

基于最大流的网络编码组播路由算法^{*})

陶少国 黄佳庆 杨宗凯 程文青 Rami S. Youail

(华中科技大学电子与信息工程系 湖北省智能互联网技术重点实验室 武汉 430074)

摘要 网络编码是一种能显著提升组播传输性能的通信机制。在组播网络中部署和实施网络编码,必须建立传输路由和确定编码模式。对于后者,许多学者提出了有效的解决方法,而对于路由问题的研究则相对较少。由于网络编码自身固有的特点,基于网络编码的组播传输与传统的 IP 组播在建立传输路由的方式上有所不同。鉴于此,本文提出了一种基于最大流的网络编码组播路由算法,该算法与有的编码模式一起,能够构成完整的网络编码组播传输方案。仿真实验表明,与传统的 IP 组播相比,基于该算法的网络编码组播能够提升组播传输的性能。

关键词 网络编码,组播,路由,最大流

Maxflow-based Routing Algorithm for Network Coding Multicast

TAO Shao-guo HUANG Jia-qing YANG Zong-kai CHENG Wen-qing Rami S. Youail

(Hubei Key Laboratory of Intelligent Network Technology, Department of Electronics and Information, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract Network coding is an effective way to improve the performance of multicast communication. There are two steps that should be realized while using network coding in multicast network; one of finding proper transmission paths from source to multi-receivers and the other of determining the encoding scheme. For the latter problem, a variety of methods have been proposed. However, little research about the former has been done in the present work. In this paper, we propose a detailed maxflow-based routing algorithm to build proper transmission paths in multicast when using network coding. The algorithm, together with the existing encoding scheme, such as random network coding, can construct a practical multicast system. Simulations based on the algorithm show that, for network coding multicast, performance in terms of achievable throughput has been improved significantly in comparison with the traditional IP multicast.

Keywords Network coding, Multicast, Routing, Maxflow

1 引言

网络编码(Network Coding, NC)是信息传输理论研究领域上的最新研究成果,它彻底改变了通信网络中信息处理和传输的方式^[1]。网络编码的核心思想是在组播通信中允许节点对传输的信息进行操作和处理(如有限域中的运算等),而不再限于存储和转发。网络编码能够显著改善网络的性能,如实现组播最大流(Multicast Maxflow),提升组播网络的吞吐量等。文献[1]指出网络编码能够实现的组播最大流等于信源至各信宿之间的最大流的最小值,即 $h = \min f(S, t)$, 其中 $f(S, t)$ 为信源 S 与信宿 $t \in T$ 之间的最大流。组播的最大流也称为组播的理论传输容量(Multicast Capacity)。在传统基于存储和转发的 IP 组播中,组播的理论容量往往是无法实现的^[1]。文献[2]证明,如果采用合适的线性网络编码(Linear Network Coding, LNC),总能实现组播的最大流。

除了提升组播网络的传输性能,网络编码还有许多其它的重要应用,如应用于 P2P(Peer to Peer)网络^[3]、无线自组织网络(wireless ad hoc)^[4]等。由于网络编码具有重要的理论价值和前景,其研究已经引起了国内外学者广泛的关注

和重视。但是总的说来,网络编码的研究仍处在起步阶段。

在组播网络中使用网络编码,实施网络编码组播(Network Coding Multicast, NCM),必须解决两个问题:(1)建立传输的路由;(2)确定网络编码的模式,即选择码构造算法。对于后者,已经提出了许多有效的解决方法^[2,5-7]。在这些方法中,随机网络编码(Random Network Coding)^[7]作为线性网络编码的分布式实现,得到了广泛的关注。与其它的码构造算法,如启发式算法^[2]、指数时间算法^[5]和多项式时间算法^[6]等相比,随机网络编码具有较低的复杂性,容易在实际网络中部署和应用。因此,随机网络编码是一种有效的网络编码模式。目前,在关于网络编码应用的研究中,编码模式大多采用随机网络编码。

然而,对于网络编码组播的路由问题,相关的研究成果却较少,这主要是因为网络编码的研究仍然处在理论研究阶段,其研究内容主要集中在从理论上论证网络编码能够提升网络性能以及如何如何在节点上实施网络编码操作(即码构造算法)等方面。建立传输路由是实施组播通信的前提,在传统的 IP 组播传输中,通过构建组播树,如 Steiner 树^[8],来建立传输路由。然而,由于网络编码自身固有的特点,在传输路由的构造

