

混合自动机的多项式 phase-portrait 近似^{*}

刘保罗¹ 裴海龙¹ 李坚强¹ 张胜祥^{1,2}

(华南理工大学自动化科学与工程学院 广州 510640)¹ (华南农业大学应用数学系 广州 510640)²

摘要 抽象近似是验证混合系统安全性的主要方法,模型转换是构造一个可判定的(或半判定的)混合自动机来近似原混合自动机。本文将线性 phase-portrait 近似推广到多项式 phase-portrait 近似,叙述了如何自动构造多项式 phase-portrait 近似自动机及如何精化近似模型。

关键词 混合自动机,弱时间模拟,phase-portrait 近似

Polynomial Phase-Portrait Approximation for Hybrid Systems

LIU Bao-luo¹ PEI Hai-long¹ LI Jiang-qiang¹ ZHANG Sheng-xiang^{1,2}

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)¹

(Department of Applied Mathematic, South China Agriculture University, Guangzhou 510640, China)²

Abstract Abstraction is a dominant approach for verification of hybrid systems. Model transformation is to construct a decidable (or semi-decidable) hybrid automaton to over-approximate the original automaton. In this paper, we extend the linear phase-portrait approximation to polynomial phase-portrait approximation. We show how to automatically construct polynomial phase-portrait automaton and how to refine the approximation.

Keywords Hybrid automaton, Weak time simulation, Phase-portrait approximation

1 引言

混合系统是连续变量过程和离散事件过程并存且相互交换信息的动态系统,如数字嵌入式系统。安全性保证是混合系统设计的主要要求之一。使用混合自动机做验证模型时,安全性验证可归结为自动机的求空问题,即自动机的可达状态集与不安全区域的交集是空,因此可达集的计算至关重要。然而,可达集的精确计算仅局限于一些简单混合系统,如时间混合自动机、矩形自动机。对于大多数混合系统,可达集的精确计算是不可判定的,甚至是不可计算的^[5]。基于这个问题,研究者提出了许多种方法,旨在寻找验证安全性的充分条件。这些方法大致可分为两类:一类是从语义上求解可达集的近似,如用简单的几何体外近似可达集^[1,7];另一类是模型转化^[2],是从语法上构造原系统的模拟自动机,要求所构造的模拟器的可达集是可判定的,或者是可计算的。本文所叙述的方法属于这一类。Thomas A. Henzinger 提出了 phase-portrait 近似概念,文 [2] 构造线性 phase-portrait 自动机来模拟非线性自动机,文 [6] 使用泰勒公式构造多项式自动机,但这种近似不是 phase-portrait 近似,因此仅依赖增大多项式的幂级数来提高近似的精确有一定的局限性。基于这点考虑,本文将线性 phase-portrait 近似推广到多项式 phase-portrait 近似,并给出了多项式 phase-portrait 近似自动机的构造方法。

2 混合自动机

混合自动机是研究混合系统的常用模型,混合自动机的语法及语义定义如下所述。

2.1 多项式及一阶谓词公式

语言是符号的集合,包括关系、函数和常数,如 $\sigma = \{<, +, -, 0, 1\}$, 其中 $<$ 是关系, $+$, $-$ 是函数, $0, 1$ 是常数。语言的项递归定义为:项是变量、常数,或者 $F(\theta_1, \dots, \theta_m)$, 其中 F 是 m 元的函数, $\theta_i, i=1, \dots, m$ 是项。语言 $\sigma = \{<, +, -, 0, 1\}$ 的项为线性项,语言 $\sigma_R = \{<, +, -, \cdot, 0, 1\}$ 的项为多项式。原子公式定义为: $\theta_1 = \theta_2$ 或 $R(\theta_1, \dots, \theta_n), \theta_i, i=1, \dots, m$ 是项, R 是 n 元关系。

