

基于动态基线倾角与基线距离最大化的凸壳并行新算法

周启海^{1,2} 黄涛^{1,2} 林珣^{1,2} 李忠俊^{1,2}

(西南财经大学信息技术应用研究所 成都 610074)¹ (西南财经大学经济信息工程学院 成都 610074)²

摘要 本文根据同构化凸壳构造基本定理,整合了“动态基线倾角最大化”凸壳并行算法思想与“动态基线距离最大化围绕凸壳”凸壳串行算法思想的各自优点,并对后者施以多域化扩展与并行化改造,从而提出效率更高的基于动态基线倾角与动态基线距离最大化的凸壳并行新算法。该凸壳并行新算法的特点是:1) 其机群分为4个子机群,其数据分布域分为4个子分布域,其各子分布域内凸壳顶点的围绕寻找方向共有4个,即各子分布域均各由自己的逆时针寻找方向;2) 对各子分布域的当前动态基线,均并行地找出其当前动态基线倾角最大点与当前动态基线距离最大点,并作为其各子分布域内凸壳的新顶点。

关键词 同构化,机群,凸壳,并行算法,动态基线倾角,动态基线距离

A New Parallel Algorithm for Finding Convex Hull Based on Maximum Pitch and Distance of the Dynamical Base Line

ZHOU Qi-Hai^{1,2} HUANG Tao^{1,2} LIN Xun^{1,2} LI Zhong-Jun^{1,2}

(Research Institute of Information Technology Application, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074)¹

(School of Economic Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074)²

Abstract In this paper, the advantages of both “the parallel algorithm thinking for finding convex hull based on maximum pitch of the dynamical base line” and “the serial algorithm thinking for finding convex hull based on maximum distance of the dynamical base line” are integrated, and the later is extended in multi-domains and is modified in parallel, further a more efficient new parallel algorithm to find a convex hull based on maximum pitch and distance of the dynamical base line is given. The general characters of this new parallel algorithm are: 1) its COW is combined with four sub-clusters, its domain is divided into four sub-domains, its seeking directions of coiling are four, which the seeking directions of coiling with a maximum pitch of the dynamical base line in every sub-domain is along with one way (anti clockwise direction) of itself separately; 2) parallel find out the maximum pitch and the maximum distance for their current dynamical base line in every sub-domain separately.

Keywords Isomorphic, COW, Convex hull, Parallel algorithm, Pitch of the dynamical base line, Distance of the dynamical base line

1 引言

始于20世纪70年代、盛于80年代、巅于90年代、滞于21世纪的二维点集凸壳(含线段集凸壳,以下简称凸壳,Convex hull)算法研究,迄今已近40年,已久无新进展。凸壳所具有的问题复杂性与应用重要性,引不少国内外专家学者竞相关注和研究凸壳算法,有不少文献论及凸壳算法改进和提高^[1,2]。1996~1997年间,C. Bradford Barber、David P. Dobkin和Hannu Huhdanpaa提出的快凸壳算法(The Quick hull algorithm for convex hulls)^[3],堪称当时凸壳算法研究成果之巅峰,本文概括其算法思想精华为“动态基线距离最大化”。但总体上,这些凸壳算法效率往往还不够高(例如:不少并行凸壳算法,也多基于串行改造,且常采用递归方法),仍尚待进一步提高。为此,作者自2005年起潜心研究凸壳算法,并根据周启海教授提出的同构化凸壳构造基本定理^[1],陆续提出若干凸壳新算法^[4~10]。本文利用文^[10]所述凸壳并行算法^[10]的“动态基线倾角最大化”算法思想,融合快凸壳算法^[3]的“动态基线距离最大化”算法思想,并对后者施行多域化扩展与并行化改造,提出效率更高的基于动态基线倾角与

动态基线距离最大化围绕的凸壳并行新算法。

2 二维凸壳问题与凸壳算法简述

定义1 设多边形 Q 的顶点是给定平面内的点 $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2), \dots, Q_n(x_n, y_n)$ 。如果线段 $Q_i Q_j (i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ 总不在多边形 Q 外,则称 Q 为凸多边形。设二维点集 $S = \{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ 由给定平面内的点构成。如果凸多边形 Q 顶点 $Q_i \in S$,且 Q 是可覆盖 S 中各点的最小凸多边形,则称凸多边形 Q 为二维点集 S 的凸壳。如何寻求给定二维点集 $S = \{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ 的二维凸壳,称为二维凸壳问题。凡能构造性生成给定二维点集 $S = \{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq m \geq 3\}$ 的二维凸壳的算法,统称为二维凸壳生成算法。