^{*}国家自然科学基金资助项目(No. 60572049);华为公司科技基金资助项目(No. YJCB2006049RE)。陶少国 博士研究生,研究方向为网络编码、组播通信技术;黄佳庆 博士,副教授,研究方向为网络编码、组播通信技术;杨宗凯 教授,博士生导师,研究方向为现代通信网络;程文青 教授,博士生导师,研究方向为现代通信网络;Rami S. Youail 博士研究生,研究方向为网络编码理论与应用。

方式上,网络编码组播与传统 IP 组播有所不同。鉴于此,本文着重关注网络编码组播的路由问题。本文归纳了网络编码组播的数学模型,提出了一种基于最大流的适用于网络编码组播的路由算法。该路由算法,与网络编码的码构造算法(如随机网络编码等)一起,能够构成完整的、实用的网络编码组播解决方案。

本文第 2 节介绍了相关的预备知识,包括网络编码的工作原理和数学模型;第 3 节提出了网络编码组播的路由算法,并对该算法进行了理论分析;第 4 节为仿真结果;最后总结全文。

2 预备知识

2.1 网络编码的工作原理

R. Ahlswede 等^[1]以著名的“蝴蝶网络”为例,首次阐述了网络编码的基本原理及其对于提升组播网络性能的作用,如图 1 所示的“单信源二信宿”蝴蝶网络,设各链路容量为 1 个单位, S 是信源节点, t_1 和 t_2 是信宿节点。根据“最大流最小截”定理^[9],该组播的最大流为 2,即理论上信宿 t_1 和 t_2 能够同时收到信源 S 发出的 2 个单位的信息。图 1(a)表示的是传统的基于路由的传输方法,节点 W 执行存储或转发操作。显然,无论节点 W 转发 b_1 和 b_2 ,均不能使信宿 t_1 和 t_2 同时收到 b_1 和 b_2 。图 1(b)表示的是网络编码方法,节点 W 对输入的信息进行网络编码(模二加)操作,然后将编码的结果 b_1+b_2 发送至输出链路 WX,最后到达信宿 t_1 和 t_2 。当信宿 t_1 收到 b_1 和 b_1+b_2 后,通过译码操作就能获取 b_1 和 b_2 ($b_2 = b_1 + (b_1 + b_2)$)。同样,信宿 t_2 也可同时收到 b_1 和 b_2 。因此网络编码实现了该组播传输的最大理论传输容量。

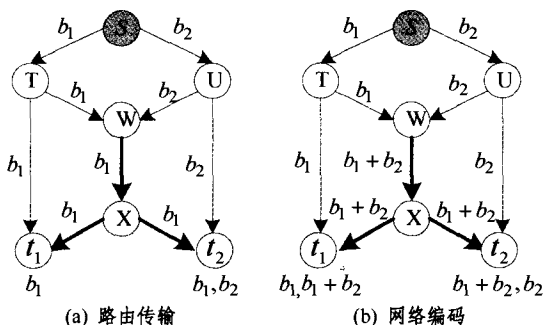


图 1 单信源二信宿蝴蝶网络

如果网络节点对传输的信息进行线性操作,则称为线性网络编码;否则称为非线性网络编码。如果网络节点对信息进行操作的系数是随机选取的,则称为随机网络编码;如果是通过算法确定出来的,则称为确定性网络编码。图 1(b)所示的网络编码,便是一种最简单的线性网络编码。在实际网络编码应用系统中,大多采用随机线性网络编码(即是如前所述的随机网络编码)。

2.2 网络编码的数学模型

根据图 1(b)所示的例子,可将网络编码推广到一般情况,建立网络编码组播的数学模型。设组播网络用有向图 $G=(V, E)$ 表示, V 表示网络节点的集合, E 表示传输链路(边)的集合,信源节点用 S 表示,信宿节点的集合为 T 。 G 为单位容量网络,即各链路容量为 1 个单位(如果链路容量不为 1 个单位,则可在两节点之间建立多条容量为 1 个单位的平行链路)。假定组播的最大理论传输容量为 h ,信源 S 发出的信息用符号向量 $b=[b_1, b_2, \dots, b_n]$ 表示,信宿 $t \in T$ 接收到的信息

