_k}\right)$$
(26)

## 4 数值分析结果

为简化分析,假设 SBS 和每个 DAM 的信号发射功率均 为 P/7,即 P<sub>i</sub>=P/7(i=0,1,...,6)。图 2 和图 3 分别显示了 当路径衰落指数为 4.0 时,接收端 SNR 以及信道容量与归一 化距离之间的关系,该距离表示从 SBS 沿信号最差位置示例 W 方向到移动端的归一化距离。从图中可以发现与 CCS 不 同的是,在本文提出的微蜂窝结构 DAS 中接收端 SNR 以及 信道容量与归一化距离之间有着非常有趣的非单调关系:从 SBS 到 0.33R 这段区域,无论采用 STAS 方式还是 DTAS 方 式,SNR 和信道容量都随着距离的增加而降低,并在 0.33R 处达到极小值。这是因为来自 SBS 的信号在此区域占据主 导地位。而从到这段区域,来自所选的 DAM 的信号逐渐占 据主导地位,SNR 和信道容量也因此都随着距离的增加而先 升高后降低,并于 0.64R 处达到极大值,因为移动端在此处 距离所选 DAM 最近。在 0. 33R 处,相比于 STAS 方式, DTAS 方式的 SNR 能获得 3dB 的增益,信道容量也增加了大 约 50%,而在其他区域两者的 SNR 性能和信道容量区别并 不明显。



图 2 路径衰落指数为 4.0 时接收端 SNR 与归一化距离的关系



图 3 路径衰落指数为 4.0 时信道容量与归一化距离的关系

另一方面,由于 DAS-STAS 和 DAS-DTAS 这两种方式 中的总发射功率分别只有 CCS 中的总发射功率的 1/7 和 2/ 7,接收端 SNR 性能和信道容量在(0~0.42R)区域内即基站 端附近,相比于 CCS 方式略低;但是在(0.42R~R)区域内即 蜂窝小区边缘,相比于 CCS 方式,微蜂窝结构 DAS 中无论采 用 STAS 方式还是 DTAS 方式都能获得 SNR 性能和信道容 量的显著增益。值得一提的是,当用户在蜂窝小区中为均匀 分布时,超过80%的用户将处于(0.42R~R)区域内,而本文 提出的微蜂窝结构 DAS下的两种传输方式在该小区边缘区 域能显著提高 SNR 性能和信道容量。对于另外20%处于(0 ~0.42R)区域即靠近基站端的用户,尽管 DAS-STAS 和 DAS-DTAS两种方式中的 SNR 性能和信道容量相比于 CCS 方式略低,但考虑到这两种方式的发射功率分别只有 CCS方 式的发射功率的1/7 和2/7,即发射功率分别降低了85%和 75%,这种少量性能损失也是可以接受的。



图 4 路径衰落指数为 4.0 时 SER 与归一化距离的关系



图 5 接收端平均 SNR 与路径衰落指数的关系



图 6 平均信道容量与路径衰落指数的关系

图 4 显示了当路径衰落指数为 4.0,采用 QPSK 调制模 式,发射端采用最大比合并方式时误码率(SER)性能与归一 化距离之间的关系。分析结果表明微蜂窝结构 DAS 中,SER 与归一化距离同样呈现类似的非单调关系,并且相比于 CCS 方式,微蜂窝结构 DAS 下的两种方式在小区边缘能获得显著的 SER 性能增益。而 DAS-STAS 和 DAS-DTAS 两种方式相比,由于发射功率增加了一倍,DAS-DTAS 方式下的 SER 在各处都低于 DAS-STAS 方式下的 SER,尤其是当用户处于靠近 0.33R 的区域时。

假设用户均匀分布在蜂窝小区中,则接收端平均 SNR 和 平均信道容量与路径衰落指数的关系分别如图 5 和图 6 所 示。图示分析结果证明,相比于 CCS,微蜂窝结构 DAS 能显 著提高接收端平均 SNR 和平均信道容量,这是由于大部分用 户处于小区边缘,而对于这一区域,微蜂窝结构 DAS 能获得 极大的性能增益。例如,当路径衰落指数为 4.0 时,微蜂窝结 构 DAS 的平均 SNR 和信道容量相比于 CCS 都提高了 30% 以上,而其发射功率则降低了 75%以上。与此同时,由图 5 和图 6 还发现,随着路径衰落指数的增加,微蜂窝结构 DAS 中两种传输方式的平均性能下降速度明显低于 CCS 中的平 均性能下降,据此证明本文提出的两种微蜂窝结构 DAS 下的 传输方式能有效对抗实际系统中的路径衰落。

结束语 本文从信息论的角度研究了微蜂窝结构分布式 天线系统在系统结构上的优势,提出了两种应用于微蜂窝结 构 DAS 的下行链路传输策略:STAS 方式和 DTAS 方式,并 分析了这两种方式下的接收端信噪比(SNR)、误码率(SER) 性能和各态遍历信道容量。理论分析结果证明,与传统蜂窝 系统相比,本文提出的微蜂窝结构 DAS 能显著提高接收端 SNR 和信道容量并降低误码率,特别是对于小区边缘的用 户。此外,微蜂窝结构 DAS 在提高 30%的平均 SNR 性能和 信道容量的同时能降低至少 75%的发射功率,并能有效对抗 实际系统中的路径衰落。因此,在功率受限的蜂窝系统中微 蜂窝结构 DAS 将成为提高信道容量、对抗大尺度衰落的有效 解决方案。

#### 参考文献

- Saleh A, Rustako A, Roman R. Distributed Antennas for Indoor Radio Communications, IEEE Transactions on Communications, 1987, 35: 1245-1251
- [2] Clark M V, et al. Distributed versus centralized antenna arrays in broadband wireless networks // Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. May 2001; 33-37
- [3] Roh W, Paulraj A. Outage performance of the distributed antenna systems in a composite fading channel // Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. Vancouver BC Canada, Sep. 2002; 1520-1524
- [4] Hu H, Weckerle M, Luo J. Adaptive transmission mode selection scheme for distributed wireless communication systems. IEEE Communications Letters, 2006, 10: 573-575
- [5] Roh W, Paulraj A. MIMO channel capacity for the distributed antenna systems// Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. Vancouver BC Canada, Sep. 2002; 706-709
- [6] Han S, Zhou S, Wang J, et al. Transmit antenna selection with power and rate allocation for spatial multiplexing in distributed antenna systems. Tsinghua Science and Technology, 2006,11: 259-263
- [7] Lin D, Shidong Z, Yan Y. Capacity analysis in CDMA distributed antenna systems. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2005, 4: 2613-2620
- [8] Boal A, Soares A, Silva J C, et al. Distributed Antenna Cellular System for Transmission of Broadcast/Multicast Services // Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. Dublin Ireland, 2007; 1307-1311
- [9] Lo T. Maximal ratio transmission. IEEE Transactions on Communications, 1999, 47(10); 1458-1461
- [10] 刘晓明,陈铸,欧静兰,等. 瑞利衰落信道中最大比合并系统性 能及多路信号合并算法研究. 计算机科学,2005,32(7):50-52
- [11] Proakis J G. Digital Communications, Fourth Edition. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2001
- [12] Gradshteyn I, Ryzhik I. Table of Integrals, Series, and Products. London, UK; Academic Press, 2003