

# 结合启发式算子的单变量边缘分布算法求解 SAT 问题<sup>\*</sup>

武 燕<sup>1</sup> 王宇平<sup>2</sup> 刘小雄<sup>3</sup>

(西安电子科技大学理学院 西安 710071)<sup>1</sup> (西安电子科技大学计算机学院 西安 710071)<sup>2</sup>

(西北工业大学自动化学院 西安 710072)<sup>3</sup>

**摘 要** 单变量边缘分布算法(UMDA)是一种新的进化算法,是求解复杂问题的一种有效算法。根据 SAT 问题的特点,本文提出了一种求解 SAT 问题的改进单变量边缘分布算法(HeUMDASAT),该算法结合 SAT 问题本身固有的结构信息与当前群体的优秀解所提供的全局信息,构造了一个新的启发算子,并将此算子结合到单变量边缘分布算法中。此算子不同于随机搜索算子,由其产生的个体可以使得算法跳出局部最优并探索新的潜在区域,并且加快算法的收敛速度。用 SATLIB 库中的标准 SAT 问题对 HeUMDASAT 算法进行测试,实验结果表明该算法在求解速度和成功率方面都有明显的改善。

**关键词** 单变量边缘分布算法,启发算子,SAT 问题

## Bayesian Optimization Algorithm for SAT Problem Incorporating Heuristic Operator

WU Yan<sup>1</sup> WANG Yu-ping<sup>2</sup> LIU Xiao-xiong<sup>3</sup>

(School of Science Xidian University Xi'an 710071,China)<sup>1</sup> (School of computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071,China)<sup>2</sup>

(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072,China)<sup>3</sup>

**Abstract** Univariate marginal distribution algorithm (UMDA) is a new evolutionary algorithm and is an efficient algorithm for complicate problem. According to the characteristics of SAT problem, an improved UMDA for solving SAT problem (HeUMDASAT) is proposed in this paper. A new heuristic operator is presented by combing the structure information of SAT problem with the global information extracted from promising individuals of current population. Different from the stochastic searching operator, the heuristic operator can generate new promising individuals and help the UMDA skip from the local optimum. In the experiments, 3700 benchmark SAT problems in SATLIB are used to test the performance of HeUMDASAT. The experiments results show that the HeUMDASAT makes progress in the aspects of speed and the success rate.

**Keywords** Univariate marginal distribution algorithm (UMDA), Heuristic operator, Satisfiability problem(SAT)

## 1 引言

合取范式可满足性问题(satisfiability problem),简称 SAT 问题,是人工智能、自动推理、数理逻辑和相关领域的基础问题之一,具有广泛的应用背景。SAT 问题也是一个经典的 NP 完全问题。目前解决该问题的方法主要有完备的方法<sup>[1, 2]</sup>和不完备的方法<sup>[3-7]</sup>两大类。完备的方法能正确地判断 SAT 问题的可满足性,但其计算复杂度随着问题规模的增大呈指数级增大,不适用于求解大规模的 SAT 问题。不完备算法虽然不能保证一定能找到解,但多数情况下其求解速度比不完备算法快,实用性强,因此目前的研究主要集中于寻找不完备的方法,已有的方法有遗传算法<sup>[3]</sup>、局部搜索方法<sup>[4-7]</sup>等。

分布估计算法<sup>[8]</sup>是一种基于概率分布的进化算法,结合了进化计算和图模型两个领域的知识。分布估计算法的中心思想是利用当前种群的好解所提供的信息,建立概率模型,反映变量之间的依赖关系以及好解的分布,并通过此概率模型抽样产生新的个体,指导种群进化。单变量边缘分布算法<sup>[9]</sup>(Univariate Marginal Distribution Algorithm, UMDA)是概