用符号向量 $\beta=[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h]^T$ 表示。如果运用了线性网络编码,则链路传输的信息、节点接收的信息和节点输出的信息均为信源输出向量 b 中各元素的线性组合,即有 $\beta_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \dots + c_{ih}b_h, i \in [1, h]$,称系数向量 $c_i = [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ih}]$ 为编码向量(Encoding Vector),则向量 b 和 β 的关系写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1h} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{h1} & c_{h2} & \dots & c_{hh} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_h \end{bmatrix} = Cb^T \quad (1)$$

式(1)中,矩阵 C 称为系统相对于信宿 $t \in T$ 的转移矩阵(Transfer Matrix)。矩阵 C 中的元素 c_{ij} 均取自有限域。当矩阵 C 满秩(Full Rank)时,则能通过方程(2)译出信源发出的原始信息。

$$b = (C^{-1}\beta)^T \quad (2)$$

要使转移矩阵 C 满秩, C 中的各编码向量应该线性独立。T. Ho 等^[7]指出,采用随机网络编码,若系数 c_{ij} 在有限域 GF(2¹⁶)中选取,则矩阵 C 能以接近 1 的概率满秩。可见,在大多数情况,随机网络编码能够实现组播的最大流,这就是随机网络编码被认为是一种优秀的码构造算法的主要原因。

3 基于最大流的网络编码组播路由算法

从网络编码组播的工作原理和数学模型可以看出,要实现网络编码组播的最大流,必须保证各信宿节点能够收到 h 个编码信息 $\beta=[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h]^T$,而且这些编码信息对应的编码向量应该是线性独立的,否则信宿节点无法通过解矩阵方程(2)译出原始信息。

定义 1(边分离路径) 如果两条路径之间没有重合的链路(Common Links),则称这两条路径为边分离路径。

定理 1 给定的单位容量网络中,如果信源 S 和信宿 $t \in T$ 的最大流为 h ,则能在 S 和 $t \in T$ 之间建立 h 条边分离路径。

定理 1 已经在文献[10]中给予了证明。将 S 和信宿 $t \in T$ 之间 h 条边分离路径记为路径簇(Path-Cluster) $f(t)$ 。对于图 1 所示的网络拓扑,因为组播最大流为 2,因此根据定理 1,理论上能够分别建立信源 S 至信宿节点 t_1 和 t_2 的路径簇,而且各路径簇中应该包含 2 条边分离路径。图 2 表示了信源 S 至 t_1 和 t_2 的路径簇。容易看出,信源 S 至信宿节点 t_1 和 t_2 的路径簇分别为 $f(t_1) = \{\{ST, Tt_1\}, \{SU, UW, WX, Xt_1\}\}$ 和 $f(t_2) = \{\{SU, Ut_2\}, \{ST, TW, WX, Xt_2\}\}$ 。

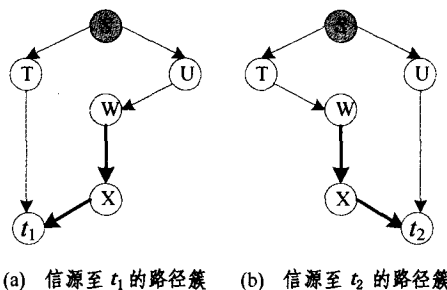


图 2 不同信宿节点对应的路径簇

对于一般组播网络,假设组播的最大流为 h ,如果我们能够为每个信宿节点建立至少 h 条独立的传输路径,并让信源节点通过这些路径发送信息至各信宿节点,在传输路径的节

点上,运用随机网络编码,就能以接近 1 的概率保证每个信宿节点成功译出原始信息,从而实现组播的最大流。因此,网络编码组播路由算法的目标就是为每个信宿节点 $t \in T$ 建立一个对应的路径簇,这与传统的 IP 组播中建立路由树的方式来实现组播通信有所不同。

3.1 路由算法

标号算法 (Labeling Algorithm) 是一个典型的寻找网络最大流的方法^[9]。由于是容量网络,任意两节点之间的最大流等于实现该最大流的截集上的路径数量,因此标号算法在求解最大流的同时也找到实现该最大流的路径。

标号算法是通过不断寻找从信源到信宿节点之间的增广链来进行流量增广,从而逐步实现最大流的。但是由于实际流量的增广会导致网络的可用流量减少,这样就会使寻找至不同信宿节点的最大流的操作互相影响,最终导致无法实现至所有信宿的最大流,因此必须对标号算法加以改进。

