

# 一种高效的自组织特征映射图的初始化方法<sup>\*</sup>)

张群洪 陈崇成

(福建省空间信息工程研究中心,福州大学数据挖掘与信息共享教育部重点实验室 福州 350002)

**摘要** 自组织特征映射图算法(SOFM, self-organizing Feature Map)在模式识别中有着广泛的应用。本文首先讨论了网络结构的初始化设置对自组织特征映射图构造的影响以及加速 SOFM 网络学习训练过程的主要方法,然后提出一种从边界到中心的自组织特征映射图初始化方法,该方法形成的自组织特征映射图能够真实地表示输入样本内在关系,大大减少学习训练次数,从而有效改进了传统的 SOFM 算法。

**关键词** 自组织特征映射图,初始化方法,加快 SOFM 学习过程

## An Efficient Initialization Scheme for Self-organizing Feature Map

ZHANG Qun-Hong CHEN Chong-Cheng

(Spatial Information Research Center of Fujian, Key Lab of Data Mining & Information Sharing of Ministry of Education, Fuzhou University, Fuzhou 350002)

**Abstract** Self-Organizing Feature Map algorithm (SOFM) is widely applied in various areas such as pattern recognition. The paper first discusses the influence of initialization on self-organizing feature map and the main methods to accelerate learning phase of self-organizing feature map. Then an efficient initialization scheme for forming a topologically ordered feature map from boundary to center is proposed. The scheme can enormously reduce the training epochs of self-organizing feature map which can present the true inherent relation of the input data space, and improve the SOFM algorithm.

**Keywords** Self-organizing feature map, Initialization scheme, Accelerate learning phase

Kohonen 的自组织特征映射图(SOFM)是由一组排列成长方形或六边形、形成格子网状的神经元组成。每个神经元含有一个权重向量,即神经元从输入样本中得到的特征向量。神经元在格子网状中的相邻关系,即这些权重向量的相邻关系,也是通过自组织映射图来表示。构造的自组织映射图中神经元阵列的排列方式是否恰当,神经元的数量是否足够且必要,成为一个相当重要的问题,一直以来都是神经网络的一个研究热点。

成功构造自组织映射特征图很大程度上依赖于初始权值以及算法主要参数(主要指学习速率和邻域函数)的选择。如果这三个影响自组织特征映射图的参数设定得不合理,则无法形成具有能够保持输入样本拓扑关系的特征映射图,也就是自组织特征映射图会出现彼此纠缠、打结的情况。在自组织特征映射 SOFM 算法的一般实现过程中,处理实际问题时还存在一些缺陷,如网络在学习时收敛速度较慢,而且不同的初始条件和样本输入次序对网络的学习过程和学习结果都有很敏感的影响<sup>[1]</sup>。

自组织映射图的初始化方式对最终形成的表示输入样本内在关系的自组织映射图有着极强的影响,而神经元的权值向量的初始值通常是随机设定的,并且将权值向量的初始值限制在很小的范围之内,然后对初始权值进行训练。如果得到的自组织特征映射图无法令人满意,就重新随机设定初始权值,进行新一轮的训练学习循环。由于 SOFM 神经网络通常需要很多次学习训练过程,这种试误法(trial & error)<sup>[2]</sup>的

最大缺点是浪费大量的时间和计算资源,因此,在 Kohonen 的 SOFM 算法中,尽可能不要以随机的方式来初始化网络结构中神经元的权值向量。几种有效的利用训练样本来设定初始权值的方法可用于改进传统的 SOFM 算法。文[3]提出使用遗传算法来构建特征映射图。文[4]提出几种邻域函数使得自组织神经网络尽快收敛。文[5]提出使用圆形特征映射图来解决因边界问题而引起的无效拓扑表示问题。文[2]提出一种“线性初始化”方法来加快学习训练过程,这种方法首先确定具有最大特征向量的输入向量的自相关矩阵的两个特征向量,然后使这些特征向量分布在二维线性子空间中,沿着这个与输入向量均值一致的子空间来定义矩形数组,接着根据这个矩形数组来设定连接值向量的初始值。这样得到的初始权值已经是有序的,而拓扑分布与输入向量大致一致,所以可以根据这个初始权值直接进行收敛阶段的学习过程。这种线性初始化方法的主要问题是需要大量计算输入向量的自相关矩阵的特征向量。

