直觉模糊集的模糊蕴含式运算方法

朱小栋　黄志球
(南京航空航天大学信息科学与技术学院　南京 210016)

摘　要　与经典模糊集相比，直觉模糊集具有更强的表达能力和灵活性。针对直觉模糊集的模糊推理，将经典的模糊集的模糊蕴含式拓展到直觉模糊集中，提出基于扩展二值逻辑的直觉模糊集下各种模糊蕴含式运算方法，通过实例验证直觉模糊集模糊蕴含式运算方法的有效性和正确性。

关键词　模糊集，直觉模糊集，模糊推理，模糊蕴含

Fuzzy Implication Operation Methods of Intuitionistic Fuzzy Sets

ZHU Xiao-Dong　HUANG Zhi-Qiu
(College of Information Science & Technology, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract　Compared with traditional fuzzy set, Intuitionistic fuzzy set has stronger expressivity and flexibility. The Choice of the fuzzy implication is a significant problem in the theoretic development of the fuzzy set, many operation methods on the fuzzy implication were proposed in the past decades. In this paper, we extend this problem from traditional fuzzy set to intuitionistic fuzzy set. From the perspective of expanded two logic implication, several fuzzy implication operation methods of intuitionistic fuzzy sets are presented. Finally we give a concrete demonstration to validate these methods.

Keywords　Fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy reasoning, Fuzzy implication

1　引言

自从 1965 年 Zadeh 提出 fuzzy 集理论以来，模糊集理论和模糊推理得到了广泛的研究。模糊推理是模拟人脑日常推理方式的一种近似推理，是模糊控制技术的数学核心。1973 年 Zadeh 首次提出模糊推理的基本框架[1]，1974 年，英国数学家 Mamdani 首次将模糊推理技术应用到工业自动控制技术并获得成功[2]。众所周知，模糊推理已成为了理论基础，以及设计模糊控制器的重要工具，并在工业某些领域应用中取得了成功，如智能控制。但模糊逻辑的数学基础仍然有许多严重的问题需要解决，这导致了一些深入研究[3~6]。其中的一个问题就是模糊蕴含式的选择，因为蕴含是任何逻辑系统里的主要连接，它对模糊逻辑应用的系统的运行有着强大的影响。

1986 年 Atanassov 进一步拓展了模糊集，提出了直觉模糊集 IFS(intuitionistic fuzzy set)的概念[7]，直觉模糊集是模糊集的推广，模糊集实际上是直觉模糊集的特化。Gau 和 Buehrer 于 1993 年提出了 Vague 集的概念[8]，然而，Bustine 指出 vague 集就是直觉模糊集[9]。直觉模糊集同时考虑非空集上元素隶属度与非隶属度两方面的信息，这使得直觉模糊集在处理不确定性信息时比传统的模糊集有更强的表达能力，更具灵活性。

文[10]研究了基于扩展的二值逻辑的经典模糊集的模糊蕴含式，本文首先给出运用卡诺图方法得到二值逻辑蕴含化简式，从扩展的二值逻辑开始，并将经典模糊集拓展到直觉模糊集，给出直觉模糊集下模糊蕴含式的各种公式。本文第 2 节介绍直觉模糊集的相关概念和定义，以及直觉模糊集的运算。第 3 节扩展经典模糊逻辑的模糊蕴含式运算方法，给出直觉模糊集下各种模糊蕴含式运算方法。第 4 节运用直觉模糊蕴含运算方法对一个实例进行直觉模糊推理。最后是本文的总结。

2　直觉模糊集定义

定义 2.1　设 X 是一个给定论域，则 X 上的一个直觉模糊集 A 为

$$A=\{\langle x,\ \mu_A(x),\ \gamma_A(x)\rangle \mid x\in X\}$$

其中 $\mu_A(x):X\to[0,1]$代表 A 的隶属函数，$\gamma_A(x):X\to[0,1]$代表 A 的非隶属函数，且对于 A 上的所有 $x\in X$，$0\leqslant\mu_A(x)+\gamma_A(x)\leqslant 1$ 成立。

定义 2.2　X 上一切直觉模糊集的集合称为 X 上直觉模糊集的簇集，记为 $\mathscr{I}(X)$。

当 X 为连续空间时，

$$A=\int_X \langle\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle/x,\ x\in X$$