关于向量 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 的一阶谓词公式 $\Phi(X)$ 递归定义为: (1) 原子公式是公式; (2) 如果 φ_1, φ_2 是公式, x 是变量, 则 $\varphi_1 \wedge \varphi_2, \neg \varphi_1, \forall x, \varphi_1, \exists x, \varphi_1$ 是公式。给定语言的解释及变量的值域 S , 集合 $Y \subseteq S^n$ 称为可定义的, 如果存在公式 φ , 使得 $Y = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid \varphi(x_1, \dots, x_n)\}$ 。特别地, 记域上的关于 σ_R 的一阶谓词公式(即多项式公式)为 $poly(\sigma_R)$ 。

2.2 混合自动机语法定义

定义 1(混合自动机) 混合自动机是元组 $H = (L, X, Lab, E, Init, Inv, f, J, U)$, 其中:

- L 是离散位置的集合, 离散位置又称为控制模式。
- $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是连续变量。
- Lab 标签集, 包括静默迁移标签 τ 。
- $E \subseteq L \times Lab \times L$ 是离散迁移集。
- $Init: L \rightarrow \Phi(X)$ 是初始状态集。
- $Inv: L \rightarrow \Phi(X)$ 赋予每个离散位置不变集。
- f 描述连续变量的动态过程, 可以有两种表示方法:
 - 显式表示: $Act: L \rightarrow \Phi(X, X', t), X' = \{x_1', \dots, x_n'\}$ 表示迁移后的值。
 - 隐式表示: $Flow: L \rightarrow (X \rightarrow TX)$ 赋予每个离散位置连

^{*} 本文受国家自然科学基金(60374036)(60574004)、广东省自然科学基金(031407)项目资助。刘保罗 博士生, 研究方向为混合系统安全性验证;裴海龙 教授, 博士生导师, 研究方向为混合系统分析与综合;李坚强 博士生, 研究方向为混合系统稳定性研究。

续量变化的向量场。

$-J: E \rightarrow \Phi(X, X')$ 是迁移条件。

$-U: L \rightarrow \Phi(X)$, 最终状态, 表示不安全集。

例 1: 考虑一个温控器, 其建模自动机如图 1 所示, 其中变量 x 表示温度。自动机有两个控制模式: 位置 *on* 表示温控器开始加热, 其连续动态为 $\dot{x} = -x + 5$; 位置 *off* 表示温控器停止加热, 其动态方程为 $\dot{x} = -x$ 。图 1 中的自动机的连续动态过程表示为向量场, 也可转化为 *Act* 表示, 如在位置 *off* 为 $x' = xe^{-t}$ 。

定义 2(多项式自动机) 自动机 H 是多项式自动机, 如果对任意 $l \in Loc$ 有 $Init(l), U(l), Inv(l)$ 及 $Act(l)$ 是多项式公式, 对任意 $e \in E, J(e)$ 是多项式公式。

多项式自动机要求自动机的约束可由 $poly(\cdot)$ 表示。注意: 在定义 2 中连续动态用 *Act* 形式, 即 $Act(l) = \Phi(X, t, X')$ 为多项式公式时才称其为多项式自动机。文 [3] 指出多项式自动机的可达集是可计算的, 且在有限步内其可达集是可判定的。

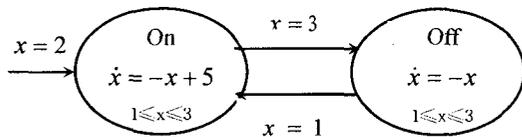


图 1 温控器建模混合自动机

2.3 混合自动机语义

定义 3(混合自动机语义) 给定混合自动机 $H = (L, X, Lab, E, Init, Inv, f, J, U)$, 其语义是一赋时迁移系统(TTS): $[H] = (Q, Q_0, Q_f, \Sigma, \rightarrow)$, 其中: (a) 状态空间 $Q = L \times \mathbb{R}^n$, (b) 初始状态集 $Q_0 = \{(l, x) \in Q \mid x \in Init(l)\}$, (c) 不安全集 $Q_f = \{(l, x) \in Q \mid x \in U(l)\}$, (d) $\Sigma = Lab$, (e) 迁移 $\rightarrow = U \cup E \cup \Sigma \xrightarrow{\delta} U \cup \delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, 它包括离散迁移及连续迁移。