凸壳问题的几何原型,可通俗简单而形象地说明如图1所示。设 $1 \leq i \leq m, 3 \leq m < +\infty$,对木板上的有限点集 S 中各点 $P_i(x_i, y_i)$ 处,分别各钉一个图钉,再用一条橡皮带从该点集的外沿去围绕一圈这些图钉。显然有:首先,被缠紧的橡皮带圈必定构成一个凸多边形 Q ;其次,所有图钉总不会出现在该橡皮带圈(即:所得凸多边形 Q)所围成的区域之外。

周启海 教授,博(硕)士生导师,主要研究方向:计算几何,算法研究与应用,财经计算,同构化信息处理等;黄涛 讲师,主要研究方向:计算机应用;林珣 讲师,主要研究方向:计算机应用;李忠俊 讲师,主要研究方向:电子商务等。



A) 木版上各点处各钉一个图钉: B) 外围缠绕各图钉所得橡皮带围:
二维点集 S 凸壳 Q

图 1 凸壳问题几何原型的形象说明示意图

3 凸壳算法改进和优化的同构化方向与捷径

在文[1]中,作者提出并阐明了下述同构化凸壳构造基本定理。

同构化凸壳构造基本定理 记二维点集 $S = \{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq m, 3 \leq m < +\infty\}$, 凸多边形 Q 的顶点集为 $R = \{Q_k(x_k, y_k) \mid 1 \leq k \leq n \leq m < +\infty, 3 \leq n, 3 \leq m\}$ 。如果凸多边形 Q 是二维点集 S 的凸壳, 则有:

i. (顶点对内点的)凸壳内点无关性定理 凸壳 Q 的所有顶点 $Q_i(x_i, y_i)$ 必不在 S 与 R 的余集中, 即 $Q_i(x_i, y_i) \notin S - R, 1 \leq i \leq n \leq m < +\infty, 3 \leq n, 3 \leq m$ 。

ii. (顶点对顶点的)凸壳顶点独立性定理 凸壳 Q 的任一顶点 $Q_k(x_k, y_k)$ 必不在 R 与 $\{Q_k\}$ 的余集中, 即 $Q_k(x_k, y_k) \notin R - \{Q_k\}, 1 \leq k \leq n \leq m < +\infty, 3 \leq n$ 。

基于同构化凸壳构造基本定理, 作者认为凸壳生成算法改进与优化的同构化方向是:

第一、根据凸壳内点无关性定理, 应一方面使凸壳顶点分布域极小化, 即让包含凸壳顶点的判定区域尽可能小, 以大大减少凸壳顶点判定时的无效处理量; 另一方面使顶点判定对象直接化, 即让所判定对象尽可能接近当前所寻顶点, 以大幅提高凸壳顶点判定对象的直接针对性。

第二、根据凸壳顶点独立性定理, 一方面可从不同初始对象出发, 来改进和优化串行凸壳新算法; 另一方面可对不同视角对象处理, 来改造和创造并行凸壳新算法。

因此, 在生成凸壳过程中, 应尽力缩小顶点的可能分布域——在尽可能小的分布域内, 尽可能快地直接找出并只找出其各个顶点(即凸壳各条边的各端点)的凸壳算法; 进而, 再对有潜力的优秀串行凸壳新算法施以并行化改造与创新。无疑, 这必定是今后进一步提高凸壳算法效率的主要捷径。

