

基于等腰归一化距离的模糊粒度空间研究*

唐旭清^{1,2} 朱平² 程家兴¹

(安徽大学国家教育部智能计算与信号处理重点实验室 合肥 230039)¹

(江南大学理学院 无锡 214122)²

摘要 本文将等腰归一化距离引入到模糊商空间中,提出了基于等腰归一化距离的模糊粒度空间理论。研究了它的结构和性质,并得到了四个重要结论。首先,下面3个叙述是等价的(定理3.2): (1) 给定 X 上的一个模糊等价关系; (2) 给定 X 上的一个等腰归一化距离; (3) 给定 X 上的一个分层递阶结构(或有序的粒度空间)。其次,讨论了等腰归一化距离与 Fuzzy 等价关系间相互确定的对应关系,且都是一对多的关系(定理2.2,定理2.3)。最后,给出了通过 X 上的模糊等价关系 R 诱导的等腰归一化距离 d 确定其引导的粒度上的度量 d_λ ,且 d_λ 正好是 d 在粒度 $X(\lambda)$ 上压缩的等腰归一化距离(定理4.1),同时给出了确定粒度空间上等腰归一化距离的方法。这些研究结论为模糊粒度计算的理论研究和应用提供了强有力的数学模型和工具,同时表明模糊商空间的粒度计算可以在等腰归一化距离的范畴内进行,为模糊粒度计算提供了更为直观的几何解释。

关键词 粒度计算, 模糊粒度空间, 等腰归一化距离, 模糊等价关系

Study on Fuzzy Granular Space Based on Normalized Equicrural Metric

TANG Xu-Qing^{1,2} ZHU Ping² CHENG Jia-Xin¹

(Key Lab of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039)¹

(School of Science, Southern Yangtze University, Wuxi 214122)²

Abstract In this paper, by introducing the normalized equicrural metric into fuzzy quotient space theory, the fuzzy granular space theory based on normalized equicrural metric is presented and four main results are obtained. Firstly, the following three statements are equivalent (Theorem 3.2): (1) give a fuzzy equivalence relations set on X ; (2) give a normalized equicrural metric on X ; (3) give an hierarchical structure (or order-complete granular space) on X . Secondly, the correspondence relations between a normalized equicrural metric on X and equivalence relations on universe X are discussed, and they are one-to-many (Theorem 2.2, Theorem 2.3). Finally, for given a fuzzy equivalence relation on X , the metric d on its deriving fuzzy granulation is determined by its deriving metric, where it just is the reducing distance by d on the granulation. These results provide a powerful mathematics model and tool for granular computing and its application, further provide a direct and geometric explain for granular computing, and will help us for deeply understanding the essence of granular procedure.

Keywords Granular computing, Fuzzy granular space, Normalized equicrural metric, Fuzzy equivalence relation

1 引言

粒度计算(GrC)^[1~3]是信息处理的一种全新的概念和计算范式,覆盖了所有有关粒度的理论、方法、技术和工具的研究,主要用于处理不确定的、模糊的、不完整的和海量的信息。粒度计算已经成为人工智能领域研究的热点方向之一^[4]。目前粒度计算理论主要有:

(1)模糊粒度理论。L. A. Zadeh 在文[1~3]提出了人类认知的3个主要概念,即粒度(granulation,包括将全体分解为部分)、组织(organization,包括从部分集成全体)和因果(causation,包括因果的关联),并提出了词粒度计算。在此基础上 Y. Y. Yao 等进行了一系列的研究工作^[5~10],并将其应用于数据挖掘等领域。其工作要点是建立概念间的 IF-

THEN 关系与粒度集合之间的包含关系的联系,并提出了由所有划分构成的格来求解一致分类问题,这些研究为知识挖掘提出了新的方法和视角。

(2)粗糙集理论。波兰学者 Pawlak^[11,12]提出了一个基本假设:人的智能(知识)就是一种分类的能力。在此基础上,他提出了在概念论域 X 中给定一个等价关系 R ,建立了一个知识基 (X, R) ,讨论了一般的概念 x 如何用知识基中的知识来表示,从而创立了粗糙集理论。目前这一理论已被广泛应用于各个领域,特别是在数据挖掘等领域,并获得成功。