节点用三元组 $(PNode, Capacity, Dest)$ 组进行标号,其中 $PNode$ 表示当前节点的父节点, $Capacity$ 表示可增广流量, $Dest$ 表示对应的信宿节点, $Dest$ 的取值为 $[0, |T|]$ 。具体的路由算法步骤如下:

步骤 1: 初始化网络

(1) 将链路容量设为 1, 即 $c_{uv} = 1$, 各链路的实际流量为 0, 即 $f_{uv} = 0$ 。

(2) 将信源节点 S 标记为 $(0, +\infty, 0)$, 则 S 为标记而未检查的节点。

(3) 将 $t_i \in T$ 定义为第 i 个信宿, 设定 $i = 1$ 。

步骤 2: 寻找信源 S 至信宿 $t_i \in T$ 的增广链。如果 u 是标记而未检查的节点 (如信源 S), 对 u 的所有邻居节点执行操作 (1) 和 (2):

(1) 若 $f_{uv} = 0$, 且 $Dest \neq i$, 将节点 v 标记为 $(+u, 1, i)$, 则节点 v 为标记而未检查的节点。

(2) 若 $f_{uv} > 0$, 且 $Dest \neq i$, 将节点 v 标记为 $(-u, 1, i)$, 则节点 v 为标记并已经检查的节点。

(3) 则节点 u 是已经标记并检查的节点。

(4) 重复 (1)、(2)、(3) 直到 $t_i \in T$ 被标记, 则找到了一条 S 至信宿的增广链。转步骤 3。

步骤 3: 更新增广链上的信息流

(1) 对节点 v , 若其标记为 $(+u, 1, i)$, 则 $f_{uv} = 1$ 。

(2) 对节点 v , 若其标记为 $(-u, 1, i)$, 则 $f_{uv} = 0$ 。

(3) 转步骤 4。

步骤 4: 若 $i = |T|$, 则算法停止; 否则 $i = i + 1$, 转步骤 2。

执行上述算法后, 就在每个信源和接收节点之间建立了一个路径簇, 而且同一路径簇中的路径是边分离的。在寻找出的路径的节点上, 执行码构造算法, 如随机网络编码, 便构成了实际的网络编码组播通信系统。而且该网络编码组播一定能够实现组播的最大流, 即理论传输容量。

3.2 算法分析

检查通过上述算法建立的传输路径, 能够发现在网络编码组播的传输路径上, 存在两类节点: a) 包含一个输入链路的节点, 称为路由节点 (Routing nodes); b) 包含多个输入链路的节点, 称为关键节点 (Key nodes)。

定理 2 当且仅当是关键节点, 才需执行网络编码操作。

证明: 因为同一路径簇中的路径必定是边分离的, 即无重合链路, 所以不同路径簇之间的路径则可能存在重合链路。因为关键节点是指包含多个输入链路的节点, 所以关键节点必定是重合链路的端节点, 如图 1 中的节点 W 。在重合链路

的端节点上, 如果采用传统存储和转发的路由方法, 节点的多个输入信息只能顺序地发送, 这样必定会造成信息发送的延迟, 降低组播网络的吞吐量; 或者丢失某些信息, 进行选择性的发送, 这样同样降低了组播的吞吐量。而运用网络编码, 可将全部的输入信息通过线性组合的方式合并, 在信宿节点通过译码操作加以区分, 恢复原始的信息, 从而实现组播理论容量。对于其它的节点, 因为这些节点仅含有一条输入链路, 编码操作并不能提升网络的性能, 这类节点无需执行网络编码操作, 所以, 当且仅当是关键节点时, 才需执行网络编码操作。□

定理 2 表明了并不是所有的网络节点都需执行网络编码操作, 这对一些特殊的应用具有重要的意义。因此执行网络编码操作的节点需要具备更多的功能, 因此比普通的路由节点要复杂, 比如在“光电网络”中, 如果节点执行网络编码操作, 则执行网络编码的操作需要进行光电之间的转换, 如果不执行网络编码, 则无需光电转换。可见, 仅在关键节点上执行网络编码操作, 能在一定程度上降低组播系统的复杂性。

由于上述算法是结合“最大流最小截”定理, 结合了网络增广链和最小截集的性质, 因此, 采用上述算法, 能够在有限步骤中求出至各个信宿节点的传输路径。若链路数为 e , 节点数为 n , 则对于单位容量网络, 步骤 2 寻找至 $t_i \in T$ 增广链的复杂度为 $O(en^2)$, 因此对于包含 m 个信宿节点的组播网络, 算法的整个复杂度为 $O(men^2)$ 。

