基于一类严格三角范数的命题逻辑*)

罗敏霞[1]　何华灿[2]

(中国计量学院理学院　杭州 310018)[1]　(西北工业大学计算机学院　西安 710072)[2]

摘　要　剩余模糊逻辑演算与连续三角范数是紧密相关的，三角范数是合取联结词的真值函数，三角范数的剩余是蕴涵联结词的真值函数。在这些逻辑中，非运算都是由蕴涵和真值常量$\bar{0}$定义的，即$\neg P$：$P\rightarrow\bar{0}$。在本文中，我们引入一种具有对合性质的强非运算联结词"$\sim$"和投影联结词"Δ"，证明基于严格泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0.75,1))$的命题演算逻辑 PC(T)系统是基本严格模糊逻辑 SBL；PC(T)$_\sim$是基本严格模糊逻辑 SBL 的扩张 SBL$_\sim$。

关键词　泛与运算模型，泛蕴涵运算模型，严格三角范数，基本严格模糊逻辑 SBL

A Class of Strict-t-morms-based Propositional Logic

LUO Min-Xia[1]　HE Hua-Can[2]

(School of Science, China Jiliang University, Hangzhou 310018)[1]

(School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)[2]

Abstract　Residuated fuzzy logic calculi are related to continuous t-norms, which are used as truth functions for conjunction, and their residua as truth functions for implication. In these logic, a negation is also definable from the implication and the truth constant $\bar{0}$, namely $\neg P$ is $P\rightarrow\bar{0}$. This paper introduces a unary connective$\sim$ and the projection connective Δ. The semantics of $\sim$ is a strong negation function which is a decreasing involution. We prove that $T(x,y,h)(h\in(0.75,1))$ strict-universal-conjunction-based propositional logic PC(T) is the basic strict fuzzy logic SBL, and PC(T)$_\sim$ with involutive negation $\sim$ is SBL$_\sim$ which is extension of the basic strict fuzzy logic SBL.

Keywords　Universal conjunction model, Universal implication model, Strict t-norm, Basic strict fuzzy logic SBL

1 引言

剩余模糊逻辑演算与连续三角范数是紧密相关的，三角范数是合取联结词的真值函数，三角范数的剩余是蕴涵联结词的真值函数。常见的例子[5]有 Lukasiewicz 逻辑、Gödel 逻辑及乘积逻辑，对应于这三种逻辑系统的三角范数分别是 Lukasiewicz 三角范数($x*y=\max(0,x+y-1)$)，Gödel 三角范数($x*y=\min(x,y)$)和乘积三角范数($x*y=xy$)。Rose 与 Rosser 在文[1]证明了 Lukasiewicz 逻辑的完备性，Dummett 在文[2]证明了 Gödel 逻辑的完备性，直到上个世纪 90 年代，P. Hájek 等在文[3]才给出乘积逻辑的公理化形式系统。到了 1998 年，P. Hájek 提出对应于一般连续三角范数的公理化形式系统 BL，并且 Lukasiewicz 逻辑、Gödel 逻辑及乘积逻辑均是 BL 的扩张[5]。

本文第二作者为了探索逻辑的一般规律，提出建立能包容各种逻辑形态和推理模式的泛逻辑学理论[7]。在长期从事人工智能理论和实用专家系统的研究中发现，模糊命题之间的关系柔性是不可回避的客观存在，需要用连续可变的逻辑运算模型来描述，也就是说，在对立不充分的柔性世界中，不仅要考虑模糊性对命题逻辑真值的影响，而且要考虑关系柔性对命题联结词运算模型的影响。事物之间的广义相关性和广义自相关性是引起关系柔性的根本原因。泛逻辑学给出了零级泛运算模型[7]：