当 X 为离散空间时，

$$A=\sum_{i=1}^{n}\langle\mu_A(x_i),\gamma_A(x_i)\rangle/x_i,\ x_i\in X,\ i=1,2,\cdots,n$$

直觉模糊集 A 有时简记作 $A=\langle x,\mu_A,\gamma_A\rangle$。显然，每一个传统模糊集对应于下列直觉模糊子集 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\ 1-\mu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$，即传统模糊集是 $\gamma_A=1-\mu_A(x)$的特例。

对于 X 中的每一个直觉模糊集，我们称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$为 A 中 x 的直觉指数，它表示 x 对 A 的犹豫程度。显然，对于每一个 $x\in X$，$0\leqslant\pi_A(x)\leqslant 1$，对于 X 中的每一个一般模糊集 A，有 $\forall x\in X,\pi_A(x)=0$。例如$\langle\mu_A(x)=0.5,\ \gamma_A(x)=0.3\rangle$，在投票模型中，这可解释为在 10 人中，有 5 人赞成，3 人反对，2 人弃权。

定义 2.3　给定论域 X，设 $A\in\mathscr{I}(X)$，$B\in\mathscr{I}(X)$，则有

(1) $A=B\Leftrightarrow\forall x\{x\in X\to(\mu_A(x)=\mu_B(x))\wedge(\gamma_A(x)=\gamma_B(x))\}$

(2) $A\leqslant B\Leftrightarrow\forall x\{x\in X\to(\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x))\wedge(\gamma_A(x)\geqslant\gamma_B(x))\}$

(3) $A\cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\gamma_A(x)\vee\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in X\}$

朱小栋　博士生，研究方向为模糊推理，数据仓库与数据挖掘。**黄志球**　博导，教授，研究方向为工程数据库，软件测试与软件度量。

(4)$A\cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(x)\rangle\mid\forall x\in X\}$

(5)$\overline{A}=\{\langle x,\gamma_A(x),\mu_A(x)\rangle\mid\forall x\in X\}$

3 基于直觉模糊集的模糊蕴含关系

文[10]中给出了基于扩展二值逻辑的模糊蕴含式运算方法，表1是扩展 $A\to B$ 逻辑式卡诺图化简式。其思路是从卡诺图化简式出发，分析已有的模糊蕴含式的运算方法与卡诺图化简式的关系，在此基础上，给出基于扩展的二值逻辑化简式的模糊蕴含运算方法。下面我们将这些模糊蕴含式再拓展到直觉模糊集上。这里，从传统模糊集向直觉模糊集的拓展基于以下三个规则：

(1)满足普通集是模糊集的特例，传统模糊集是直觉模糊集的特例。

(2)直觉模糊蕴含式运算结果需在[0,1]上，若超出1，则取1，若小于0，则取0。

(3)直觉模糊集的隶属度和非隶属度在运算方法中具有对偶性。

表1 扩展 $A\to B$ 逻辑式卡诺图化简式

$A\to B$			
①	②	③	④
$B+\overline{A}$	$AB+\overline{A}B$	$AB+\overline{A}\overline{B}$	AB
$AB+\overline{A}$	$\overline{A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}}$	$\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}$	$\overline{\overline{B}+\overline{A}}$
$\overline{A\overline{B}}+B$	B		
$\overline{A\overline{B}}$			

对情况①，

(1)若二值逻辑 $A\to B=\overline{A}+B$，相应模糊逻辑是

$$(\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B})(x,y)=(1-\underset{\sim}{A}(x))\vee\underset{\sim}{B}(y) \tag{1}$$

(2)若二值逻辑 $A\to B=AB+\overline{A}$，相应模糊逻辑是

$$(\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B})(x,y)=[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(y)]\vee[1-\underset{\sim}{A}(x)] \tag{2}$$

对于情况②，二值逻辑 $A\to B=AB+\overline{A}B=B$，相应的模糊逻辑是

$$(\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B})(x,y)=\underset{\sim}{B}(y)=[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(y)]\vee[(1-\underset{\sim}{A}(x))\vee\underset{\sim}{B}(y)] \tag{3}$$

对于情况③，二值逻辑 $A\to B=AB+\overline{A}\overline{B}$，模糊逻辑

$$(\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B})(x,y)=[\underset{\sim}{A}(x)\wedge(\underset{\sim}{B}y)]\vee[(1-\underset{\sim}{A}(x))\wedge(1-\underset{\sim}{B}(y))] \tag{4}$$