(3)商空间理论。这是由我国学者张铃教授和张钹院士在研究问题求解时独立提出来的^[13,14]。他们提出了“人类智能的一个公认的特点:就是人们能够从极不相同的粒度上观察和分析同一问题。人们不仅能在不同粒度的世界上进行问

*)本课题研究得到国家自然科学基金(No. 60475017)、国家基础研究973计划(No. 2004CB318108)、教育部博士点基金(No. 200403057002)和科技部国家科技合作项目(No. 2006DFA22230)资助。唐旭清 副教授,在职博士生,主要研究方向为智能计算、粒度计算、数学建模和生物信息处理;朱平 副教授,主要研究方向为代数理论和方法、生物信息处理和计算机科学;程家兴 教授,博士生导师,主要研究方向为智能计算、最优化理论和方法。

题的求解,而且能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界,往返自如,毫无困难。这种处理不同粒度世界的的能力,正是人类问题求解的强有力的表现”。在此基础上,他们提出了用三元组 (X, f, T) 来描述一个问题,其中 X 是概念论域; $f(\cdot)$ 表示论域上的属性; T 表示论域的结构,它表示论域中各元素间的关系。利用概念 X 上的等价关系 R ,引入概念论域 X 的一个等价类(或概念簇)划分——商空间 $[X]$ (粒度或知识基),不同的等价类就构成了不同的商空间。利用 T 是拓扑结构或半序结构进行不同粒度间关系的研究。从而粒度的计算就转化为研究在给定商空间下的各种等价类之间的关系与转换。对于同一问题,可以采用不同的粒度,通过对不同粒度的分析、推理获取对原问题的求解。商空间理论的“粒度世界模型”建立了一整套理论和相应的算法,并成功应用于启发式搜索和路径规划等^[13,14]。随后,他们又将商空间理论引入到模糊集合论中,提出了模糊商空间理论(粒度计算方法)^[15,16],这为模糊粒度计算提供了强有力的数学模型和工具。

本文在文[13~15]的基础上,将等腰归一化距离引入到模糊商空间中,提出了基于等腰归一化距离的模糊粒度空间计算理论,使粒度的数值计算具有更广泛的适应范围和更为直观的几何解释。结构分析最常用的方法是基于距离。一方面,由距离可以直接产生邻域系,进而可产生拓扑结构;另一方面,两元素间距离的长度也可直接反映两点间的相关程度,即距离越短,它们的相关程度越大,反之也成立。本文研究的内容安排如下:在第2部分研究等腰归一化距离与模糊等价关系间的关系;在第3部分,给出模糊粒度空间的基本概念,研究它的结构和性质;第4部分讨论模糊商空间(或粒度空间)上的度量。

下面引入一些基本概念。

定义 1.1 给定上 X 的一个距离 d ,若满足:

$$(1) \forall x, y \in X, 0 \leq d(x, y) \leq 1$$

$$(2) \forall x, y, z \in X \text{ 在距离序列 } \{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$$

中,任一个值不超过另外两个的最大值,则称 d 为 X 上的一个等腰归一化距离。同时也称(1)为归一化条件,(2)为等腰条件。若 X 上的距离 d 仅满足条件(1),则称 d 是 X 上的归一化距离。

等腰归一化距离的等腰条件显然比距离所要求的满足三角不等式条件要强。事实上, $\forall x, y, z \in X, |d(x, y) - \max\{d(x, z), d(z, y)\}| \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ 。为以后使用方便起见,我们将定义 1.1 改写成下列等价形式。

定义 1.2 给定论域 X ,设 $d: X \times X \rightarrow R^+$,其中 R^+ 表示非负实数集。若满足:

$$(1) \forall x \in X, d(x, x) = 0 \text{ 且 } \forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$$

$$(2) \forall x, y \in X, 0 \leq d(x, y) \leq 1$$

$$(3) \forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$$

(4) $\forall x, y, z \in X$,在序列 $\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$ 中,任一个值不超过另外两个的最大值,则称 d 为 X 上的一个等腰归一化距离。记 X 上所有等腰归一化距离的集合为 $D(X)$ 。