泛非命题联结词$\neg_k$的运算模型：

$N(x,k)=(1-x^n)^{1/n}$

泛与命题联结词$\wedge_h$的运算模型：

$T(x,y,h)=ite\{0\mid x=0 \text{ 或 } y=0;(\max(0,x^m+y^m-1))^{1/m}\}$

泛蕴涵命题联结词$\rightarrow_h$的运算模型：

$I(x,y,h)=ite\{1\mid x\leqslant y;0\mid m\leqslant 0 \text{ 且 } y=0 \text{ 且 } x\neq 0;(1-x^m+y^m)^{1/m}\}$

其中 $n=-1/\log_2 k,k\in[0,1]$；$m=(3-4h)/(4h(1-h)),m\in R,h\in[0,1]$。$S=ite\{\beta\mid\alpha;\gamma\}$是条件表达式，表示"如果$\alpha$为真，则$S=\beta$；否则$S=\gamma$"。

除了上面三个运算模型之外，还有泛或命题联结词，泛等价命题联结词，泛平均命题联结词和泛组合命题联结词的运算模型，详细内容参阅文[7]。泛逻辑学的研究目标是提供一个逻辑生成器，通过运用各种规则，可以构造出满足某种需要的具体逻辑。这个目标在标准命题泛逻辑学层面上已经实现[7]。

本文我们主要研究基于严格泛与运算模型 $T(x,y,h)=ite\{0\mid x=0 \text{ 或 } y=0;(x^m+y^m-1)^{1/m}\}(h\in(0.75,1),m\in R^-)$的命题演算逻辑系统 $PC(T)$及在 $PC(T)$上附加一个强非运算联结词与投影联结词的逻辑系统 $PC(T)_\sim$。在第 2 节，我们引入一些在本文中要用的基本概念和结论；第 3 节主要证明基于严格泛与运算模型 $T(x,y,h)=ite\{0\mid x=0 \text{ 或 } y=0;(x^m+y^m-1)^{1/m}\}(h\in(0.75,1)m\in R^-)$的命题演算逻辑系统 $PC(T)$是基本严格模糊逻辑 SBL；第 4 节，在系统 PC

*)本文得到国家自然科学基金(60273087)和中国计量学院科研启动基金资助。**罗敏霞**　博士，教授，主要研究方向为人工智能基础理论与应用，泛逻辑学；**何华灿**　教授，博士生导师，主要研究方向为人工智能原理及应用，泛逻辑学。

(T)中，我们引入一种具有对合性质的强非运算联结词～，同时定义了投影联结词Δ，证明命题演算系统$PC(T)_{\sim}$是基本严格模糊逻辑SBL的扩张$\mathrm{SBL}_{\sim}$。

2 预备

定义2.1[4] 设T是$[0,1]$上的二元运算，T: $[0,1]^2\to[0,1]$，任意$x, y, z\in[0,1]$，如果满足下列条件：

(T1) $T(x,y)=T(y,x)$

(T2) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$

(T3) 当$y\leqslant z$时，$T(x,y)\leqslant T(x,z)$

(T4) $T(x,1)=x$

则称T是一个三角范数。

设T是一个三角范数，如果任意的非递减(非递增)序列$(x_n)_{n\in N}$有$\lim\limits_{n\to\infty}T(x_n,y)=T(\lim\limits_{n\to\infty}x_n,y)$，则称三角范数$T$是左连续(右连续)。如果一个三角范数既是左连续，又是右连续，则称三角范数是连续的[4]。

设T是一个三角范数，当$x>0$，$y<z$时，有$T(x,y)<T(x,z)$，称T是严格单调的。如果三角范数T既是连续的，又是严格单调的，称T是严格三角范数[4]。