率模型最简单的一种分布估计算法,此算法假设变量之间都是相互独立的。虽然 UMDA 模型较简单但其自适应性强,计算速度快,因此已经被用来求解许多优化问题。SAT 问题是一种比较复杂的组合优化问题,变量之间的依赖关系非常复杂,试图寻找所有这样的关系是费时的,而且效果并不明显,因此本文利用 UMDA 求解 SAT 问题。

虽然 UMDA 可以从当前种群中提取优秀解的分布信息,但是它缺乏探索能力,对于复杂问题同样面临陷入局部最优的问题。然而利用启发信息是提高算法性能的一个有效途径,因此本文结合 SAT 问题的结构信息和当前种群优秀解所提供的全局信息构造一个启发算子,利用启发算子使得 UMDA 跳出局部最优,利用改进的单变量边缘分布算法求解 SAT 问题,并对标准范例进行了实验。实验结果表明算法性能优越,具有实用价值。

## 2 SAT 问题

SAT 问题是一个组合问题,其定义如下:

**定义 1(文字)**  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$  是  $l$  个布尔变量的集合,每个布尔变量  $x_i \in U$ ,  $x_i$  和  $\neg x_i$  ( $x_i$  的非)称为文字。

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(60374063)。武 燕 博士生,讲师,主要研究方向:组合优化、进化算法;王宇平 教授,博士生导师;刘小雄 博士,讲师。

**定义 2(子句)**  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  是  $n$  个子句的集合, 每个子句  $c_i$  由若干文字通过析取运算符 ( $\vee$ ) 连接而成, 子句中文字的个数称为子句的长度。

**定义 3(真值指派)** 是一个函数  $t: U \rightarrow \{T, F\}$ , 其中  $T$  为 True,  $F$  为 False。若  $U$  中的布尔变量的个数为  $l$ , 每个真值指派为一  $l$  元布尔向量。

**定义 4(合取范式 CNF)**  $F = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_n$ , 其中  $c_i$  为子句,  $\wedge$  为合取运算符。范式  $F$  在一真值指派  $t$  下为真当且仅当每个子句  $c_i$  在真值指派  $t$  下为真。

SAT 问题就是确定是否存在一个真值指派  $t$ , 使得布尔变量集  $U$  上的 CNF 范式  $F$  为真。若存在一个真值指派  $t$  使  $F$  为真, 则称 SAT 问题可满足。  $F$  中的每个子句的长度都为  $m$ , 则称为  $m$ -SAT 问题。

### 3 单变量边缘分布算法

单变量边缘分布算法由 Muhlenbein<sup>[9]</sup> 首先于 1998 年提出, 目前已有许多关于 UMDA 的改进算法和数学分析。在二进制搜索空间, UMDA 使用一个概率向量

$$p(x, t) = (p(x_1, t), \dots, p(x_l, t))$$

式中  $x = (x_1, \dots, x_l) \in \{0, 1\}^l$ , 描述每一代的群体。这个概率向量就确定了二进制串中每一位取值为 1 的概率。如果已经计算出了概率向量, 每一代的个体就可以从该概率向量中抽样生成。

UMDA 算法描述如下:

step1.  $t \leftarrow 0, p(x, 0) = (0.5, \dots, 0.5)$ ;

step2. 由概率向量  $p(x, t)$  抽样产生  $N$  个个体, 组成群体  $Pop(t)$ ;

step3. 利用某种选择机制从群体  $Pop(t)$  中选择  $\mu < N$  个个体, 组成中间群体  $Pop^*(t)$ ;

step4. 依据(1)式估计  $Pop^*(t)$  的概率分布  $p^*(x, t)$ ,  $p(x, t+1) = p^*(x, t)$ ;

step5. 若终止条件不满足, 转 2。否则, 停。

$Pop^*(t)$  的概率分布即概率向量的计算可通过下式进行:

$$p^*(x_i, t) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} x_i^k(t) \quad (1)$$