### 1 加速 SOFM 网络学习过程的主要方法

为了加快学习训练的过程,通常使用特定的初始化方式来初始化自组织神经网络结构,即 SOFM 训练开始前,首先构造一个“好”的初始特征映射图,然后依据 SOFM 算法来加以细调特征映射图。加快 SOFM 神经网络自适应过程主要需要考虑以下几个方面。

#### 1.1 合理选择学习速率 $\eta(t)$

<sup>\*</sup>)国家自然科学基金资助项目(60602052)、福建省重点科技项目(2005H086)。张群洪 博士研究生,主要研究方向为数据挖掘、神经网络;陈崇成 博士,教授,研究方向为资源与环境信息工程、空间信息集成技术、计算机仿真技术等。

在 SOFM 网络自组织的过程中,如果学习速率  $\eta(t)$  一直过大(接近 1),则会使权重向量的更新过程来回振荡,学习稳定性较差;反之,如果学习速率  $\eta(t)$  过小(趋向 0),虽然可以增强学习稳定性,但是会使收敛时间过长。因此,可以采用在快速学习和稳定性之间的折衷方法,即在刚开始训练时,选择比较大的学习速率( $\eta(t)$  接近于 1),使神经元能够很快地训练输入的向量。随着训练的进行,学习速率逐步减小,在学习后期过程中, $\eta(t)$  应趋于 0,以保证学习过程的收敛性,从而取得较好的学习稳定性。

在神经网络学习的排列阶段(order phase),大约前 1000 次,学习速率应该保持接近于 1,然后随着时间的推移,学习速率逐步递减。学习速率函数并没有固定的形式,可以是线性的递减函数,如  $\eta(t) = \eta(0) * (1 - t/T)$ ,或指数型的递减函数,如  $\eta(t) = \eta(0) * \exp(-t)$ ,或是与时间  $t$  成反比的递减函数,如  $\eta(t) = \eta(0)/(t+1)$ 。各神经元会依据输入样本间的拓扑关系,形成初步的特征映射图。而此时的学习过程,可以看作是算法的排列阶段,也即所谓的粗调阶段。往后的学习过程为收敛阶段(convergence phase),此时网络的学习过程只是执行细调特征映射图的工作。在收敛阶段,学习速率应该保持在相当小的范围之内(小于 0.1),而且维持相当长的时间。通常收敛阶段大概需要数千次的学习循环。

### 1.2 邻域函数的设定

在自组织特征映射图网络中,邻域函数的设定特别重要。如果邻域函数一开始设定得太小,则所形成的特征映射图可能无法真实反映出输入样本间的整体拓扑关系。邻域函数通常采用包含着获胜神经元  $j^*$  的正方形或六边形的形式,还可以采用高斯函数的形式。一般来说,  $N_{j^*}(t)$  在初始时可以选择范围宽一些,约为 1/2 的输出平面。随着时间的推移,  $N_{j^*}(t)$  向以神经元  $j^*$  为中心的小范围逐步收缩。  $N_{j^*}(t)$  收小到最后可以只包含竞争获胜神经元  $j^*$  本身,这样既加速了自组织学习过程,又保证了学习过程的必然收敛,并且大大降低了造成网络特征图扭曲的可能性。