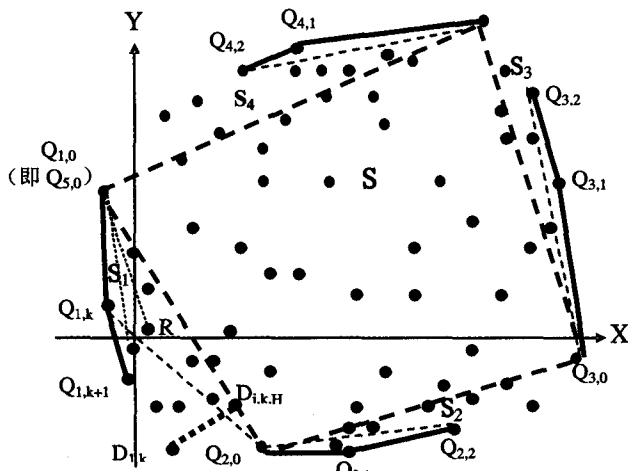


图 2 凸壳的各子分布域、初始顶点、动态基线倾角示意图

4 凸壳新算法技术关键与核心基础的数学证明

本文提出的基于动态基线倾角与动态基线距离最大化围绕凸壳并行新算法, 其技术关键与核心基础是凸壳的动态基线倾角最大点与动态基线距离最大点必均定为凸壳顶点。

定义 2 二维点集 $S = \{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq m, 3 \leq m < +\infty\}$ 中各点的位置分布区域, 称为 S 分布域。其 X 轴、 Y 轴坐标值最大、最小的四个最外点分别记为 $Q_{1,0}(x_1 = \min\{x_i \mid 1 \leq i \leq m, 3 \leq m < +\infty\}, y_1), Q_{2,0}(x_2, y_2 = \min\{y_i \mid 1 \leq i \leq m, 3 \leq m < +\infty\}), Q_{3,0}(x_3 = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq m, 3 \leq m < +\infty\}, y_3), Q_{4,0}(x_4, y_4 = \max\{y_i \mid 1 \leq i \leq m, 3 \leq m < +\infty\})$, 合称为二维点集 S 的凸壳 Q 的初始顶点, 其中 $Q_{1,0}$ 可另记为 $Q_{5,0}$ 。凸壳 Q 的初始顶点线段 $Q_{1,0}Q_{3,0}, Q_{2,0}Q_{4,0}$ 均称为凸壳 Q 的直径; 以凸壳直径为对角线的四边形 $Q_{1,0}Q_{2,0}Q_{3,0}Q_{4,0}$ (注意: 它可能退化为三角形 $Q_{1,0}Q_{2,0}Q_{3,0}$), 把二维点集 S 中的非四边形 $Q_{1,0}Q_{2,0}Q_{3,0}Q_{4,0}$ 内部点的所有点, 沿逆时针分划为四个子分布域 $S_i, i=1, 2, 3, 4$ 。凸壳 Q 初始顶点线段 $Q_{1,0}Q_{2,0}, Q_{2,0}Q_{3,0}, Q_{3,0}Q_{4,0}, Q_{4,0}Q_{1,0}$, 均称为凸壳 Q 的初始动态基线。为叙述简便, 初始顶点 $Q_{i+1,0}$ 还可另记为 $Q_{i,-1}, i=1, 2, 3, 4$ 。在子分布域 S_i 中: 若点 $Q_{i,k}$ 是二维点集 S 凸壳 Q 的顶点, 点 $R \in S_i, 1 \leq i \leq 4, 0 \leq k$; 则线段 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 称为子分布域 S_i 的动态基线, 夹角 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R$ 称为点 R 的动态基线倾角。若点 $D_{i,k} \in S_i, D_{i,k,H}$ 是点 $D_{i,k}$ 到动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的垂足, 则称垂线 $D_{i,k}D_{i,k,H}$ 为点 $D_{i,k}$ 到动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的距离(如图 2、图 3 所示)。

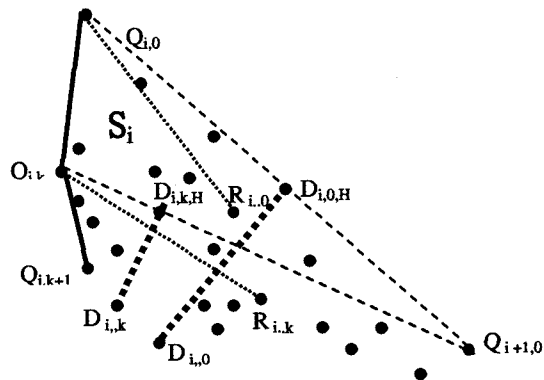


图 3 子分布域 S_i 的动态基线倾角与动态基线距离示意图

定理 1 若点 $R \in$ 子分布域 $S_i, 1 \leq i \leq 4, 0 \leq k$, 能使动态基线倾角 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R = \max\{\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}X \mid X \in S_i\}$, 则当前动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的最大倾角点 R (注: 若有多个最大倾角点, 则只取当前最大倾角顶点 $Q_{i,k}$ 最远的那个最大倾角点) 必为 S_i 的子凸壳 Q_{S_i} 的下一紧邻顶点。