定义2.2[5] 基本逻辑系统BL，它是由可数多个命题变元的集合，合取联结词&，蕴涵联结词→和一个真值常量$\bar{o}$组成的。其它连接词定义如下：

$P\wedge Q$：$P\&(P\to Q)$

$P\vee Q$：$((P\to Q)\to Q)\wedge((Q\to P)\to P)$

$\neg P$：$P\to\bar{0}$

$P\equiv Q$：$(P\to Q)\&(Q\to P)$

下面是基本逻辑系统BL的公理集：

(A1) $(P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R))$

(A2) $(P\&Q)\to P$

(A3) $(P\&Q)\to(Q\&P)$

(A4) $(P\&(P\to Q))\to(Q\&(Q\to P))$

(A5a) $(P\to(Q\to R))\to((P\&Q)\to R)$

(A5b) $((P\&Q)\to R)\to(P\to(Q\to R))$

(A6) $((P\to Q)\to R)\to(((Q\to R)\to R)\to R)$

(A7) $\bar{0}\to R$

推理规则MP，MP是指分离规则：由P和$P\to Q$推得Q。

定义2.3[5] 有界格$(L,\wedge\vee,*,\Rightarrow,0,1)$称为BL代数，如果满足下面条件：

(1) $(L,*,1)$是一个含幺交换半群，即$*$具有交换律，且$\forall x\in L, 1*x=x$；

(2) "$*$"与"$\Rightarrow$"是一个伴随对，即$x*z\leqslant y$当且仅当$z\leqslant x\Rightarrow y$；

(3) $x\wedge y=x(x\Rightarrow y)$；

(4) $(x\Rightarrow y)\vee(y\Rightarrow x)=1$。

基本逻辑BL是可靠的，如果P在逻辑BL中是可证的，则对每个BL代数L而言，P都是L-重言式。且文[6]也证明了BL逻辑系统是强完备的。

文[6]引入基本严格模糊逻辑SBL的概念，本文下面将要用到。

定义2.4[6] 基本严格模糊逻辑SBL的公理集是基本逻辑BL的所有公理加上下面的公理：

(STR) $(P\&Q\to\bar{0})\to((P\to\bar{0})\vee(Q\to\bar{0}))$

推理规则是MP规则。

定义2.5[6] 设$(L,\vee,\wedge,*,\Rightarrow,0,1)$是一个BL代数，如果满足下面条件：

$((x*y)\Rightarrow 0)=(x\Rightarrow 0)\vee(y\Rightarrow 0)$

则称$(L,\vee,\wedge,*,\Rightarrow,0,1)$为SBL代数。

文[6]证明了基本严格模糊逻辑SBL关于线性序SBL代数是完备的。

在SBL逻辑系统中再定义一个一元运算联结词～。～的语义是任意强非函数n:$[0,1]\to[0,1]$，函数n是递减对合的，即$n(n(x))=x$，且当$x\geqslant y$时，$n(x)\leqslant n(y)$。