其中  $i=1, \dots, l, k=1, \dots, \mu, x_i^k(t)$  表示群体  $Pop^*(t)$  中第  $k$  个个体的第  $i$  个变量 (即第  $i$  个基因)。因此, 概率向量是通过从  $Pop^*(t)$  中提取统计信息进行更新的, 可以证明此估计是最大似然估计。依据概率分布抽样产生新的个体, 采用的是随机抽样。

应用 UMDA 优化算法求解 SAT 问题编码可以直接采用对变量的真值指派。对于包含  $l$  个变量的 SAT 问题, 个体用  $l$  位二进制串表示, 每一位对应变量的取值。适应值可定义为真值指派所不能满的子句数, 这样 SAT 问题转换为适应值函数求极值的最优化问题。

### 4 结合启发式算子的单变量边缘分布算法

#### 4.1 启发式算子

对于组合问题, 在不完全算法中结合问题本身的知识已被验证是非常有效的一个方法。在 SAT 问题的研究中, 一些研究者已经提出了如何利用问题的结构信息构造启发算子和一些局部搜索算法<sup>[4-7]</sup>。但是这些算法只是利用了 SAT 问题的结构信息构造启发算子, 没有利用算法运行过程中所获得的信息, 而且所利用信息的方式也不尽相同。本文将这两种

信息结合在一起, 提出了一种新的利用方式, 构造了一个新的启发算子。

UMDA 通过从  $Pop^*(t)$  中提取统计信息计算概率向量  $p^*(x, t) = (p^*(x_1, t), \dots, p^*(x_l, t))$ 。  $p^*(x_i, t)$  表示变量  $x_i$  在  $\mu$  个个个体中取值为真所占的比例, 它包含了从当前群体的优秀解中所学习到的变量  $x_i$  取值为真还是为假的动态信息。如果  $p^*(x_i, t)$  比较大, 说明在优秀解中变量  $x_i$  取值为真的概率比较大, 即变量  $x_i$  取 1 对适应值的贡献比较大。

设  $m_i$  为子句中包含变量  $x_i$  的子句个数,  $n_i$  为子句中不包含  $\neg x_i$  的子句个数, 则在 SAT 问题的结构信息中变量  $x_i$  所占比例为  $\frac{m_i}{n_i + m_i}$ 。设  $q = (q_1, \dots, q_m), q_i = \frac{m_i}{n_i + m_i}$ 。如果  $q_i$  比较大, 说明在所有子句中变量  $x_i$  相对于  $\neg x_i$  所占比重较大, 那么变量  $x_i$  被指派为真的概率比较大, 反之指派为真的概率就比较小。

将上述两种信息结合, 提出一种新的启发式算子:

step1. 输入  $q, p^*(x, t)$  和群体  $Pop^*(t)$ ;

step2. 从群体  $Pop^*(t)$  中选择一部分最优个体, 记作  $H_s(t)$ ;

step3. 对  $H_s(t)$  中的每一个个体, 随机选择一个不满足子句;

step4. 将优秀个体中对应于不满足子句所包含的变量部分以概率  $p_i = \lambda q_i + (1-\lambda) p^*(x_i, t)$  指派为真。  $\lambda$  为参数。  $\lambda$  取值不同, 所偏重的信息不同, 本文取值为 0.85。

此启发算子的目的是产生一组新解, 它从一组较优秀的个体出发针对不满足子句中的变量进行修正, 修正时利用了  $q$  和  $p^*(x, t)$ , 而  $q$  包含了 SAT 问题本身的结构信息,  $p^*(x, t)$  描述了当前种群优秀解所包含的全局信息。将这两种信息结合起来, 可以指导个体进入一个新的潜在优秀解搜索区域。从启发算子我们还可以看出, 子句中含有某个变量的相对个数越多, 群体中指派此变量为真的比例越大, 此变量指派为真的可能性越大。它既不同于随机搜索算子的盲目搜索, 也不同于邻域搜索算子 (例如 1-opt,  $k$ -opt 等) 陷入局部最优。