定理 1 可用同一法证明如下: 假设子凸壳 Q_{S_i} 的当前动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的最大倾角顶点 $Q_{i,k}$ (注意: 它就是凸壳 Q_{S_i} 的当前顶点) 的下一紧邻顶点为 $P \in$ 子分布域 S_i , 故根据同构化凸壳构造基本定理, 凸壳 Q_{S_i} 的 $Q_{i,k}P$ 边外必无任何点 $X \in$ 子分布域 S_i , 而当前动态基线最大倾角点 $R \in$ 子分布域 S_i 必位于 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}P$ 内部或其边, 且必有 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}P \geq \angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R$ 。但已知 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R = \max\{\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}X \mid X \in S_i\}$, 而 $P \in S_i$, 故必有 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R \geq \angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}P$, 从而有 $\angle Q_{i,k}Q_{i,k-1}R = \angle Q_{i,k}Q_{i,k-1}P$, 即 R 和 P 必同在当前动态基线最大倾角的边 $Q_{i,k}R$ 上。一方面, 因 P 为最大倾角的边 $Q_{i,k}R$ 上一点, 而“若有多个当前动态基线的最大倾角点 R , 则

只取离当前最大倾角顶点 $Q_{i,k}$ 最远的那个最大倾角点”，故必有 $Q_{i,k}P < Q_{i,k}R$ ；另一方面，因 P 为凸壳的顶点，而“凸壳边 $Q_{i,k}P$ 上任一点 G (包括点 R) 离顶点 $Q_{i,k}$ 的距离 $Q_{i,k}G$ ，总满足 $Q_{i,k}R < Q_{i,k}P$ 。这说明，当前动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的最大倾角点 R 与当前动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的下一紧邻顶点 P ，必然重合。因此，定理 1 成立。

推论 1 若点 $R \in$ 子分布域 $S_i, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq k$ ，初始动态基线倾角 $\angle Q_{i+1,0}Q_{i,0}R = \max\{\angle Q_{i+1,0}Q_{i,0}X \mid X \in S_i\}$ ，而其它动态基线倾角 $\angle Q_{i,0}Q_{i,k}R = \max\{\angle Q_{i,0}Q_{i,k}X \mid X \in S_i\}$ ；则其初始动态基线 $Q_{i,0}Q_{i+1,0}$ 的最大倾角点 R (注：若有多个最大倾角点，则只取离当前最大倾角顶点 $Q_{i,k}$ 最远的那个最大倾角点，下类同) 与其它动态基线 $Q_{i,0}Q_{i,k}$ 的最大倾角点 R 必为 S_i 的子凸壳 Q_S 的下一紧邻顶点。

推论 1 可证明如下：1) 定理 1 中，当 $k=0$ 时，其动态基线倾角 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R$ 显然就是推论 1 的初始动态基线倾角 $\angle Q_{i+1,0}Q_{i,0}R$ (因为 $Q_{i+1,0}$ 可同时表示为 $Q_{i,-1}$)；故根据定理 1 可知，推论 1 对其初始动态基线倾角 $\angle Q_{i+1,0}Q_{i,0}R$ 显然成立。2) 定理 1 中，当 $k>0$ 时，其 k 可视为推论 1 的 k 。此时，定理 1 中的动态基线倾角 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R = \max\{\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}X \mid X \in S_i\}$ ，而 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R = \angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}Q_{i,0} + \angle Q_{i,0}Q_{i,k}R$ ，故 $\angle Q_{i,0}Q_{i,k}R = \angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}R - \angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}Q_{i,0} = \max\{\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}X - \angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}Q_{i,0} \mid X \in S_i\}$ 。考虑到 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}Q_{i,0}$ 为相对于 $\angle Q_{i,k-1}Q_{i,k}X$ 的常量，故根据定理 1 可知，推论 1 对其它动态基线倾角 $\angle Q_{i+1,0}Q_{i,0}R$ 也成立。因此，推论 1 成立。