定义 1.3 给定 $R \in F[X \times X]$,其中 $F[X \times X]$ 表示其上所有 Fuzzy 关系,若满足:

$$(1) \forall x \in X, R(x, x) = 1$$

$$(2) \forall x, y \in X, R(x, y) = R(y, x)$$

$$(3) \forall x, y \in X,$$

$$R(x, y) \geq \sup_{z \in X} \{\min\{R(x, z), R(z, y)\}\}$$

则称 R 是 X 上的 Fuzzy 等价关系。

注 1:对复杂系统 X 上的 Fuzzy 等价关系 R ,只要对其进行预处理就可满足:

$$\forall x, y \in X, R(x, y) = 1 \leftrightarrow x = y \quad (1.1)$$

事实上,只需将关系值为 1 的元素合并成一个元素即可。因此,以下仅对满足条件(1.1)的 Fuzzy 等价关系讨论。

定义 1.4 给定 X 上的一个关系 R ,若满足:

$$(1) \forall x \in X, \text{ 都有 } (x, x) \in R$$

$$(2) \forall x, y \in X, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$$

$$(3) \forall x, y, z,$$

$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

则 R 称是 X 上的一个(普通)等价关系。

2 等腰归一化距离与模糊等价关系

定理 2.1 给定论域 X 上的一个等腰归一化距离 $d \in D(X)$ 与给定论域 X 上的一个 Fuzzy 等价关系 R 。

证明:“ \Rightarrow ”设 $d \in D(X)$,定义如下关系 $R: \forall x, y \in X, R(x, y) = 1 - d(x, y)$ 。易知 R 满足自反性和对称性, $0 \leq R(x, y) \leq 1$,且 $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \rightarrow 1 - d(x, y) \geq 1 - \max\{d(x, z), d(z, y)\} = \min\{1 - d(x, z), 1 - d(z, y)\}$,从而 $R(x, y) \geq \min\{R(x, z), R(z, y)\} \rightarrow R(x, y) \geq \sup_{z \in X} \{\min\{R(x, z), R(z, y)\}\}$ 。

从而 R 是 X 上的一个 Fuzzy 等价关系。

“ \Leftarrow ”设 R 是 X 上的一个模糊等价关系,定义如下 $d: \forall x, y \in X, d(x, y) = 1 - R(x, y)$,则显然 d 满足对称性, $x, y \in X, 0 \leq d(x, y) \leq 1$,且

$$(1) \forall x \in X, R(x, x) = 1 \rightarrow d(x, x) = 0, \text{ 且 } \forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \leftrightarrow R(x, y) = 1 \leftrightarrow x = y;$$

$$(2) \text{ 由定义 1.3 知: } \forall x, y \in X, R(x, y) \geq \sup_{z \in X} \{\min\{R(x, z), R(z, y)\}\} \rightarrow R(x, y) \geq \min\{R(x, z), R(z, y)\} \rightarrow 1 - R(x, y) \leq \max\{1 - R(x, z), 1 - R(z, y)\}, \text{ 即 } d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}。 \text{ 同理可证: } d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(z, y)\}, d(z, y) \leq \max\{d(x, y), d(x, z)\}。$$

因此, d 是 X 上的等腰归一化距离。

定理 2.1 说明了给定 X 上的一个 Fuzzy 等价关系与给定 X 上的一个等腰归一化距离是等价的,且从证明可以看出,它们的量值间具有互补关系,但等腰归一化距离比模糊等价关系具有更强的直观(或几何)解释,便于在应用中掌握。我们知道在距离空间中,两元素间的距离的长度可直接反映两元素间的相关程度,即距离越短,它们的相关程度越大,反之也成立。一般地 X 上的等腰归一化距离与 X 上的模糊等价关系有着什么样的对应关系呢?下面我们就来研究这种对应关系。