对邻域函数进行正确估计的目标是使 SOFM 实现保持拓扑特性的映射,即 SOFM 特征图中各个神经元的几何距离越小,则相应权值向量的 Euclidean 距离也越小,反之亦然。因此,合理选择邻域函数对权值向量有着直接的影响。一般来说,高斯拓扑邻域函数比矩形或者圆形拓扑邻域函数更合适,选择高斯邻域函数作为邻域函数使 SOFM 算法的收敛速度更快。

### 1.3 收敛准则的确定

由 SOFM 网络所形成的拓扑映射图,在数理统计方面能够反映出输入样本的概率分布特性,所以自组织学习训练最后形成的拓扑映射图与学习过程的次数相关,而学习过程的次数没有明确的确定方法。为了使拓扑映射图具备良好的数理统计特性,Kohonen 建议学习过程的次数大约可以设定为神经元个数的 500 倍以上<sup>[6]</sup>。

对于 SOM 网络训练的结束与否,通常取决于用户给定的迭代次数,这给应用造成了许多不便。对于具有复杂内在结构的输入样本,若给定较小的迭代次数,则迭代往往还没有收敛学习就结束了;若给定太大的迭代次数,又会造成过拟合,当样本数目很大时,这是极大的浪费。因此,有必要确定一个准则,判断迭代是否已经收敛。在学习过程中,如果迭代已经收敛,则在后续的迭代中,所有输入样本矢量的归属类别应该不发生变化,而且权值的调整量应该很小或为零。

## 2 一种从边界到中心的自组织特征映射图初始化方法

首先需要使用 Sammon<sup>[8]</sup>非线性映射方法将高维样本数据投影到平面中。把输入向量从高维空间投影到低维空间时, Sammon 非线性映射是一种能够保持样本数据内部相邻关系的非线性转换算法。输入样本相邻关系的保存是通过维持向量之间的距离得以实现的。本文采用 Mao 和 Jain 提出的一种两层感知器神经网络<sup>[7,8]</sup>来实现 Sammon 映射。如图 1 所示,神经网络的输入单元数是输入数据的维度,输出单元数表示抽取的特征空间维度,但是隐含层数以及神经元数的确定并没有一定的规则。

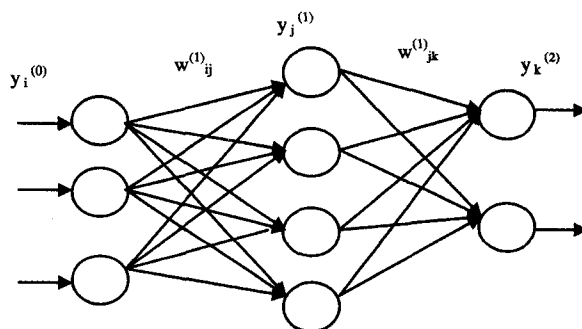


图 1 实现 Sammon 映射的神经网络模型

Mao 和 Jain 实现的神经网络在训练后能够把高维数据映射到低维空间,得到的投影结果如图 2。该方法包括两个阶段训练过程:在第一阶段使用标准的 BP 算法;在第二阶段使用改进的无监督的 BP 进行细微调整。

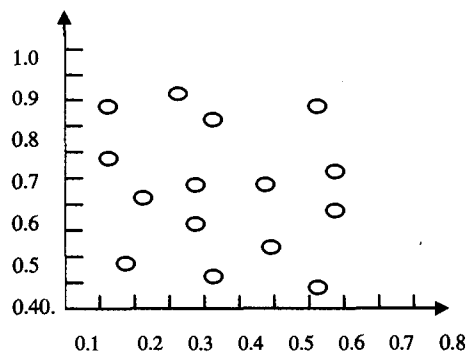


图 2 Sammon 映射下训练样本在平面上的投影

假定自组织特征映射图的大小为  $M \times N$ ,该算法是根据训练样本来初始化神经元的权值向量,使得该初始映射图用 Kohonen 的 SOFM 算法进行训练,能够快速收敛。如图 3 所示,该方法根据一定的准则,一般是距离度量,首先初始化四个角落神经元的权重向量,接着是边界上的神经元,最后是其他神经元,具体描述如下:

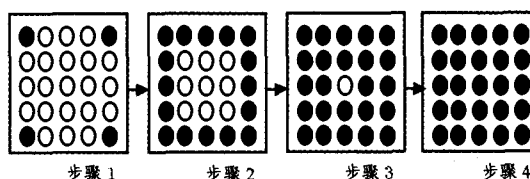


图 3 三步骤神经元连接权值初始化过程

步骤 1 初始化特征映射图的四个角落神经元的权值向

量

如图 4 所示,首先从训练样本中,挑选出两个距离最远的输入样本,并且以这两个输入样本来初始化特征映射图中的左下角以及右下角的两个权值向量,记为  $w_{M,1}$  和  $w_{1,N}$ ,再从其余训练样本中挑选一个与上述两点距离最远的样本,并且以这个输入样本来初始化特征映射图中的左上角神经元的权值向量  $w_{1,1}$ ,再从其余的训练样本中挑选出一个与上述三点距离最远的资料,并且以这个样本来初始化特征映射图中的右下角的连接值向量,记为  $w_{M,N}$ 。

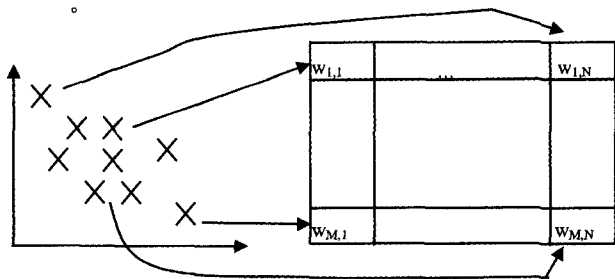


图 4 映射图中角落神经元连接权值的初始化方式

步骤 2 初始化特征映射图中的四个边界

接着按照下列公式,依序来初始化特征映射图中四个边界上的各神经元的连接值向量:

$$w_{1,j} = \frac{w_{1,N} - w_{1,1}}{N-1} (j-1) + w_{1,1} = \frac{j-1}{N-1} w_{1,N} + \frac{N-j}{N-1} w_{1,1} \quad (j=2 \dots N-1) \quad (1)$$

$$w_{M,j} = \frac{w_{M,N} - w_{M,1}}{N-1} (j-1) + w_{M,1} = \frac{j-1}{N-1} w_{M,N} + \frac{N-j}{N-1} w_{M,1} \quad (j=2 \dots N-1) \quad (2)$$

$$w_{i,1} = \frac{w_{M,1} - w_{1,1}}{M-1} (i-1) + w_{1,1} = \frac{i-1}{M-1} w_{M,1} + \frac{M-i}{M-1} w_{1,1} \quad (i=2 \dots M-1) \quad (3)$$

$$w_{i,N} = \frac{w_{M,N} - w_{1,N}}{M-1} (i-1) + w_{1,N} = \frac{i-1}{M-1} w_{M,N} + \frac{M-i}{M-1} w_{1,N} \quad (i=2 \dots M-1) \quad (4)$$

步骤 3 初始化特征映射图中的其余神经元的权值向量

这些神经元的初始化方法的基本思想很直观。由于在空间中的两点可以形成一条直线,因此我们就依据连接值向量的坐标,平均地将次线段均分为  $(N-1)$  等分。我们依照由上往下、由左往右的方式,来初始化其余的连接值向量。如果我们交换初始化的顺序,最后的结果也是一样的。描述公式如下:

$$w_{i,j} = \frac{w_{i,N} - w_{i,1}}{N-1} (j-1) + w_{i,1} = \frac{j-1}{N-1} w_{i,N} + \frac{N-j}{N-1} w_{i,1} \quad (i=2 \dots M-1, j=2 \dots N-1) \quad (5)$$