定理 2 若点 $D_{i,k} \in$ 子分布域 S_i ，能使点 $D_{i,k}$ 到动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的距离 $D_{i,k}D_{i,k,H} = \max\{X_{i,k}X_{i,k,H} \mid X_{i,k} \in S_i\}$ ，则点 $D_{i,k}$ (注：若有多个最大距离点，则这些最大距离点共线，故只取离当前次新顶点 $Q_{i,k}$ 最近、最远的那两个端点——最大动态基线距离点，且两者均) 必为子凸壳 Q_S 的顶点。

定理 2 可证明如下：由于点 $D_{i,k}$ 到动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的距离 $D_{i,k}D_{i,k,H} = \max\{X_{i,k}X_{i,k,H} \mid X_{i,k} \in S_i\}$ ，故子分布域 S_i 子凸壳 Q_S 的各顶点，必在动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 与“过点 $D_{i,k}$ 而平行于动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 的平行线”间带状区域内。显然：1) 如果动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 最外侧只有一个动态基线距离最大点 $D_{i,k}$ ，则点 $D_{i,k}$ 必高踞于动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 最外侧的所有点之上，故根据同构化凸壳构造基本定理，动态基线距离最大点 $D_{i,k}$ 必为子分布域 S_i 的子凸壳 Q_S 的一个顶点；2) 如果动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 最外侧不止一个动态基线距离最大点 $D_{i,k}$ ，即至少还有一个动态基线距离最大点 $D'_{i,k}$ ，但由已知条件“若有多个最大距离点，则这些最大距离点共线 (注意：除此最大距离线段两端点外，其余各点均为子凸壳 Q_S 的内点)”，故只取离当前次新顶点 $Q_{i,k}$ 最近、最远的那两个端点——最大动态基线距离点”，可知至多有两个动态基线距离最大点 $D_{i,k}, D'_{i,k}$ ，且只有这两点 $D_{i,k}, D'_{i,k}$ 必高踞于动态基线 $Q_{i,k-1}Q_{i,k}$ 最外侧的所有点之上，故根据同构化凸壳构造基本定理，动态基线距离最大点 $D_{i,k}, D'_{i,k}$ 必为子分布域 S_i 的子凸壳 Q_S 的两个顶点。因此，定理 2 成立。

5 凸壳动态基线倾角与动态基线距离最大化并行新算法描述

据此，笔者依据同构化凸壳构造基本定理，构造出效率更高的基于机群 COW 的动态基线倾角与动态基线距离最大化围绕凸壳并行新算法。其主要算法思想，可简要概述如下 (如图 1 所示)：

第 0 步：并行初始化处理。

(1)“寻找二维点集 S 的分布域 (仍记为 S) 的 X 轴、 Y 轴坐标值最大、最小的 4 个最外点”的 4 群并行处理：

1) 设定 (注：可由用户自行决定并输入) 初始分布域 $S = \{P_k(x_k, y_k) \mid 1 \leq k \leq m \geq 3\}$ 中各点的 X 轴坐标取值的最大、最小可能值分别为 X_{max}, X_{min} ， Y 轴坐标取值的最大、最小可能值分别为 Y_{max}, Y_{min} 。

2) 分别标记构成所论机群 COW 的 4 个子机群为 COW_i ($i=1, 2, 3, 4$)；标记子机群 COW_i 下属各处理机的总数为 n_i ；标记子机群 COW_i 下属各处理机为 $P_{i,j}$ ($1 \leq j \leq n_i$)。

3) 并行地使子机群 COW_i 下属各处理机 $P_{i,j}$ ($i=1, 2, 3, 4, 1 \leq j \leq n_i$)，各用初始分布域 S 的 X 轴坐标可能值初始值域 $[X_{min}, X_{max}]$ 的初始带宽 $W_S = (X_{max} - X_{min}) / (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$ ，对初始分布域 S 作带状划分出子分布域 $S_{i,j}$ ，并各自保存所获得的初始子分布域 $S_{i,j}$ 内各点；然后各对初始子分布域 $S_{i,j}$ ：

① 如果初始子分布域 $S_{i,j}$ 非空，则使其处理机 $P_{i,j}$ 在自己初始子分布域 $S_{i,j}$ 内，并行找各自的 X 轴、 Y 轴坐标值最大、最小的 4 个最外点 ($x_{i,j,max} = \max\{x \mid (x, y) \in S_{i,j}\}, y_{右,i,j}$)、($x_{i,j,min} = \min\{x \mid (x, y) \in S_{i,j}\}, y_{左,i,j}$)、($x_{高,i,j}, y_{i,j,max} = \max\{y \mid (x, y) \in S_{i,j}\}$)、($x_{低,i,j}, y_{i,j,min} = \min\{y \mid (x, y) \in S_{i,j}\}$)；