离散迁移: $(l, x) \xrightarrow{\delta} (l', x')$, 如果 $e = (l, \sigma, l') \in E$, 且 $(x, x') \in J(e)$ 。

连续迁移: $(l_1, x) \xrightarrow{\delta} (l_2, x')$, 如果 $l_1 = l_2$, 且存在时间 δ 。对于向量场形式, 存在连续可微曲线: $x: [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足 $X(0) = x, X(\delta) = x'$, 且对所有的 $t \in [0, \delta]$, 有 $\dot{X}(t) \in Flow(l_1, X(t))$; 对于 *Act* 表示形式, 有 $(x, x', \delta) \in Act(l)$ 。

给定 TTS $T = (Q, Q_0, Q_f, \Sigma, \rightarrow)$, 定义关系^[2]

$\rightarrow \subseteq Q \times (\Sigma / \{\tau\} \cup \mathbb{R}_{\geq 0}) \times Q$, 如果 $q \xrightarrow{\delta} q' \sigma \in \Sigma \setminus \{\tau\}$, 则存在有限序列 q_1, \dots, q_k , 使得 $q \xrightarrow{\tau} q_1 \xrightarrow{\tau} \dots \xrightarrow{\tau} q_k \xrightarrow{\delta} q'$; 如果 $q \xrightarrow{\delta} q' t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, 则存在有限序列 t_1, \dots, t_k 使得 $q \xrightarrow{t_0} q_1 \xrightarrow{\tau} q_2 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{\tau} q_{2k} \xrightarrow{t_k} q'$, 且 $t = t_1 + \dots + t_k$ ^[2]。

混合自动机的运行即包括离散位置的跳变, 也包括连续量的动态变化。集合 $A \subseteq L \times \mathbb{R}^n$ 的一步后继定义为 $Post(A) = \{(l, x') \in L \times \mathbb{R}^n \mid \exists (l, x) \in A (l, x) \rightarrow (l', x')\}$, 混合自动机 H 的可达集定义为: $Reach([H]) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Post_{[H]}^i(Q_0)$, 其中 $Post_{[H]}^0(Q_0) = Q_0, Post_{[H]}^i(Q_0) = Post(Post_{[H]}^{i-1}(Q_0))$ 。自动机 H 是安全的, 如果其不安全区域是不可达, 即 $Reach([H]) \cap Q_f = \emptyset$ 。

2.4 时间模拟

抽象近似是安全性验证的主要方法之一, 它的意义在于, 通过构造原自动机的抽象近似模型, 以降低原自动验证复杂

性。抽象模型的行为要保证是原系统行为的超集。模型间的这种关系可以形式化地表述为弱时间模拟关系。

定义 4(弱时间模拟^[2]) 给定两个时间迁移系统 TTS: $T_1 = (Q^1, Q_0^1, Q_f^1, \Sigma, \rightarrow^1)$ 和 $T_2 = (Q^2, Q_0^2, \Sigma, \rightarrow^2)$, 如果在两系统 T_1, T_2 之间存在关系 $R \subseteq Q^1 \times Q^2$ 满足:

对于所有的 $(q_1, q_2) \in R$, 对任意 $\delta \in \Sigma \setminus \{\tau\} \cup \mathbb{R}_{\geq 0}$, 如果 $q_2 \xrightarrow{\delta} q_2'$, 则存在 $q_1' \in Q^1$, 满足 $q_1 \xrightarrow{\delta} q_1'$ 且 $(q_1', q_2') \in R$ 。

对于所有的 $q_2 \in Q_0^2$, 存在 $q_1 \in Q_0^1$ 满足 $(q_1, q_2) \in R$ 。

对于所有的 $q_2 \in Q_f^2$, 存在 $q_1 \in Q_f^1$ 满足 $(q_1, q_2) \in R$ 。

则称 T_1 弱时间模拟 T_2 , 记为 $T_2 \leq T_1$ 。

定义 5($H_2 \leq H_1$) 给定混合自动机 H_1 和 H_2 , 其 TTS 分别为 $[H_1], [H_2]$, 如果 $[H_2] \leq [H_1]$, 则称混合自动机 H_1 弱时间模拟混合自动机 H_2 , 简记为 $H_2 \leq H_1$ 。