由两个非函数与$\neg$与～，定义投影联结词

ΔP：$\neg\sim P$

定义2.6[6] SBL逻辑系统中再定义一个强非运算联结词～与投影联结词Δ，此逻辑系统记为$\mathrm{SBL}_{\sim}$。

$\mathrm{SBL}_{\sim}$的公理是SBL的所有公理加上下面的公理：

$(\sim1)(\sim\sim P)\equiv P$

$(\sim2)\neg P\to\sim P$

$(\sim3)\Delta(P\to Q)\to\Delta(\sim Q\to\sim P)$

$(\Delta1)\Delta P\vee\neg\Delta P$

$(\Delta2)\Delta(P\vee Q)\to(\Delta P\vee\Delta Q)$

$(\Delta3)\Delta(P\to Q)\to(\Delta P\to\Delta Q)$

其中ΔP是$\neg\sim P$。

$\mathrm{SBL}_{\sim}$的推理规则是：

(1) 分离规则MP：即由P和$P\to Q$推得Q。

(2) 必然性：由P可得ΔP。

定义2.7[6] 设SBL代数$(L,\vee,\wedge,*,\Rightarrow,0,1)$定义一个一元运算～，如果满足下列条件：

$(A\sim1)\sim\sim x=x$

$(A\sim2)\neg x\leqslant\sim x$

$(A\sim3)\Delta(x\Rightarrow y)=\Delta(\sim y\Rightarrow\sim x)$

$(A\sim4)\Delta x\vee\neg\Delta x=1$

$(A\sim5)\Delta(x\vee y)\leqslant\Delta x\vee\Delta y$

$(A\sim6)\Delta x*(\Delta(x\Rightarrow y))\leqslant\Delta y$

其中$\neg x=(x\Rightarrow 0)$，$\Delta x=(\sim x\Rightarrow 0)$，则称$(L,\vee,\wedge,*\Rightarrow,\sim,0,1)$是一个$\mathrm{SBL}_{\sim}$代数。

定理2.8[6] $\mathrm{SBL}_{\sim}$是完备的。即对任意公式φ，下列三条是等价的：

(1) φ是$\mathrm{SBL}_{\sim}$的定理；

(2) 对每个$\mathrm{SBL}_{\sim}$代数L，φ都是L-重言式；

(3) 对每个线性序$\mathrm{SBL}_{\sim}$代数L，φ都是L-重言式。

3 基于严格泛与运算模型的命题演算逻辑系统

泛逻辑学已经给出零级泛运算模型，当$h\in(0.75,1)$，$m\in R^-$时，零级泛与运算模型准确地表示为

$T(x,y,h)=ite\{0|x=0\text{ 或 }y=0;(x^m+y^m-1)^{1/m}\}$

泛蕴涵运算模型是：

$I(x,y,h)=ite\{1|x\leqslant y;0|m\leqslant 0\text{ 且 }y=0\text{ 且 }x\neq 0;(1-x^m+y^m)^{1/m}\}$

文[8]已经证明，此时零级泛与运算模型$T(x,y,h)$是严格三角范数，且泛蕴涵运算$I(x,y,h)$是泛与运算的剩余，即$T(x,y,h)$与$I(x,y,h)$形成一个伴随对。

定义3.1[8] 任意$x\in[0,1]$，定义非运算$\neg x=x\to 0=ite\{1|x=0;0\}$。

定理3.2 有界格$(L,\vee,\wedge,*,\Rightarrow,0,1)$做成SBL代数。其中$*$，$\Rightarrow$分别代表$h\in(0.75,1)$时的零级泛与运算与零级泛蕴涵运算。

证明：文[8]已经证明$(L,\vee,\wedge,*,\Rightarrow,0,1)$是一个BL代数。只需证明$*,\Rightarrow$满足$((x*y)\Rightarrow 0)=(x\Rightarrow 0)\vee(y\Rightarrow 0)$。

如果$x*y=0$，则$x=0$，或$y=0$。从而，$(x*y)\Rightarrow 0=1$，$x\Rightarrow 0=1$，或$y\Rightarrow 0=1$。因此，$((x*y)\Rightarrow 0)=(x\Rightarrow 0)\vee(y\Rightarrow 0)$。如果$x*y\neq 0$，由泛蕴涵定义$(x*y)\Rightarrow 0=0$。由于$x*y=(x^m+y^m-1)^{1/m}\neq 0$，从而，$x\neq 0$，且$y\neq 0$，再由泛蕴涵定义，$x\Rightarrow 0=0$，$y\Rightarrow 0=0$。所以，$((x*y)\Rightarrow 0)=(x\Rightarrow 0)\vee(y\Rightarrow 0)$。

定义3.3[8] 由泛与运算模型$T(x,y,h)(h\in(0.75,1))$确定的命题演算系统记为$PC(T)$。$S=\{\bar{0},P_1,P_2,\cdots\}$是可数集，$\&,\rightarrow$均是二元运算，由$S$生成的$\{\&,\rightarrow\}$型自由代数$F(S)$。$F(S)$中的元素叫命题，句子或公式，$S$中元素叫原子命题或原子公式。