结合式(1)~(5),可以用以下公式来表示:

$$w_{i,j} = \frac{(j-1)(i-1)}{(N-1)(M-1)} w_{M,N} + \frac{(j-1)(i-1)}{(N-1)(M-1)} w_{1,N} + \frac{(N-j)(i-1)}{(N-1)(M-1)} w_{M,1} + \frac{(N-j)(M-i)}{(N-1)(M-1)} w_{1,1} \quad (i=2 \dots M-1, j=2 \dots N-1) \quad (6)$$

15,根据上述方法初始化神经元的权重向量,得到初始映射图,如图 5 所示。

在本文中,采用高斯函数作为邻域函数。高斯邻域函数形式如下:

$$N_{j^*}(t) = \exp(-d_{j^*,i}^2 / 2\sigma^2(t)),$$

其中  $j^*$  为获胜神经元,  $d_{j^*,i}^2$  为获胜神经元  $j^*$  与神经元  $i$  的 Euclidean 距离;  $\sigma(t)$  为邻域半径,采用指数衰减函数:  $\sigma(t) = \sigma_0 \times \exp(-t/T)$ , 其中  $T$  为算法的迭代次数,  $t$  为当前学习次数,  $\sigma_0$  为邻域半径的初始值。学习函数  $\eta(t) = \eta \times (1/(1+t))$ , 其中  $\eta = 1.0$ 。这样可以将连接值向量的调整公式修正为

$$w_{j^*,i}(t+1) = w_{j^*,i}(t) + \eta(t) \times N_{j^*}(t) \times (p_i^k - w_{j^*,i}(t))$$

采用这种方法初始化神经元的权重向量,使初始映射图能够概要地表示输入训练数据的拓扑关系,因而用 Kohonen 的 SOM 算法对神经元的权值向量进行微调训练只需要较少的训练次数就可以收敛。图 6 和图 7 分别为迭代次数  $t=50$  次和  $t=98$  次的特征映射图。可以看出,当  $t=98$ ,该自组织映射图基本收敛,从而得到能够表示输入训练数据拓扑关系的自组织特征映射图。经过比较,使用传统的 Kohonen 算法,形成大致收敛效果的自组织映射图至少需要 1000 次,所以这个初始化方法可以有效改进传统的 SOM 算法。

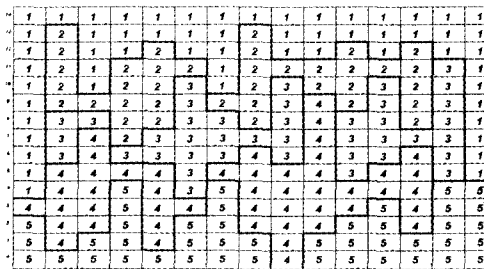


图 5 初始神经元映射图

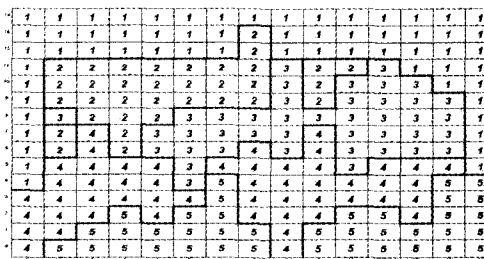


图 6 经过 50 次循环调整后的神经元映射图

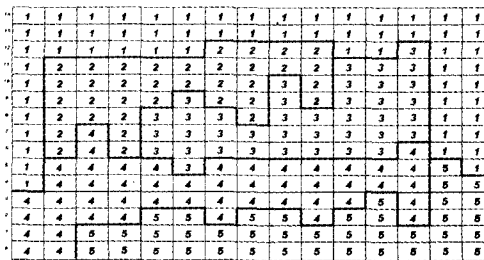


图 7 经过 98 次循环调整后的神经元映射图

结论 本文提出一种有效的自组织特征映射图初始化方法,该方法首先初始化特征映射图的四个角落神经元的权值向量,然后是边界神经元,最后初始化内部神经元的权值向量。这种方法形成的初始映射图基本保持了输入样本的拓扑关系,