定理 1 给定混合自动机 H_1 和 H_2 , 如果满足 $H_2 \leq H_1$, 则如果 H_1 是安全的, 则 H_2 也是安全的。

如果 $H_2 \leq H_1$, 则 H_1 是 H_2 的外近似, H_1 的可达集是 H_2 可达集的超集。因此, 如果 H_1 是安全的, 则可得出 H_2 也是安全的。但如果 H_1 是不安全的, 不能由 H_1 推出 H_2 的安全性。

因此, 欲证自动机 H 的安全性问题, 可以首先构造模拟自动机 H' , 使其满足 $H_2 \leq H_1$, 且要求 H' 的安全性是可判定的, 或至少是可计算的。这类自动机有时间自动机、矩形自动机等。文 [6] 指出, 多项式自动机的有限步可达集是可判定的, 因此可以多项式自动机作为抽象目标模型。在本文中主要考虑如何构造系统的抽象模拟多项式自动机。

3 多项式 phase-portrait 近似自动机的构造

给定混合自动机 H , 构造 H 的模拟自动机 H' , 使其满足 $H \leq H'$, 且 H' 是多项式自动机。

定义 6(约束集蕴含) 给定两个约束集 $cons = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}, cons' = \{\varphi_1', \dots, \varphi_k'\}$, 如果每个公式 φ_i' 蕴含对应的 φ_i , 则称 $cons'$ 蕴含 $cons$, 记为 $cons \leq cons'$ 。

给定自动机 $H = (L, X, Lab, E, Init, Inv, f, J, U)$, 其约束集为 $cons = \{Init, Inv, flow, J, U\}$, 松弛约束集而构造自动机 H' , 使得 H' 对应的约束集 $cons'$ 满足 $cons \leq cons'$ 且 $\forall \varphi \in cons': \varphi \in poly(\cdot)$, 则 H' 是 H 的多项式模拟器。文 [6] 就是基于这种方法构造多项式模拟器。然而, 仅从自动机语法构造的模拟器往往不能较好地抽象近似原系统, 因此本文将模态划分与多项式蕴含结合起来构造模拟器。

假定自动机的连续动态 f 以向量场关系给定, 即 $\dot{x}_i = \varphi(X)$, 在本文中限定 $\varphi(X) \in poly(X)$, 对于更一般的形式, 在以后的文章中进行研究。

多项式 phase-portrait 近似自动机的构造过程包括两部分: 控制模态的划分及模拟多项式自动机的构造。

3.1 控制模态划分

假定自动机 H , 考虑位置 l , 其 $flow(l)$ 形式为: $\dot{x}_i = \varphi(X), \varphi(X) \in poly(X)$, 给定 n 值, 求解 x_i 的 N 阶麦克劳林公式 $Taylor(x_i, n)$ 为 $x' = x_i(t) = x(0) + \frac{\dot{x}_i(0)}{1!}t + \dots + \frac{x_i^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{x_i^{(n)}(\xi)}{(n)!}t^n$ 其中 $0 < \xi < t$ 。

记 $R_i^n = \frac{x_i^{(n)}(\xi)}{(n)!}t^n, 0 < \xi < t$ 是关于 $x_i(t)$ 的 N 阶泰勒

公式余项,其中 ξ 在区间 $(0, t)$ 取值。由于 $x_i \in poly(X)$, 式(1)是关于 (X, t, X') 的 N 阶多项式,但在其中含有不确定量 ξ , 因此划分状态空间求解关于 ξ 的单调区间,以固定的端点值来求解近似多项式。