在$PC(T)$中，命题联结词$\&,\rightarrow$的真值函数分别是

$T(x,y,h)=ite\{0|x=0$ 或 $y=0;$

$(x^m+y^m-1)^{1/m}\}(h\in(0.75,1))$

$I(x,y,h)=ite\{1|x\leqslant y;0|m\leqslant 0$ 且 $y=0$

且 $x\neq 0;(1-x^m+y^m)^{1/m}\}(h\in(0.75,1))$

命题常量$\bar{0}$的真值是0。其它命题联结词定义如下：

$P\wedge Q:P\&(P\rightarrow Q)$

$P\vee Q:((P\rightarrow Q)\rightarrow Q)\wedge((Q\rightarrow P)\rightarrow P)$

$\neg P:P\rightarrow\bar{0}$

$P\equiv Q:(P\rightarrow Q)\&(Q\rightarrow P)$

命题演算系统$PC(T)$的一个赋值是映射$e:F(s)\rightarrow[0,1]$，且满足$e(\bar{0})=0$，$e(P\rightarrow Q)=e(P)\Rightarrow e(Q)$，$e(P\& Q)=e(P)*e(Q)$。其中等式右边的"$\Rightarrow$"，"$*$"分别代表零级泛蕴涵运算$I(x,y,h)(h\in(0.75,1))$与零级泛与运算$T(x,y,h)(h\in(0.75,1))$。

设P是$PC(T)$的任意一个公式，如果对任意一个赋值e，均有$e(P)=1$，则称P是$PC(T)$的1-重言式。

定理3.4[8] (1) BL的所有公理都是$PC(T)$的1-重言式；

(2) 若P，$P\rightarrow Q$都是$PC(T)$的1-重言式，则Q也是$PC(T)$的1-重言式。

命题3.5 公式(STR)：

$(P\& Q\rightarrow\bar{0})\rightarrow((P\rightarrow\bar{0})\vee(Q\rightarrow\bar{0}))$

是$PC(T)$的1-重言式。

证明由定理3.2直接可得。

由定义2.4可得以下结论：

定理3.6 基于零级泛与运算模型

$T(x,y,h)=ite\{0|x=0$ 或 $y=0;$

$(x^m+y^m-1)^{1/m}\}(h\in(0.75,1))$

的命题演算逻辑系统$PC(T)$是基本严格逻辑SBL。

4 基于严格泛与运算模型的命题演算逻辑系统的一种扩张

由上面$PC(T)$的定义3.3，在$PC(T)$中定义一个一元运算模型$\sim:[0,1]\rightarrow[0,1]$，$\sim x=(1-x^n)^{1/n}(n\in R^+)$。则$\sim\sim x=x$，且$\sim$是一个递减函数，这样$\sim$是一个强非。这就是泛逻辑学所给的泛非运算。同时在$PC(T)$上定义投影运算模型$\Delta x=\neg\sim x$。此时的逻辑系统记为$PC(T)_\sim$。

定理4.1 在有界格$(L,\vee,\wedge,*,\Rightarrow,0,1)$上定义运算$\sim x=(1-x^n)^{1/n}(n\in R^+)$，$\Delta x=\neg\sim x$。则此有界格做成$SBL_\sim$代数。

证明：由定理3.2，有界格$(L,\vee,\wedge,*,\Rightarrow,0,1)$是一个SBL代数。

$(A_\sim 1)\sim\sim x=x$ 显然。

$(A_\sim 2)\neg x=(x\Rightarrow 0)=ite\{1|x=0;0\}$。$\sim x=(1-x^n)^{1/n}$，当$x=0$时，$\sim x=1$，其它$\sim x=(1-x^n)^{1/n}>0$，所以$\neg x\leqslant\sim x$。

$(A_\sim 3)$当$x\leqslant y$时，$x\Rightarrow y=1$，$\Delta 1=1$。$x\leqslant y$时，$\sim y\leqslant\sim x$，则$\sim y\Rightarrow\sim x=1$。所以，$\Delta(x\Rightarrow y)=\Delta(\sim y\Rightarrow\sim x)$。