定理 2.2 设 $d \in D(X)$,给定映射 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,其中 $f(\cdot)$ 是严格单调递增函数,且 $f(1) = 1$,定义 X 上的一个关系 $R: \forall x, y \in X, R(x, y) = f(1 - d(x, y))$,则 R 是 X 上的一个模糊等价关系。

证明:由 $d \in D(X)$,易知 R 满足对称性,且

$$(1) \forall x \in X, d(x, x) = 0 \rightarrow R(x, x) = f(1 - d(x, x)) = 1$$

$$(2) \text{ 由 } d \in D(X), \text{ 则由定理 2.1 的证明知: } 1 - d(x, y) \geq \min\{1 - d(x, z), 1 - d(z, y)\}。 \text{ 而 } f(\cdot) \text{ 是一个严格单调递增函数, 因此有: } f(1 - d(x, y)) \geq \min\{f(1 - d(x, z)), f(1 - d(z, y))\}。$$

$(1-d(z,y))\} \rightarrow R(x,y) \geq \min\{R(x,z), R(z,y)\}$ 。从而 $\forall x,y \in X, R(x,y) \geq \sup_{z \in X} \{\min\{R(x,z), R(z,y)\}\}$ 。

因此 R 是 X 上的一个模糊等价关系。

定义 2.1 在定理 2.2 中,称 R 是由 X 上等腰归一化距离 d 诱导的 X 上的模糊等价关系,而 f 称为相应的诱导映射。

定理 2.3 设 R 是 X 上的一个模糊等价关系,给定映射 $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$,其中 $g(\cdot)$ 是严格单调递增函数,且 $g(0) = 0$,定义 $d: \forall x,y \in X, d(x,y) = g(1-R(x,y))$,则 $d \in D(X)$ 。

证明:因 R 是 X 上的模糊等价关系及由 g 满足的条件易知: $\forall x,y \in X, 0 \leq d(x,y) \leq 1$ 且 d 满足对称性。

(1) $\forall x \in X, R(x,x) = 1 \rightarrow d(x,x) = g(1-R(x,x)) = g(0) = 0$

(2) 因条件知: $\forall x,y \in X, R(x,y) \geq \sup_{z \in X} \{\min\{R(x,z), R(z,y)\}\} \rightarrow R(x,y) \geq \min\{R(x,z), R(z,y)\} \rightarrow 1-R(x,y) \leq \max\{1-R(x,z), 1-R(z,y)\}$,由 $g(\cdot)$ 是单调递增函数可知: $g(1-R(x,y)) \leq \max\{g(1-R(x,z)), g(1-R(z,y))\}$,即 $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$ 。同理可证:

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(z,y)\}$$

$$d(z,y) \leq \max\{d(x,y), d(x,z)\}$$

综合(1),(2), $d \in D(X)$ 。

定义 2.2 在定理 2.3 中,称 d 是由 X 上模糊等价关系 R 诱导的 X 上的等腰归一化距离,而 g 称为相应的诱导映射。

从定理 2.2 可知:由于满足条件的诱导映射 f 有无穷多个,因此由等腰归一化距离 d 可诱导无穷多个 X 上的模糊等价关系;反之,由定理 2.3 也可得到类似的结果。由于定理 2.2 中的诱导映射 f 与定理 2.3 中诱导映射 g 之间不存在必然的联系,因此 X 上的等腰归一化距离与 X 上的模糊等价关系之间都是一个对应无穷多个的关系。

3 模糊商空间的基本概念与性质

定义 3.1 设 R 是 X 上的一个模糊等价关系, $\forall \lambda \in [0,1], R_\lambda$ 表示 R 的截关系(注: R_λ 是一个普通等价关系),即 $R_\lambda = \{(x,y) | R(x,y) \geq \lambda\}$ 。记 R_λ 的等价类 $[x]_\lambda, X(\lambda) = \{[x]_\lambda | x \in X\}, [x]_\lambda = \{y | R(x,y) \geq \lambda, y \in X\}$,则称 $[x]_\lambda$ 是 R 在 X 上关于 λ 的等价类, $X(\lambda)$ 称为 R 在 X 上关于 λ 的粒度(或商空间)。