3 实验结果及分析

本文以某市地下热水 103 多个井孔水质的 21 个特征值(如取样深度、总硬度、pH 值、各种离子等)作为 21 维输入训练数据,水质类型分为 5 类,设定自组织映射图大小为  $15 \times$

从而在细调阶段只需要较少的学习训练次数就可以使自组织特征映射图收敛,所以提高了SOFM算法的学习效率。

### 参考文献

- 1 Su M C, Chang H T. Fast Self-organizing Feature Map. IEEE Trans on Neural Networks, 2000,13:721~733
- 2 Kohonen T. Self-organizing Maps. New York, USA: Springer-Verlag, 1995
- 3 Harp S A, Samad T. Genetic optimization of self-organizing feature maps. In: Proc. Int Conf. Neural Networks, Seattle, WA, 1991. 341~346
- 4 Lo Z P, Bavarian B. On the rate of convergence in topology preserving neural networks. Biol Cybern, 1991, 65:55~63

- 5 Kiang M Y, Kulkarni U R, Goul M, et al. Improving the effectiveness of self-organizing map networks using a circular Kohonen layer. In: Proc. 30th Hawaii Int Conf System Sciences, 1997, 521~529
- 6 Kohonen T. The self-organizing map. Proceedings of the IEEE, 1990,78(9):1464~1480
- 7 Lerner B, Guterman H. On Pattern Classification with Sammon's Nonlinear Mapping-An Experimental Study. Proc. IEEE, 1994, 88:1464~1480
- 8 Sammon J W Jr. A nonlinear mapping for data structure analysis. IEEE Trans Comput, 1969, 18:401~409
- 9 袁曾任. 人工神经网络及其应用. 清华大学出版社, 1999. 299~305
- 10 张立明. 人工神经网络的模型及其应用. 复旦大学出版社, 1993

(上接第127页)

$A = \text{“室温低”} =$

$$\left\{ \frac{\langle 1,0 \rangle}{1} + \frac{\langle 0,7,0,2 \rangle}{2} + \frac{\langle 0,4,0,4 \rangle}{3} + \frac{\langle 0,0,9 \rangle}{4} + \frac{\langle 0,1 \rangle}{5} \right\},$$

$B = \text{“高电压”} =$

$$\left\{ \frac{\langle 0,1 \rangle}{1} + \frac{\langle 0,0,9 \rangle}{2} + \frac{\langle 0,4,0,4 \rangle}{3} + \frac{\langle 0,7,0,2 \rangle}{4} + \frac{\langle 1,0 \rangle}{5} \right\},$$

$A' = \text{“室温较低”} =$

$$\left\{ \frac{\langle 1,0 \rangle}{1} + \frac{\langle 0,6,0,3 \rangle}{2} + \frac{\langle 0,4,0,4 \rangle}{3} + \frac{\langle 0,2,0,7 \rangle}{4} + \frac{\langle 0,1 \rangle}{5} \right\}$$

这里以式(17)和式(18)为例,计算  $X \times Y$  上的直觉模糊蕴含关系  $R$ , 对于式(17),

$$R_{IB} = \int_{X \times Y} \langle \mu_B(y), \gamma_B(y) \rangle / (x, y)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \end{pmatrix}$$

$$B' = A \circ R = \langle \langle 1,0 \rangle \quad \langle 0,6,0,3 \rangle \quad \langle 0,4,0,4 \rangle \quad \langle 0,2,0,7 \rangle \quad \langle 0,1 \rangle \rangle$$

$$\circ \begin{pmatrix} \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \end{pmatrix}$$

$$B' = \langle \langle 0,1 \rangle \quad \langle 0,0,9 \rangle \quad \langle 0,4,0,4 \rangle \quad \langle 0,4,0,9 \rangle \quad \langle 1,0 \rangle \rangle$$