4 仿真结果

仿真采用的随机化方法产生具有实际网络特性的网络拓扑^[11]。 n 个节点随机分布在一个面积为 $n \times n$ 矩形区域内, 节点 u 和 v 相连的概率取决于节点之间的距离, 此概率表示为:

$$P(\{u, v\}) = \beta \exp \frac{-d(u, v)}{L\alpha} \quad (3)$$

式 (3) 中, $-d(u, v)$ 表示节点 u 和 v 之间的距离; L 表示距离最远的两节点对应的距离, 参数 α, β 是 $[0, 1]$ 区间上关于网络链路稠密程度的影响因子。仿真实验中用 n 表示网络的规模, 即节点数, 用 r 表示组播成员的比例, 用 c 表示节点的平均度 (包含入度和出度)。

网络编码提出的初衷就是实现最大流, 从而进一步提升组播的吞吐量。单位容量网络中的最大流可用各个信宿节点的最大流的最小值表示。图 3 表示了网络编码对组播吞吐量的改善, 总的节点数为 100, 节点的平均度为 3.5。可以看出, 当 20%~40% 的节点为信宿节点时, 网络编码能够显著提升组播的吞吐量, 然而超出此范围, 随着信宿节点的增加或减少, 网络编码均不能明显改善网络的吞吐量。对于单播和广播的特殊情形, 网络编码基本上不能发挥其提升吞吐量的作用, 因为在单播和广播网络中, 寻找出的路径上并不存在编码节点。

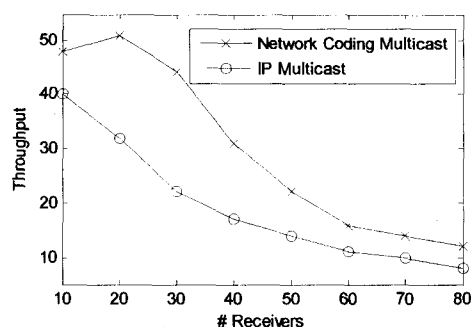


图 3 吞吐量与组播成员比例的关系, $n = 100, c = 3.5$

(下转第 117 页)

充分融合,从系统级的角度实现信道容量与传输性能的整体提升,对于理论分析与应用实践具有相当重要的理论价值。论文下一步将以此为基础,探讨业务公平性条件下 MIMO 信道复用容量增益与传输分集增益有效折衷策略,为无线网络信息论的进一步深入研究奠定新的基础。

参考文献

- [1] Telatar I E. Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels(Telatar). pdf, European Transactions on Telecommunications [J], 1999, 10(6): 585-595
- [2] Zheng Lizhong , David N C Tse. Diversity and Multiplexing: A Fundamental Tradeoff in Multiple Antenna Channels. IEEE Trans. on Inform Theory,2003,49(5):1073-1096
- [3] Marzetta T, Hochwald B. Capacity of mobile multiple-antenna communication link in a Rayleigh flat-fading environment [J].

- IEEE Trans. on Information Theory, 1999, 45(1): 139-157
- [4] 王德胜,朱光喜,等. 相关衰落信道 MIMO STBC 空间分集增益与多用户自适应 OFDMA 研究. 通信学报,2006,27(3):99-104
- [5] Hamid Raeza Bahrami and Tho Le-Ngoc. MIMO Precoders Using Spatial and Path Correlations for Multipath Fading Channels// IEEE ICC 2007 Proceeding
- [6] Rappaport T S. Wireless Communications: Principles and Practice. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996
- [7] Digne P A, Mallik R K, Jamuar S S. Analysis of transmit-receive diversity in Rayleigh fading. IEEE Transactions on Communications, 2003, 51(4): 694-703
- [8] Proakis J G. Digital Communications. 3rd edition. New York, McGraw-Hill, 1995
- [9] Hogg R V, Craig A T. Introduction to Mathematical Statistics. 5th edition. New York; Macmillan, 1995

(上接第 109 页)