假定 t 为固定值,改写 R_i^n 为 $R_i^n(\zeta) = \frac{x_i^{(n)}(\zeta)}{n!} t^n$, ζ 为自变量,则 $R_i^n(\zeta)$ 关于 ζ 的导数为

$$P_i^n = \frac{dR_i^n(\zeta)}{d\zeta}$$

P_i^n 是关于 (X, t, ζ) 的多项式,使用 $P_i^n = 0$ 来划分位置 q 的连续状态空间,则在空间 $P_i^n \geq 0, R_i^n(\zeta)$ 关于 ζ 单调增加;空间 $P_i^n \leq 0, R_i^n(\zeta)$ 关于 ζ 单调减少。 P_i^n 简称为 $x_i(t)$ 的 N 阶多项式。

对于位置 l , 针对向量 X 每一个元素 x_i 可以依此方法得到其 N 阶多项式 P_i^n , 这些多项式组成集合 P 。多项式集合 P 构成关于位置 l 的状态空间覆盖 $\psi(l) = \{\psi_1^l, \dots, \psi_k^l\}$, 满足:

$$Inv(l) \subseteq \cup \psi(l).$$

$$[\psi_i^l] =$$

$$\{x \in X \mid \bigwedge_{a \in m_1} p_a(x) > 0 \wedge \bigwedge_{\beta \in m_2} p_\beta(x) < 0 \wedge Inv(l) \} i = 1, 2, \dots, k$$

其中 $m_1 \cup m_2$ 是集合 $\{1, 2, \dots, |P|\}$ 的划分。

例2: 电力阀门控制系统中的激励模块由脉冲宽度调制信号控制,其动态特性可由混合系统来描述。系统有两个控制模式,当输入信号为高电平时,系统处于 on 模式,其动态方程为^[4]

$$\dot{V} = \frac{2000}{9}(24 - 2V - I), \dot{I} = \frac{1000}{15}(120 - 22I)$$

当输入信号为低电平时,系统处于 off 模式,其动态方程为

$$\dot{V} = -\frac{2000}{3}I, \dot{I} = \frac{2000}{15}(5V - 16I)$$

考虑模式 off, 其二阶多项式集为:

$$P = \{5V - 16I, -80V + 231I\}$$

混合自动机的状态空间是 $L \times \dots$ 。依照上述方法针对每一个控制模式 l , 构造有限覆盖 $\psi(l)$, 将位置 l 的状态空间划分为离散位置集 $\{(l, \varphi) \mid \varphi \in \psi(l)\}$ 。模式划分的形式化定义为:

定义7(模式划分) 给定自动机 $H = (L, X, LabE, Init, Inv, Flow, J, U)$ 及其 N 阶多项式覆盖函数 $\psi: L \rightarrow 2^n$, 构造 H 的 phase-portrait 自动机 $H' = (L', X', Lab', E', Init', Inv', Act', J', U')$, 使其满足:

$$(a) L' = \{(l, \varphi) \mid l \in L, \varphi \in \psi(l)\}.$$

$$(b) X' = X.$$

$$(c) Lab' = Lab.$$

$$(d) E' = E_1 \cup E_2, \text{ 其中 } E_1 = \{((l, \varphi), \sigma, (l', \varphi')) \mid \varphi \in \psi(l) \wedge \varphi' \in \psi(l') \wedge (l, \sigma, l') \in E\} E_2 = \{((l, \varphi), \tau, (l, \varphi')) \mid \varphi, \varphi' \in \psi(l) \wedge l \in L\}$$

$$(e) \forall (l, \varphi) \in L'. Init'(l, \varphi) = Init(l) \wedge \varphi.$$

$$(f) \forall (l, \varphi) \in L'. Inv'(l, \varphi) = Inv(l) \wedge \varphi.$$

(g) $Act'(l, \varphi) = Taylor(X, n)$, 即对模式 l 变量 X 做 N 阶泰勒公式(1)展开。

$$(h) \forall e \in E_1, J'((l, \varphi), \sigma, (l', \varphi')) = J(l, \sigma, l'), \forall e \in E_2, J'((l, \varphi), \tau, (l, \varphi')) = stable(X). stable(x) \text{ 表示 } x = x'.$$