$\mathfrak{S}_R(X) = \{X(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 称为 R 在 X 上粒度空间。 $\mathfrak{R}_R(X) = \{R_\lambda | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 称为 R 在 X 上引导的截关系系。

事实上, $[x]_\lambda$ 就是普通等价关系 R_λ 的等价类,而 $X(\lambda)$ 就是 R_λ 对应的商空间。在定义 3.1 中,对不同的 $\lambda \in [0,1]$,所对应的截关系 R_λ 及商空间 $X(\lambda)$ 是不相同的。那么 $\mathfrak{R}_R(X), \mathfrak{S}_R(X)$ 有着怎样的结构呢?

定义 3.2 若 X 上任意两个等价关系 R_1, R_2 ,若 $\forall x,y \in X, (x,y) \in R_1 \rightarrow (x,y) \in R_2$,则称 R_2 不比 R_1 细,记为 $R_2 \leq R_1$;

若 $\forall x,y \in X, (x,y) \in R_1 \rightarrow (x,y) \in R_2$,且存在 $x_0, y_0 \in X$,使得 $(x_0, y_0) \in R_2$,且 $(x_0, y_0) \notin R_1$,则称 R_1 比 R_2 细,记为 $R_2 < R_1$ 。

性质 3.1 设 R 是 X 上的一个模糊等价关系,则 R 在 X 上的截关系系 $\mathfrak{R}_R(X)$ 是一个有序集,且 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], \lambda_1 \leq$

$\lambda_2 \rightarrow R_{\lambda_1} \leq R_{\lambda_2}$ 。特别地, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in D, \lambda_1 < \lambda_2 \rightarrow R_{\lambda_1} < R_{\lambda_2}$,其中 $D = \{R(x,y) | x,y \in X\}$ 。

证明: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], \lambda_1 \leq \lambda_2, (x,y) \in R_{\lambda_2} \rightarrow R(x,y) \geq \lambda_2 \rightarrow R(x,y) \geq \lambda_1 \rightarrow (x,y) \in R_{\lambda_1}$,从而 $R_{\lambda_1} \leq R_{\lambda_2}$ 。特别地, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in D, \lambda_1 < \lambda_2$,存在 $x_0, y_0 \in X$,使得 $R(x_0, y_0) = \lambda_1 < \lambda_2$,从而 $(x_0, y_0) \in R_{\lambda_1}$,且 $(x_0, y_0) \notin R_{\lambda_2}$,因此 $R_{\lambda_1} < R_{\lambda_2}$ 。

定义 3.3 给定 X 上的两个粒度(或商空间) $X(\lambda_1), X(\lambda_2)$ 。若 $\forall x \in X$,都有 $[x]_{\lambda_1} \subseteq [x]_{\lambda_2}$,则称粒度 $X(\lambda_2)$ 不比 $X(\lambda_1)$ 细,记为 $X(\lambda_2) \leq X(\lambda_1)$;

若 $\forall x \in X$,都有 $[x]_{\lambda_1} \subseteq [x]_{\lambda_2}$,且存在 $x_0 \in X$,使得 $[x_0]_{\lambda_1} \subset [x_0]_{\lambda_2}$,则称 $X(\lambda_1)$ 比 $X(\lambda_2)$ 细(或称 $X(\lambda_2)$ 是 $X(\lambda_1)$ 的商空间),记为 $X(\lambda_2) < X(\lambda_1)$ 。

性质 3.2 给定 X 上的一个模糊等价关系 R ,则其的粒度空间 $\mathfrak{S}_R(X)$ 构成一个有序集,且 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], \lambda_1 \leq \lambda_2 \rightarrow X(\lambda_1) \leq X(\lambda_2)$ 。特别地, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in D, \lambda_1 < \lambda_2 \rightarrow X(\lambda_1) < X(\lambda_2)$,其中 $D = \{R(x,y) | (x,y) \in X\}$ 。

证明:证明过程类似于性质 3.1 的证明,此略。

定义 3.4 X 上有序的粒度空间也称为 X 的一个分层递阶结构。

由性质 3.1 和定理 2.2 直接推得:

推论 3.1 给定了 X 上的一个等腰归一化距离,则给定了 X 上的一个分层递阶结构。

事实上,推论 3.1 之逆命题也成立,即:

定理 3.1 给定 X 上的一个分层递阶结构,则给定了 X 上的一个等腰归一化距离。

证明:设 $\mathfrak{S}(X) = \{X(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 为 X 上的一个分层递阶结构。定义 $d: \forall x,y \in X, d(x,y) = \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | y \in [x]_\lambda\}$ 。易知 d 满足归一化条件。由 $y \in [x]_\lambda \leftrightarrow x \in [y]_\lambda$ 知 d 满足对称性,且

$$(1) \forall x \in X, d(x,x) = \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | x \in [x]_\lambda\} = 0$$

$$(2) \forall x,y,z \in X, \text{由 } \max\{d(x,z), d(z,y)\} = \max\{\inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | x \in [z]_\lambda\}, \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | y \in [z]_\lambda\}\}$$

不妨设

$$d_0 = \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | x \in [z]_\lambda\} \geq \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | z \in [x]_\lambda\}$$

一方面, $\max\{d(x,z), d(z,y)\} = \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | x \in [z]_\lambda\} = d_0$,由下确界定义知: $\forall \epsilon > 0, \exists \lambda_1 \in [0,1]$,使得 $x \in [z]_{\lambda_1}, d_0 \leq \lambda_1 < d_0 + \epsilon$;另一方面,由 $d_0 \geq \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | y \in [z]_\lambda\}$,存在 $\lambda_2 \in [0,1]$,使得 $y \in [z]_{\lambda_2}, \lambda_2 \leq d_0$,于是 $y \in [z]_{\lambda_2} \subseteq [z]_{\lambda_1}$ 。由 $x \in [z]_{\lambda_1}$,从而 $[x]_{\lambda_1} = [z]_{\lambda_1} = [y]_{\lambda_1} \rightarrow x \in [y]_{\lambda_1}$,即 $\lambda_1 \geq \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | x \in [y]_\lambda\}$ 。因此 $\max\{d(x,z), d(z,y)\} = d_0 > \lambda_1 - \epsilon \geq \inf_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | x \in [y]_\lambda\} - \epsilon$ 。当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时,就有: $\max\{d(x,z), d(z,y)\} \geq d(x,y)$ 。

同理可证:

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

$$d(z,y) \leq \max\{d(x,y), d(x,z)\}$$

故 d 在 X 上的等腰归一化距离得证。

由定理 2.1,定理 3.1 和推论 3.1 可得如下结论。

定理 3.2 下列三个陈述是等价的。

- (1) 给定 X 上的一个模糊等价关系;
- (2) 给定 X 上的一个等腰归一化距离;
- (3) 给定 X 上的一个分层递推结构(或有序的粒度空间)。

注2:定理3.2与文[15]中基本定理的不同之处就在于命题(2)。文[15]中所指的商空间是一个特指的商空间,即本文中的 $X(1)$ 。由注1知 $X(1)=X$ 。同时,本文建立了模糊粒度空间的严格有序的理论体系。

由性质3.1,性质3.2直接推得:

推论3.2 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], R_{\lambda_1} < R_{\lambda_2} \Leftrightarrow X(\lambda_1) < X(\lambda_2)$ 。

4 粒度空间上的度量

由基本定理我们知道:给定 X 上的一个模糊等价关系,就给定 X 上的一个等腰归一化距离 d ,同时也给定 X 上的一个粒度空间 $\mathfrak{S}_R(X)$,那么粒度空间 $\mathfrak{S}_R(X)$ 上的度量又是怎样的呢?它与等腰归一化距离 d 是什么关系?下面就来回答这些问题。