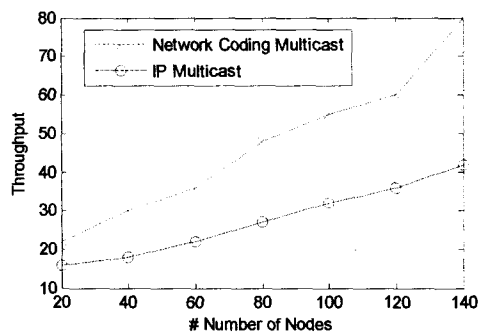


图 4 吞吐量与网络规模的关系, $r=20\%$, $c=3.5$

网络编码对组播吞吐量的提升与网络的规模有关。图 4 是分别对节点数为 20, 40, ..., 140 的网络进行的吞吐量的统计, 信宿节点的比例为 20%, 节点的平均度仍然为 3.5。可以看出, 网络规模越大, 网络编码对吞吐量的提升就表现得越明显。通过更大规模的实验证明, 网络编码能够适应大规模的组播传输。

图 5 表示了节点平均度为 4.5 的组播网络中网络吞吐量, 总节点数为 100。可以看出, 网络编码对组播吞吐量的提升的趋势受节点平均度的影响较小, 但是与图 3 相比, 节点平均度越大, 对于同样规模的组播网络, 吞吐量的提升程度会减少, 这是因为节点平均度越大, 网络越稠密, 可用的传输链路就越多, 采用传统的 IP 组播取得的实际最大流就越与组播理论容量接近。

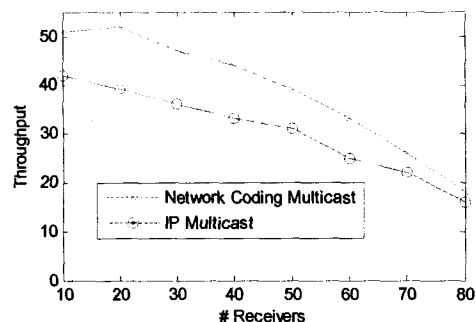


图 5 吞吐量与组播成员比例的关系, $n=100$, $c=4.5$

是信息传输领域的研究热点。实现网络编码组播, 必须建立传输路由和确定编码模式。由于网络编码的研究刚刚起步, 目前大多数的研究均集中在从理论上论证网络编码对网络性能的提升以及如何如何在节点上实施网络编码操作(即码构造算法)等方面, 而对于网络编码的路由问题, 则研究成果相对较少。但是, 建立传输路由是实施组播通信的前提。由于网络编码组播的本质特征与传统 IP 组播有重要的区别, 其路由构造方式并不相同。鉴于此, 本文通过分析网络编码组播的数学模型, 提出了一种基于最大流的网络编码组播的路由算法。如果网络编码组播的最大流为 h , 则通过该算法能够在信源与每个信宿之间建立包含 h 条边分离路径的路径簇。该算法结合典型的网络编码构造算法, 如随机网络编码, 能够构成完整的网络编码组播的解决方案。仿真实验表明, 与传统 IP 组播相比, 基于该算法的网络编码组播能够显著提升组播传输的性能。

参考文献

- [1] Ahlswede R, Cai Ning, Li S-Y R, et al. Network information flow. IEEE Trans. Inform. Theory, 2000, 46(4):1204-1216
- [2] Li S-Y R, Yeung R W. Linear network coding. IEEE Trans. Inform. Theory, 2000
- [3] Gkantsidis C, Miller J, Rodriguez P. Anatomy of a P2P Content Distribution System with Network Coding//Proc. of the 5th International Workshop on Peer-to-Peer Systems (IPTPS 2006). 2006
- [4] Park J S, Lun D S, Soldo F, et al. Performance of Network Coding in Ad Hoc Networks // Military Communications Conference. 2006
- [5] Koetter R, Medard M. Beyond Routing: An algebraic approach to network coding. In 2002 IEEE Infocom, 2002
- [6] Sanders P, Egner S, Tolhuizen L. Polynomial time algorithms for network information flow//Proc. 15th ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures. 2003
- [7] Ho T, Leong B, Koetter R, et al. Byzantine modification detection in multicast networks using randomized network coding// IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT 2004). June 2004
- [8] Zosin L, Khuller S. On directed Steiner trees // 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2002). 2002: 59-63
- [9] 王树禾. 图论. 北京: 科学出版社, 2004
- [10] Yeung R W, Li S-Y R, Cai N, et al. Network Coding Theory. Now Publishers Inc., 2006
- [11] Waxman B M. Routing of multipoint connections. IEEE JSAC, 1988, 6(9):1617-1622

结束语 网络编码彻底改变了信息传输和处理的方式,