② 从各处理机 $P_{i,j}$ 所得的各初始子分布域 $S_{i,j}$ ($1 \leq j \leq n_i$) 的全部最右点集 $R_{ight} = \{(x_{i,j,max}, y_{右,i,j}) \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ 、全部最左点集 $L_{eft} = \{(x_{i,j,min}, y_{左,i,j}) \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ 、全部最高点集 $H_{igh} = \{(x_{高,i,j}, y_{i,j,max}) \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ 、全部最低点集 $L_{ow} = \{(x_{低,i,j}, y_{i,j,min}) \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ 中，并行找出各初始子分布域 S_i 的 4 个最外点：最右点 ($x_{i,max} = \max\{x \mid (x, y) \in R_{ight}\}, y_{右,i}$)、最左点 ($x_{i,min} = \min\{x \mid (x, y) \in L_{eft}\}, y_{左,i}$)、最高点 ($x_{高,i}, y_{i,max} = \max\{y \mid (x, y) \in H_{igh}\}$)、最低点 ($x_{低,i}, y_{i,min} = \min\{y \mid (x, y) \in L_{ow}\}$)；

③ 从各子机群 COW_i ($1 \leq i \leq 4$) 的全部最外点集 $\{(x_{i,max}, y_{右,i}) \mid 1 \leq i \leq 4\}, \{(x_{i,min}, y_{左,i}) \mid 1 \leq i \leq 4\}, \{(x_{高,i}, y_{i,max}) \mid 1 \leq i \leq 4\}, \{(x_{低,i}, y_{i,min}) \mid 1 \leq i \leq 4\}$ 中，分别找出初始子分布域 S 的 4 个 (注意：它可能退化为 3 个) 最外点，作为并标记为二维点集 S 的凸壳 Q 的初始顶点 $Q_{1,0}(x_{min,1}, y_{0,min,1})$ 、 $Q_{2,0}(x_{0,min,2}, y_{min,2})$ 、 $Q_{1,0}(x_{max,3}, y_{0,max,3})$ 、 $Q_{1,0}(x_{0,max,4}, y_{max,4})$ ；其中，初始顶点 $Q_{1,0}(x_{min,1}, y_{0,min,1})$ 也可另记为 $Q_{5,0}(x_{min,5}, y_{0,min,5})$ ，以便叙述简洁。

4) 各子机群 COW_i ($1 \leq i \leq 4$) 并行地从分布域 S 中删除其最外点四边形 $Q_{1,0}Q_{2,0}Q_{3,0}Q_{4,0}$ 的所有点 (注：它除 4 个顶点外，其余各点均为凸壳 Q 的内点)，所剩分布域仍记为 S 。

(2)“构造分布域 S 的 4 个子分布域 S_1, S_2, S_3, S_4 (注意：它可能退化为 3 个子分布域 S_1, S_2, S_3)”的 4 群并行处理：

1) 各子机群 COW_i ($1 \leq i \leq 4$) 并行地对初始分布域 S ，按照实际值初始值域 $[x_{min,3}, x_{max,1}]$ 的实际带宽 $W_S = (x_{max,3} - x_{min,1}) / (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$ ，带状划分出子分布域 $S_{i,j}$ 。

2) 并行地分别使子机群 COW_i ($1 \leq i \leq 4$)，以由初始顶点 $Q_{1,0}, Q_{2,0}$ 构成的各自初始分布域 S_i 的动态基线 $Q_{i,0}Q_{i+1,0}$ 为分界判据，把“点 $P(x, y) \in S$ ，且与最外点四边形 $Q_{1,0}Q_{2,0}Q_{3,0}Q_{4,0}$ 位于动态基线 $Q_{i,0}Q_{i+1,0}$ 不同侧”的所有点，保存为供后续并行处理的二维点集 S 分布域的子分布域 S_i (注意： $S_1 = S_5$)，并删除位于最外点四边形 $Q_{1,0}Q_{2,0}Q_{3,0}Q_{4,0}$ 中的所有内点。