即

$$\frac{\langle 0,1 \rangle}{1} + \frac{\langle 0,0,9 \rangle}{2} + \frac{\langle 0,4,0,4 \rangle}{3} + \frac{\langle 0,4,0,9 \rangle}{4} + \frac{\langle 1,0 \rangle}{5}$$

所以需要调整较高的电压,符合实际。

对于式(18),列方阵可计算得

$$R_{LX} = \begin{pmatrix} \langle 0,1 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 1,0 \rangle \\ \langle 0,3,0,8 \rangle & \langle 0,3,0,8 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle & \langle 0,7,0,2 \rangle \\ \langle 0,6,0,6 \rangle & \langle 0,6,0,6 \rangle & \langle 0,6,0,4 \rangle & \langle 0,6,0,4 \rangle & \langle 0,4,0,4 \rangle \\ \langle 1,0,1 \rangle & \langle 1,0,1 \rangle & \langle 0,6,0,8 \rangle & \langle 0,3,0,8 \rangle & \langle 0,0,9 \rangle \\ \langle 1,0 \rangle & \langle 1,0 \rangle & \langle 0,6,0,6 \rangle & \langle 0,3,0,8 \rangle & \langle 0,1 \rangle \end{pmatrix}$$

$$B = A \circ R = \langle \langle 0,4,0,6 \rangle \quad \langle 0,4,0,6 \rangle \quad \langle 0,4,0,4 \rangle \quad \langle 0,7,0,2 \rangle \quad \langle 1,0 \rangle \rangle$$

因此可以调整较高的电压,符合实际。从上面两式的结

果看出,这两个方法在解决此类问题都取得了较好的效果。式(8),(10),(12)和(14)同样可以解决上述推理问题,这里从略。

**结论** 在具体问题中,选择哪一种模糊蕴含式的运算方法,可以根据具体问题选择。直觉模糊集是对经典模糊集的有效扩展,其数学描述较之经典模糊集理论更加符合客观世界模糊对象的本质,因而形成新的研究热点。但目前直觉模糊集的研究处在发展阶段,直觉模糊集的模糊推理仍然有许多问题需要解决。本文从扩展二值逻辑出发,给出扩展的二值逻辑与模糊蕴含关系式的关系,进而给出基于扩展二值逻辑的模糊蕴含关系运算方法,再将经典模糊集拓展到直觉模糊集,提出了基于扩展二值逻辑的直觉模糊集的模糊蕴含式的计算方法,通过一个具体的简单模糊推理示例验证了这些直觉模糊集蕴含方法的正确性和有效性。

从基于卡诺图化简的扩展二值逻辑蕴含式出发,得到传统模糊逻辑蕴含式的运算方法,进而拓展到直觉模糊集下的模糊蕴含式,这个过程思路简洁直观。基于直觉模糊集的多维模糊推理,多重模糊推理等可进一步进行研究。

### 参考文献

- 1 Zadeh L A. Outline of a new approach to a new analysis of complex system and decision processes. IEEE trans. on Syst. Man and Cybernetics, 1973(3):28~34
- 2 Mamdani E H. Applications of fuzzy algorithms for simple dynamic plant. Proceedings of IEE, 1974(121):1585~1588
- 3 Ying M S. Reasonableness of the compositional rule of fuzzy inference. Fuzzy Sets System, 1990, 36:305~310
- 4 Ying M S. Perturbation of fuzzy reasoning. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 1990, 7:626~630
- 5 Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Boston, MA: Kluwer, 1998
- 6 Novak V, Perfilieva I. Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Boston, MA: Kluwer, 1999
- 7 Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1):87~96
- 8 Gau W L, Buehrer D J. Vague sets. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610~614
- 9 Bustine H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79:403~405
- 10 朱小栋,等. 基于扩展二值逻辑的模糊蕴含式运算方法研究. 计算机科学, 2006, 33(11. A): 98~100