#### 4.2 结合启发式算子的单变量边缘分布算法

单变量边缘分布算法根据当前代的优秀解提供的信息建立概率模型, 由此模型抽样产生新的解, 部分或全部取代旧的群体。UMDA 虽然可以很好地提取这些全局信息, 但是它缺乏探索能力。当种群不能提供新的信息, 或信息提供不准确, UMDA 就不能探索新的搜索区域, 或者陷入局部最优。因此结合一些局部搜索, 启发式算子的策略是一个有效的办法。本文提出一种启发算子可以使得算法跳出局部最优, 加快算法收敛速度。

结合启发算子后, 求解 SAT 问题的单变量边缘分布算法 (HeUMDA) 描述如下:

step1.  $t \leftarrow 0, p(x, 0) = (0.5, \dots, 0.5)$ , 由  $p(x, 0)$  抽样产生  $N$  个初始群体  $Pop(t)$ ;

step2. 利用某种选择机制从群体  $Pop(t)$  中选择  $\mu < N$  个个体, 组成中间群体  $Pop^*(t)$ ;

step3. 依据(1)式估计  $Pop^*(t)$  的概率分布  $p^*(x, t), p(x, t+1) = p^*(x, t)$ ;

step4. 由概率向量  $p(x, t+1)$  抽样产生  $N$  个个体, 组成群体  $Pop1(t+1)$ ;

step5. 从群体  $Pop^*(t)$  中选择  $N' (N' < \mu)$  个优秀个体, 构成  $H_s(t)$ ;

step6. 对  $H_s(t)$  采用启发算子, 产生  $N'$  个新个体, 记作  $H(t)$ ;

step7. 从群体  $Pop(t), Pop1(t+1), H(t)$  中选择  $N$  个优秀个体作为后代  $P(t+1)$ 。

Step8. 若终止条件不满足,  $t \leftarrow t+1$ , 转(2)。否则, 停。

## 5 实验结果

目前, 一般的实验方法主要是求解 SATLIB 库 (<http://www.satlib.org>) 中的标准问题, 根据不同算法的成功率和运行时间来比较算法的性能。本文采用 SAT 中最难求解的“Unifrom Random 3-SAT”问题集, 其他的 SAT 问题都可转化为 3-SAT 问题。该问题集共有 SAT 问题 3700 个, 其中问题的字句个数与变量个数的比均为 4.3 左右。根据变量个数可将这 3700 个问题分成 10 个集合, 分别记为 SAT1, SAT2, ..., SAT10。这 10 个集合所包含的问题和相应的参数如表 1 所示。

表 1 测试所用的 SAT 问题

测试 样本	样本 个数	文件名	每个样本的 变量个数	每个样本 的子句数
SAT1	1000	uf20-01, uf20-02, ..., uf20-01000	20	91
SAT2	1000	uf50-01, uf50-02, ..., uf50-01000	50	218
SAT3	100	uf75-01, uf75-02, ..., uf75-0100	75	325
SAT4	1000	uf100-01, uf100-02, ..., uf100-01000	100	430
SAT5	100	uf125-01, uf125-02, ..., uf125-0100	125	538
SAT6	100	uf150-01, uf150-02, ..., uf150-0100	150	645
SAT7	100	uf175-01, uf175-02, ..., uf175-0100	175	753
SAT8	100	uf200-01, uf200-02, ..., uf200-0100	200	860
SAT9	100	uf225-01, uf225-02, ..., uf225-0100	225	960
SAT10	100	uf250-01, uf250-02, ..., uf250-0100	250	1065