定理4.1 给定 X 上的一个模糊等价关系 R , d 是 R 诱导的 X 上的一个等腰归一化距离,相应的诱导映射为 g 。 $X(\lambda)$ 是 R 诱导的 X 上的任一粒度或商空间。定义 $d_\lambda: \forall a, b \in X(\lambda)$

$$d_\lambda(a, b) = \inf_{x \in a} \inf_{y \in b} \{d(x, y)\} \quad (5.1)$$

则 d_λ 是 $X(\lambda)$ 上的一个等腰归一化距离。

证明:由条件知: $d(x, y) = g(1 - R(x, y))$,映射 $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,其中 $g(\cdot)$ 是严格单调递增函数,且 $g(0) = 0$ 。由 $d \in D(X)$ 及 d_λ 的定义,易知 d_λ 满足归一化条件及对称性,且 $\forall a \in X(\lambda), d_\lambda(a, a) = \inf_{x \in a} \inf_{y \in b} \{d(x, y)\} = 0$ 。下证 d_λ 在 $X(\lambda)$ 上满足等腰条件。首先证明

$$\forall x_1, x_2 \in a, y \notin a, R(x_1, y) = R(x_2, y)$$

由 $x_1, x_2 \in a, y \notin a \rightarrow R(x_1, x_2) \geq \lambda$,且 $R(x_1, y) < \lambda, R(x_2, y) < \lambda$ 。由于 R 是 X 上的模糊等价关系,因此有

$$R(x_1, y) \geq \min\{R(x_1, x_2), R(x_2, y)\} = R(x_2, y)$$

$$R(x_2, y) \geq \min\{R(x_1, x_2), R(x_1, y)\} = R(x_1, y)$$

即 $\forall x_1, x_2 \in a, y \notin a, R(x_1, y) = R(x_2, y)$ 。

进一步有: $\forall x_1, x_2 \in a, \forall y_1, y_2 \in b, a \neq b, R(x_1, y_1) = R(x_2, y_2)$ 。因此 $\forall x_1, x_2 \in a, \forall y_1, y_2 \in b, a \neq b, d(x_1, y_1) = g(1 - R(x_1, y_1)) = g(1 - R(x_2, y_2)) = d(x_2, y_2)$

$$\forall a, b, c \in X(\lambda), x_1 \in a, y_1 \in b, z_1 \in c \rightarrow d_\lambda(a, b) = \inf_{x \in a} \inf_{y \in b} \{d(x, y)\} = d(x_1, y_1) \leq \max\{d(x_1, z_1), d(z_1, y_1)\} = \max\{d_\lambda(a, c), d_\lambda(c, b)\}。$$

同理可证:

$$d_\lambda(a, c) \leq \max\{d_\lambda(a, b), d_\lambda(c, b)\}$$

$$d_\lambda(c, b) \leq \max\{d_\lambda(a, b), d_\lambda(a, c)\}$$

故 d_λ 在 X 上的等腰归一化距离得证。

定义4.1 在定理4.1中, d_λ 称为模糊等价关系 R 诱导的等腰归一化距离 d 在粒度 $X(\lambda)$ 上的压缩距离。

定理4.1给出了 X 上的模糊等价关系 R 诱导的等腰归一化距离 d 与其引导的粒度(或商空间) $X(\lambda)$ 上度量之间的关系,同时通过诱导的等腰归一化距离 d 建立了粒度空间 $\mathfrak{S}_R(X)$ 上的距离。对任一粒度 $X(\lambda)$ 的距离 d_λ ,相当于诱导的等腰归一化距离 d 在 $X(\lambda)$ 上的压缩距离,且保持了等腰归一化的特征。其中 d_λ 的定义也符合数学上的一种习惯,即两集间距离等于两集合上任意两点间距离的下确界。从定理5.1的证明我们不难得到 d_λ 简化形式,即

推论4.1 在定理4.1中, $\forall a, b \in X(\lambda)$,

$$d_\lambda(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \\ d(x, y), & a \neq b, \forall x \in a, y \in b \end{cases}$$