当$x>y$时，$x\Rightarrow y\neq 1$，则$\Delta(x\Rightarrow y)=0$。因为$\sim$是递减函数，则$\sim y>\sim x$，从而，$\sim y\Rightarrow\sim x\neq 1$，则$\Delta(\sim y\Rightarrow\sim x)=0$。所以$\Delta(x\Rightarrow y)=\Delta(\sim y\Rightarrow\sim x)$。

$(A_\sim 4)$因为$\Delta x=ite\{1|x=1;0\}$，$\neg\Delta x=ite\{0|x=1;1\}$，所以，$\Delta x\vee\neg\Delta x=1$。

$(A_\sim 5)$ 因为$\Delta(x\vee y)=ite\{1|x=1$ 或 $y=1;0\}$，$\Delta x\vee\Delta y=ite\{1|x=1$ 或 $y=1;0\}$。所以，$\Delta(x\vee y)\leqslant\Delta x\vee\Delta y$。

$(A_\sim 6)$只需等价的证明

$\Delta(x\Rightarrow y)\leqslant(\Delta x\Rightarrow\Delta y)$。

当$\Delta x\leqslant\Delta y$时，上不等式显然成立。当$\Delta x>\Delta y$时，只有$\Delta x=1$，$\Delta y=0$，即$x=1$，$y\neq 1$，则$\Delta(x\Rightarrow y)=\Delta y=0=\Delta x\Rightarrow\Delta y$。由定义2.6，$(L,\vee,\wedge,*,\Rightarrow,\sim,0,1)$ 做成一个$SBL_\sim$代数。

由定理4.1可得以下结论：

命题4.2 下列公式都是$PC(T)_\sim$的1-重言式

$(\sim 1)(\sim\sim P)=P$

$(\sim 2)\neg P\rightarrow\sim P$

$(\sim 3)\Delta(P\rightarrow Q)\rightarrow\Delta(\sim Q\rightarrow\sim P)$

$(\Delta 1)\Delta P\vee\neg\Delta P$

$(\Delta 2)\Delta(P\vee Q)\rightarrow(\Delta P\vee\Delta Q)$

$(\Delta 3)\Delta(P\rightarrow Q)\rightarrow(\Delta P\rightarrow\Delta Q)$

由定理3.6，命题4.2可得以下结论：

定理4.3 命题演算逻辑系统$PC(T)_\sim$是基本严格模糊逻辑SBL的扩张$SBL_\sim$。

参考文献

1 Rose P A, Rosser J B. Fragments of many valued statement calculi[J] Trant. A. M. S., 1958, 87: 1~53

2 Dummett M. A propositional calculus with denumerable matrix [J]. Journal of Symbolic Logic, 1959, 24: 97~106

3 Hajek P, Godo L, Esteva F. A complete many-valued logic with product conjunction[J]. Archive for Mathematical Logic, 1996, 35: 191~208

4 Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms: Kluwer Academic Publishers, 2000

5 Hájek P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. Kluwer Academic Publishers, 1998

6 Esteva F, Godo L, Hajek P, et al. Residuated fuzzy logic with an involutive negation[J]. Archive for Mathematical Logic, 2000, 39: 103~124

7 何华灿，等. 泛逻辑学原理. 北京：科学出版社，2001

8 罗敏霞，何华灿. 基于严格泛与运算模型的命题模糊逻辑[C]. 见：模糊逻辑与计算智能研究进展，2005. 121~126

9 罗敏霞，何华灿. 泛逻辑一级泛运算模型的代数性质[J]. 计算机工程与应用，2004，30：4~7

10 罗敏霞，何华灿. 基于幂零泛与运算模型的模糊逻辑系统[J]. 计算机科学，2004，31：97~99