表 2 算法的性能比较

测试 样本	平均成功率			平均运行时间		
	HeUMDA	UMDA	WalkSAT	HeUMDA	UMDA	WalkSAT
SAT1	1.00	0.92	1.00	38	60	40
SAT2	1.00	0.90	0.96	60	110	45
SAT3	1.00	0.85	0.75	80	213	121
SAT4	1.00	0.60	0.23	100	841	5450
SAT5	0.96	0.12	0	210	1902	*
SAT6	0.94	0	0	550	*	*
SAT7	0.92	0	0	2000	*	*
SAT8	0.81	0	0	3524	*	*
SAT9	0.70	0	0	5210	*	*
SAT10	0	0	0	*	*	*

为了说明所提改进算法 HeUMDASAT 的性能, 实验分别与一般 UMDA 算法和 WalkSAT 算法进行了比较, 从计算的平均执行时间以及平均成功率两个方面进行分析。WalkSAT 是一种非常有效的利用局部搜索求解 SAT 问题的方法, 求解 SAT 问题的改进算法<sup>[3-6]</sup>多数都与它进行比较。本文对这 10 个问题分别利用上述算法独立运行 10 次, 平均成功率是成功次数与运行总次数的比; 平均运行时间是 10 次运行时间的平均值, 单位为 s。通过实验数据, 统计结果如表 2 所示。本文所有试验运行的环境均为 PIV 3.06 GHz, 1GB 内存的 PC 机, Windows XP 操作系统。

表 2 的实验数据表明, 对这 10 个问题集, 本文所提算法的运行效率在绝大部分情况下都有明显的提高, 同时求解的时间和求解能力也有很大的提高。其性能明显优于 UMDA 和 WalkSAT, 而且 HeUMDASAT 的运行时间远远小于 WalkSAT。同时, 随着问题规模的增大, WalkSAT 和传统 UMDA 所需的计算量迅速增大, 而 HeUMDASAT 仍然表现出了优越的性能。比较结果表明 HeUMDASAT 充分利用问题本身的信息和当前代提供的全局信息构造启发算子, 使得算法跳出局部最优, 从而加快了算法的收敛速度。

**结束语** 单变量边缘分布算法通过从当前代提取信息, 建立概率分布, 指导种群进化。但是当提供或提取信息错误时, 就会导致错误指导, 陷入局部最优。本文利用问题本身的信息和当前代提供的全局信息构造启发算子, 帮助算法跳出局部最优, 加快收敛速度。这一想法对其它求解 SAT 问题的不完备算法也是有效的。通过对标准范例进行仿真, 得到了较满意的结果。

## 参考文献

- [1] Davis M, Putnam H. A computer procedure for quantification theory. *Journal of the ACM*, 1960, 7(3):202-215
- [2] Iwama K. CNF satisfiability test by counting and polynomial average time. *SIAM J Comput*, 1989, 18(2):385-391
- [3] 凌应标, 吴向军, 姜云飞. 基于子句权重学习的求解 SAT 问题的遗传算法. *计算机学报*, 2005, 28(9):1476-1481
- [4] 杨晋吉, 苏开乐. SAT 问题中局部搜索的改进. *计算机研究与发展*, 2005, 42(1):60-65
- [5] Selman B, Levesque H J, Mitchell D G. A new method for solving hard satisfiability problems // *Proc. of the 10<sup>th</sup> AAAI'92*. Menlo Park, CA: AAAI Press, 1992: 440-446
- [6] Selman B, Kautz H A, Cohen B. Noise strategies for improving local search // *Proc. of the 12<sup>th</sup> AAAI'94*. Menlo Park, CA: AAAI Press, 1994:337-343
- [7] Mcallester D, Selman B, Kautz H. Evidence for invariants in local search // *Proc. of the 14<sup>th</sup> AAAI'97*. Menlo Park, CA: AAAI Press, 1997:321-326
- [8] Larranaga P, Lozano J A. *Estimation of Distribution Algorithms: A New Tool for Evolutionary Computation*. Norwell, MA: Kluwer, 2001
- [9] Miihlenbein H. The equation for response to selection and its use for prediction. *Evolutionary Computation*, 1998, 5(6):303-346