结论 本文将等腰归一化距离引入到模糊商空间中,提出了基于等腰归一化距离的模糊粒度空间理论。研究了它的结构和性质,并得到了三个重要结论。首先,下面3个叙述是等价的(定理3.2): (1) 给定 X 上的一个模糊等价关系; (2) 给定 X 上的一个等腰归一化距离; (3) 给定 X 上的一个分层递阶结构(或有序的粒度空间)。其次,讨论了等腰归一化距离与Fuzzy等价关系间相互确定的对应关系,且都是一对多的关系(定理2.2,定理2.3)。最后,给出了通过 X 上的模糊等价关系 R 诱导的等腰归一化距离 d 确定其引导的粒度上的距离,且这个距离正好是 d 在此粒度上压缩的等腰归一化距离(定理4.1),同时给出了确定粒度空间上等腰归一化距离的方法。

这些研究工作一方面为模糊商空间上的粒度计算提供了一整套的理论和工具;另一方面,这些研究结论使得模糊商空间的粒度计算可以在等腰归一化距离的范畴内进行,为模糊商空间的粒度计算提供了更为直观的几何解释。

致谢 感谢博士生导师张铃教授在本文完成过程中提供了许多有益的建议。

参考文献

- Zadeh L A. Fuzzy logic = computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 2: 103~111
- Zadeh L A. Some Reflections on Information Granulation and its contrility in Granular Computing, computing with words, the Computational Theory of Perceptios and Precisiated Natural Language. In: Lin T Y, Yao Y Y, Zadeh L A, eds. Data Mining, Rough Sets and Granular computing, Physica-Verlag, 2002
- Zadeh L A. The roles of uzy logic and soft computing in the conception, design and deployment of intelligent systems. In: Nwana H S, Azarmi N, eds. Software Agents and soft computing: Towards Enhancing Machine Intelligence, Concepts and Applications, Springer Verlag, 1997. 183~190
- 李道国, 苗夺谦, 张东星, 等. 粒度计算研究综述. 计算机科学, 2005, 32(9): 1~12
- Yao Y Y. Granular Computing; Basic issues and possible solutions. In: Wang P P, ed. Proc. of the 5th Joint Conf on Information Sciences Association for intelligent Machinery, 2000. 186~189
- Yao Y Y, Yao J T. Granular Computing as a basis for consistent Classification problems. In: PAKDD 2002 Workshop Entitled Towards Foundation of Data Mining. Communications of Institute of Information and Computing Machinery, 2002, 5(2): 101~106
- Yao Y Y. Modeling data mining with granular computing. In: Proc. of the 25th Annual Intl Computer Software and Applications Conf. CCMPASAC 2001, Chicago, USA, IEEE Computer Society, Los Alamitos, California, October 2001. 638~643
- Yao Y Y, Zhong N. Potential applications of granular computing in knowledge discovery and data mining. In: Torres M, Sanchez B, Aguilar Jd, eds. Proc. of World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Vol 5. Computer Science and Engineering, Orlando, Florida, USA, International Institute of Informatics and Systematics, Orlando, 1999. 573~580
- Yao Y Y. Granular computing using neighborhood systems. In: Roy R, Furuhashi T, Chawdhry R K, eds. Advances in soft computing: engineering design and facturing. London: Spring-Verlag, 1999. 111~116
- Yao Y Y. Rough sets, neighborhood Systems, and granular computing. In: Meng M, ed. Proc. of the 1999 IEEE Canadian Conf. on Electrical and Computer Engineering, Edmonton, Canada, IEEE Press, May 1999. 1553~1558
- Pawlak Z. Rough sets. Intl Journal of Computer and Information Science, 1982, 11: 341~356
- Pawlak Z. Rough Sets Theoretical Aspects of Reasoning About Data. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Elsevier Science Publishers, 1991
- Zhang B, Zhang L. The Theory and Application of Problem Solving. North-Holland, 1992
- 张铃, 张钺. 问题求解理论及应用——商空间粒度计算理论及应用. 第二版. 北京: 清华大学出版社, 2007
- 张铃, 张钺. 模糊商空间理论(模糊粒度计算方法). 软件学报, 2003, 14(4): 770~776
- Zhang L, Zhang B. The structure analysis of fuzzy sets. International Journal of Approximate Reasoning, 2005(40): 92~108