$$(i) \forall (l, \varphi) \in L', U'(l, \varphi) = U(l) \wedge \varphi.$$

3.2 多项式近似

由步骤1, 我们得到自动机 H 的 phase-portrait 自动机 H' , 其离散位置为 $(l, \varphi) \in L'$ 。在每个位置上, 使用泰勒公式将连续变量的向量场限制 $flow$ 转化成 Act 限制, 其为关于 (X, X', t) 的多项式。但在这个公式中, 有不确定量 ξ 存在, 因此需要进一步利用近似方法构造多项式表达式。

考虑离散状态 $v = (l, \varphi) \in L'$, x_i 的 N 阶多项式 P_i^n , 在位置 v 或者满足 $P_i^n \geq 0$, 或者满足 $P_i^n \leq 0$, 因此 $R_i^n(\zeta)$ 在区间 $[0, t]$ 上是单调函数, 且知 ξ 在区间 $[0, t]$ 取值。

如果 $P_i^n \geq 0$, 则 $R_i^n(0) \leq R_i^n(\xi) \leq R_i^n(t)$, 即 $\frac{x_i^{(n)}(0)}{n!} t^n \leq \frac{x_i^{(n)}(\xi)}{n!} t^n \leq \frac{x_i^{(n)}(t)}{n!} t^n$, 假定(1)式为 $x_i' = W_i^n + R_i^n(\xi)$, 其中 W_i^n 为前 n 项和, 则

$$x_i' \geq W_i^n + R_i^n(0) = W_i^n + \frac{x_i^{(n)}(0)}{n!} t^n = W_i^{n+1} \quad (2)$$

$$x_i' \leq W_i^n + R_i^n(t) = P_i^n + \frac{x_i^{(n)}(t)}{n!} t^n \quad (3)$$

同样, 如果 $P_i^n \leq 0$, 则 $R_i^n(t) \leq R_i^n(\xi) \leq R_i^n(0)$, 有

$$x_i' \leq W_i^n + R_i^n(0) = W_i^{n+1} \quad (4)$$

$$x_i' \geq W_i^n + R_i^n(t) = W_i^n + \frac{x_i^{(n)}(t)}{n!} t^n \quad (5)$$

记式(2)、(3)或者(4)、(5)为 $consAct(v)$, 在位置 v 上用 $consAct(v)$ 替换 Act , 同样在自动机的每个离散位置做 Act 替换, 这样得到的自动机称为自动机 H 的近似多项式自动机, 记为 $Approx(H, n)$ 。

定理2 给定自动机 H , 依上述步骤构造多项式自动机 $Approx(H, n)$, 则满足 $H \leq Approx(H, n)$ 。

4 抽象精化

因为所构造的自动机 $Approx(H, n)$ 是原自动机的外近似, 当 $Approx(H, n)$ 是不安全的, H 的安全性问题是不确定的。这时需考查 $Approx(H, n)$ 模拟原系统的精确程度, 精化抽象模型, 重新求解安全性问题。下面给出两种精化模型的方法。

4.1 增大多项式的阶数

依上述方法构造自动机 $Approx(H, n+1)$, 如果(1)式泰勒级数收敛, 显然有下述定理^[6]。

定理3 如果混合自动机 H 的各个模式的连续变量, 其泰勒级数收敛, 则有

$$H \leq Approx(H, n+1) \leq Approx(H, n)$$

4.2 限制动态误差

依赖增加泰勒多项式的阶数来提高抽象自动机 $Approx(H, n)$ 的精度, 势必增加计算的复杂性, 且受泰勒级数收敛条件的限制。因此, 当限制阶数增加时, 可以通过修改模型, 以限制局部动态误差。

由 $Approx(H, n)$ 的构造过程, 可以得出近似自动机与原系统的误差为

$$|error| \leq |R_i^n(t) - R_i^n(0)| = \left| \frac{x_i^{(n)}(t)}{n!} t^n - \frac{x_i^{(n)}(0)}{n!} t^n \right|$$