第1步：“子机群 $COW_i (1 \leq i \leq 4)$ 分别在子分布域 S_i 中生成子凸壳 Q_i 各顶点”的并行化处理。

第1-1步 子机群 COW_i 在子分布域 S_i 中,进行动态基线倾角(逆时针方向;下同,略)最大化与动态基线距离最大化的围绕寻找子凸壳 Q_i 各动态基线倾角最大点与动态基线距离最大点的并行处理。

第1-1-1步 “子机群 COW_i 动态基线倾角最大化围绕寻找子凸壳 Q_i 下一新顶点”的并行处理:

第1-1-1-1步 初始子分布域 S_i 仍标记为当前子分布域 S_i ;连接初始顶点 $Q_{i,0}, Q_{i+1,0}$ 构成当前动态基线 $Q_{i,0}Q_{i+1,0}$;置当前动态基线倾角最大新顶点的序号计数器 r 初值为 0;置当前动态基线距离最大新顶点的序号计数器 d 初值为 0。

第1-1-1-2步 并行地使子机群 COW_i 下属各处理机 $P_{i,j} (1 \leq j \leq n_i)$,用带宽 $W_i = (\max\{x \mid (x, y) \in S_i\} - \min\{x \mid (x, y) \in S_i\}) / n_i$,把当前子分布域 S_i 带状划分为 n_i 个子分布域 $S_{i,j} (1 \leq j \leq n_i)$ 。

第1-1-1-3步 并行地使子机群 COW_i 下属各处理机 $P_{i,j}$ 各在自己的子分布域 $S_{i,j} (1 \leq j \leq n_i)$ 的全部点中,均以 $Q_{i,k}$ 为子凸壳 Q_i 的次新顶点,求出其对动态基线 $Q_{i,k}Q_{i,0}$ 的动态基线倾角最大点 $R_{i,j,0}$ (注:若有多个最大倾角点,则只取距当前次新倾角顶点最远处的那个最大倾角点,即离当前最大倾角顶点 $Q_{i,k}$ 最远的那个最大倾角点),并同时求出对动态基线 $Q_{i,k}Q_{i,0}$ 的动态基线距离最大点 $D_{i,j,0}$ (注:若有多个最大距离点,则只取离当前次新顶点 $Q_{i,k}$ 最近、最远的那两个最大距离点);在所得各组动态基线倾角最大点集 $\{R_{i,j,0} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ 中,并行找出当前子分布域 S_i 的动态基线倾角最大点 R ,并标记为子凸壳 Q_i 的最新顶点 $Q_{i,k+1}$,置序号计数器 k 为 $k+1$;同时,在所得各组动态基线距离最大点集 $\{D_{i,j,0} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ 中,并行找出当前子分布域 S_i 的动态基线距离最大点:若“只有一个当前动态基线距离最大点 $D_{i,D1}$,且不同于当前动态基线倾角最大点 R ”或“虽有两个当前动态基线距离最大点 $D_{i,D1}, D_{i,D2}$,但点 $D_{i,D2}$ 同于当前动态基线倾角最大点 R ”,则标记 $D_{i,D1}$ 为子凸壳 Q_i 的另一最新顶点 $Q_{i,d+1}$,置序号计数器 d 为 $d+1$;否则,(即有两个当前动态基线距离最大点 $D_{i,D1}, D_{i,D2}$,且均不同于当前动态基线倾角最大点 R),标记 $D_{i,D1}, D_{i,D2}$ 为子凸壳 Q_i 的两个最新顶点 $Q_{i,d+1}, Q_{i,d+2}$,置序号计数器 d 为 $d+2$;

第1-1-2步 “删除由子凸壳 Q_i 的初始顶点 $Q_{i,0}, Q_{i+1,0}$,当前动态基线倾角最大次新顶点 $Q_{i,k}$ 、动态基线倾角最大最新顶点 $Q_{i,k+1}$,与当前动态基线距离最大新顶点 $Q_{i,D1}$ (或者 $Q_{i,D1}, Q_{i,D2}$)所构成的多边形 $Q_{i,0}Q_{i,k}Q_{i,D1}Q_{i+1,0}$ (或者多边形 $Q_{i,0}Q_{i,k}Q_{i,D1}Q_{i,D2}Q_{i+1,0}$;两者以下简称待删内点多边形)的所有点”的子分布域 S_i 极小化并行处理:

第1-1-2-1步 并行地使子机群 COW_i 下属各处理机 $P_{i,j}$ 各自生成自己的待删内点多边形,并记为 Δ_i 。

第1-1-2-2步 并行地使子机群 COW_i 下属各处理机 $P_{i,j} (1 \leq j \leq n_i)$,用带宽 $W_i = (\max\{x \mid (x, y) \in \Delta_i\} - \min\{x \mid (x, y) \in \Delta_i\}) / n_i$,把当前 Δ_i 带状划分为 n_i 个子分布域 $\Delta_{i,j} (1 \leq j \leq n_i)$ 。

第1-1-2-3步 并行地使子机群 COW_i 下属各处理机 $P_{i,j}$

$(1 \leq j \leq n_i)$,各自删除在自己的子区域 $\Delta_{i,j} (1 \leq j \leq n_i)$ 中的全部点。

第1-1-2-4步 把删除 Δ_i 中全部点后的原子分布域 S_i ,仍标记为当前子分布域 S_i ;若当前子分布域 S_i 非空(即还有未找出的凸壳顶点),则把子凸壳 Q_i 的初始顶点 $Q_{i,0}$ 、最新顶点 $Q_{i,k}$ 记为新的动态基线 $Q_{i,0}Q_{i,k}$,回到第1-1-1-2步,否则转而执行第1-1-3步。

第1-1-3步 子凸壳 Q_i 的全部顶点标记处理:顺次标记已求得子凸壳 Q_i 全部顶点。

最后步:形成凸壳处理。顺序把各子分布域 S_1, S_2, S_3, S_4 中所得各顶点,依次两两连接而得到的凸多边形 Q ,必定是所求二维有限点集 S 的凸壳 Q 。

结论 显而易见:本文提出的基于4群4域4向的动态基线倾角与动态基线距离最大化围绕凸壳并行新算法,实现了机群的多子群化(故其处理机个数倍增),分布域的多子域化(故其子分布域更加小域化),每次找出凸壳顶点个数的多个化(故其凸壳顶点寻找时间更为缩短);从而,一方面可并行地求得基线距离最大点,使各机群不仅可更快、更多地找出凸壳顶点;另一方面能时间更早、面积更大地删除多边形中内点,可更多、更快地缩小凸壳顶点的当前分布域,从而大大减少本新算法的计算时间。因此,该算法可进一步改进和提高其算法效率,且更易于推广到基于机群的 m 群、 n 域、 p 向 ($m > 2, n > 2, p > 2$) 的凸壳并行新算法研究;它将有效提高二维凸壳生成速度,可进一步改进和提高二维凸壳在图像处理、文字分解、模式识别、物体分类、计算图形、指纹识别、遥测遥控、地物辨识、地质勘探、空天利用等的应用水平和工作效率。

参考文献

- 1 周启海. 论二维点集或线段集凸壳生成算法改进与优化的同构化方向[J]. 计算机科学, 2007(7)
- 2 周启海. 简论二维点集凸壳研究的意义、现状与创新[C]. 见: 第三届全国几何设计与计算学术会议论文集. 北京: 电子工业出版社, 2007
- 3 Barber C, Dobkin D, Huhdanpaa H. The Quick hull algorithm for convex hulls[J]. ACM Trans. on Mathematical Software, 1997, 22: 469~483
- 4 周启海, 杨祥茂, 吴红玉. 单域单向水平倾角最小化围绕凸壳新算法[J]. 西华大学学报(自科版), 2006(2)
- 5 周启海, 黄涛, 吴红玉, 张元新. 基于最大基线倾角智能逼近的凸壳新算法[J]. 计算机科学, 2007(9)
- 6 周启海, 吴红玉, 黄涛. 单域双向水平倾角最小化围绕凸壳新算法[J]. 计算机科学, 2007(8)
- 7 黄涛, 周启海. 双域单向水平倾角最小化围绕凸壳新算法[J]. 计算机科学, 2007(12)
- 8 黄涛, 周启海, 吴红玉. 双域双向水平倾角最小化围绕凸壳新算法[J]. 计算机科学, 2008(2)
- 9 周启海, 黄涛. 基于双群双域四向水平倾角最小化围绕的凸壳并行新算法[J]. 计算机科学, 2008(2)
- 10 周启海, 黄涛. 基于四群四域四向动态基线倾角最大化围绕凸壳并行新算法[J]. 计算机科学, 2008(3)