如果限制 $|R_i^n(t) - R_i^n(0)| \leq \epsilon$, 则 $|error| \leq \epsilon$, 记 $ERR_i = |R_i^n(t) - R_i^n(0)|$ 。

在自动机 $Approx(H, n)$ 的位置 v 中增加 $|R_i^n(t) - R_i^n(0)| \leq \epsilon$ 限制, 当 $|R_i^n(t) - R_i^n(0)| = \epsilon$ 时, 激发迁移, 迁移后复位时间 t 为零。由于位置 v 是关于 $R_i^n(\zeta)$ 的单调

函数, 迁移后的 *Act* 关系保持不变, 因此迁移目标位置仍是原位置 *v*。依这种方式修改后的自动机模型记为 $Approx_\epsilon(H, n)$ 。显然在每个位置上有 $|error| \leq \epsilon$, 但在离散迁移过程中引入了累加误差。 $Approx_\epsilon(H, n)$ 的构造过程可形式化定义为:

定义 8 ($Approx_\epsilon(H, n)$ 的构造) 给定自动机 H 的 $Approx(H, n) = (L, X, Lab, E, Init, Inv, Act, J, U)$, 构造其关于给定值 ϵ 的精细化模型 $Approx_\epsilon(H, n)$ 为

$Approx_\epsilon(H, n) = (L', X', Lab', E', Init', Inv', Act', J', U')$ 使其满足:

(a) $L' = L, X' = X, Lab' = Lab$. (d) $\forall l' \in L', Inv'(l) = Inv(l) \wedge \bigwedge Err_i(l) \leq \epsilon$. (e) $Init'(l) = Init(l)$. (f) $E' = E \cup \{(l, \tau, l) \mid l \in L\}$. (g) $Act'(l) = Act(l)$. (h) 任意 $e \in E'$, 如果 $e \in E$, 则 $j'(e') = j(e')$, 如果 $e' = (l, \tau, l), j'(e) \equiv j(e) \wedge \bigwedge Err_i(l) = \epsilon \wedge l' = 0 \wedge stable(X)$. (i) $U' = U$.

定理 4 由 $Approx_\epsilon(H, n)$ 的构造过程有 $H \leq Approx_\epsilon(H, n) \leq Approx(H, n)$

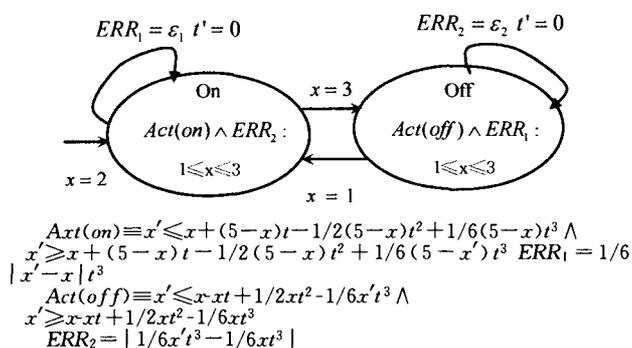


图 2 H 的 $Approx_\epsilon(H, n)$ 自动机, 其中 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.5$

例 3: 在例 1 中所描述的混合自动机按照上述方法构造的三阶近似多项式自动机如图 2 所示。假定 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.5$, 其中模态 off 的多项式近似轨迹如图 3 所示。由图 3 可看出两条多项式曲线间囊括了原指数曲线, 近似可通过增大多项式

阶数或减少 ϵ 值来逼近原曲线。

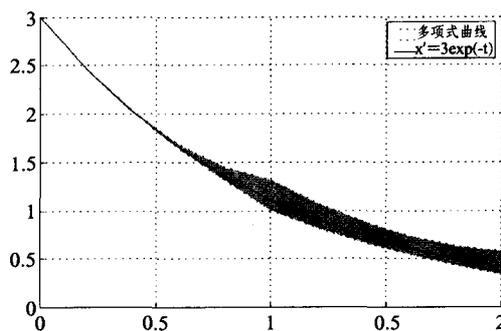


图 3 模态 off 的近似动态轨迹

结束语 本文将线性 phase-portrait 近似推广到多项式 phase-portrait 近似, 叙述了如何自动构造混合自动机的多项式 phase-portrait 近似, 及如何精细化近似模型。本文所基于的模型其向量场形式限于 $\dot{x}_i = \varphi(X), \varphi(X) \in poly(X)$ 。对于更一般的形式, 在以后的文章中进行进一步的研究。另外, 在做抽象精细化时, 如何消除累积误差也是今后的研究方向。

参考文献

- [1] Alur R, Courcoubetis C, Halbwachs N, et al. The algorithmic analysis of hybrid systems. Theoretical Computer Science, 1995, 13: 3-34
- [2] Henzinger P, Ho H, Wong-Toi H. Algorithmic analysis of nonlinear hybrid systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43: 540-554
- [3] Franzle M. Analysis of hybrid systems: An ounce of realism can save infinity of states // Proceedings of Computer Science Logic. LNCS, 1999, 1683: 126-140
- [4] Tiwari A, Khanna G. Series of abstractions for hybrid automata // Tomlin C, Greenstreet M R, eds. HSCC, LNCS, 2002, 2289: 465-478
- [5] Henzinger T A, Kopke P W, Puri A, et al. What's decidable about hybrid automata? Journal of Computer and System Sciences, 1998, 57: 94-124
- [6] Lanotte R, Tini S. Taylor Approximation for Hybrid Systems // Tomlin C, Greenstreet M R, eds. HSCC, LNCS, 2005, 3414: 402-416
- [7] Chutinan A, Krogh B H. Verification of polyhedral-invariant hybrid automata using polygonal flow pipe approximation // Morari M, Thiele L, eds. HSCC, LNCS, 1999, 1569: 76-90

(上接第 168 页)

从表 1 可以看出, 对于 German Credit Data 取相同的参数, 三种核函数下该算法的分类精度均有不同程度的提高, 且训练时间明显降低! 实验中还发现, 取相同的核参数, 三种核函数下的分类精度均对惩罚参数 C 的变化不敏感。这说明算法有效剔除并降低了噪声对分类的影响!

结束语 针对传统支持向量机分类对噪声与野值敏感的问题, 本文提出基于近邻域比率的支持向量机 NDR-SVM。通过近邻域中与中心同类的样本比率与剔除阈值的大小关系决定邻域中心的取舍, 并用支持向量机对修剪后的训练集进行学习。由于球心与半径均由算法自身确定, 近邻域客观反映了数据分布。通过设定合适的剔除因子 $\beta (0 < \beta \leq 1)$, 该方法能够有效剔除影响分类性能的噪声和野值。仿真实验验证了该方法的可行性和有效性, 但剔除因子 β 的设定是关键。下一步的工作是, 如何根据具体问题给出剔除因子的一个合适取值。

参考文献

- [1] Vapnik V. The nature of statistical learning theory [M]. Springer-Verlag, 1995
- [2] Amaris S, Wu S. Improving support machine classifier by modifying kernel function [J]. Neural Networks, 1999, 12: 783-789
- [3] Burges C J C. A tutorial on support vector machines for pattern recognition [J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 1998, 2(2): 121-167
- [4] Guyon I, Maticn, Vladmrvapnik. Discovering Information Patterns and Data Cleaning [M]. Cambridge, MA MIT Press, 1996: 181-203
- [5] Zhang X G. Using Class-center Vectors to Build Support Vector Machines [Z] // Proc. IEEE NNSP' 99. Wisconsin, USA, 1999: 3-11
- [6] 李红莲, 王春花, 袁保宗. 一种改进的支持向量机 NN-SVM. 计算机学报, 2003, 26(8): 1015-1020
- [7] Cover T M, Hart P E. Nearest neighbor pattern classification [J]. In Trans IEEE Inform Theory, 1967, TT-13: 21-27