对于情况④，二值逻辑 $A\to B=AB$，可以扩展模糊逻辑：

$$(\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B})(x,y)=\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(y) \tag{5}$$

$$(\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B})(x,y)=\underset{\sim}{A}(x)\cdot\underset{\sim}{B}(y) \tag{6}$$

Mamdani 提出了模糊蕴含最小运算：

$$R_c=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))/(x,y) \tag{7}$$

验证了情况④中(式5)，相应进行直觉化扩展后，

$$R_{I_c}=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}\langle(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)),\gamma_A(x)\vee\gamma_B(y)\rangle/(x,y) \tag{8}$$

Zadeh 提出了模糊蕴含的最大最小运算：

$$R_m=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))\vee(1-\mu_A(x))/(x,y) \tag{9}$$

验证了情况①中的式(2)，我们相应进行直觉化扩展后，得到

$$R_{Im}=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}\langle(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))\vee(1-\mu_A(x)),(\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(y))\vee(1-\gamma_A(x))\rangle/(x,y) \tag{10}$$

以及模糊蕴含的布尔运算：

$$R_b=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}(1-\mu_A(x))\vee\mu_B(y)/(x,y) \tag{11}$$

验证了情况①中的式(1)，并给出了相应的证明，我们拓展到直觉模糊集得到

$$R_{Ib}=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}\langle(1-\mu_A(x)))\vee\mu_B(y),1-\gamma_A(x))\wedge\gamma_B(y)\rangle/(x,y) \tag{12}$$

Larsen 提出了模糊蕴含积运算：

$$R_p=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}\mu_A(x)\mu_B(y)/(x,y) \tag{13}$$

验证了情况④中的式(6)，我们拓展到直觉模糊集得到

$$P_{Ip}=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}\langle\mu_A(x)\mu_B(y),\gamma_A(x)\gamma_B(y)\rangle/(x,y) \tag{14}$$

文[12]基于上述之推导，从情况②，③出发，提出两种 $\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$ 运算规则，

$$R_B=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))\vee(1-\mu_A(x))\wedge\mu_B(y)/(x,y)=\int_{X\times Y}\mu_B(y)/(x,y) \tag{15}$$

$$R_X=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\int_{X\times Y}[A(x)\wedge B(y)]\vee[(1-A(x))\wedge(1-\mu_B(y))]/(x,y) \tag{16}$$

这里再将情况②，③拓展到直觉模糊集得到

$$\begin{aligned}R_{IB}&=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}\\&=\int_{X\times Y}\langle(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))\vee(1-\mu_A(x))\wedge\mu_B(y),(\gamma_A(x)\vee\gamma_B(y))\wedge(1-\gamma_A(x)\vee\gamma_B(y))\rangle/(x,y)\\&=\int_{X\times Y}\langle\mu_B(y),\gamma_B(y)\rangle/(x,y)\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}R_{LX}&=\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}\\&=\int_{X\times Y}\langle[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)]\vee[(1-\mu_A(x))\wedge(1-\mu_B(y))],[\gamma_A(x)\vee\gamma_B(y)]\wedge[(1-\gamma_A(x))\vee(1-\gamma_B(y))]\rangle/(x,y)\end{aligned} \tag{18}$$

以式(18)为例，我们证明直觉模糊蕴含式运算方法的合理性。$1-\mu_A(x),1-\mu_B(y)\in(0,1)$，所以 $(1-\mu_A(x))\wedge(1-\mu_B(y))\in(0,1)$，又 $\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\in(0,1)$，进而 $[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)]\vee[(1-\mu_A(x))\wedge(1-\mu_B(y))]\in(0,1)$，同理可得：

$[\gamma_A(x)\vee\gamma_B(y)]\wedge[(1-\gamma_A(x))\vee(1-\gamma_B(y))]\in(0,1)$，证毕。

式(17)和式(18)是文[10]提出的基于传统模糊集的模糊蕴含式运算方法的拓展，我们同样采用卡诺图方法化简扩展的二值逻辑蕴含式，再建立扩展的二值逻辑蕴含式与已有的模糊逻辑蕴含式运算方法之间的关系，继而拓展到直觉模糊集，沿着这个思路，提出在直觉模糊集下模糊蕴含式的运算方法。

4 直觉模糊集推理

广义正向模糊推理的数学形式是：

大前提，x 是 A，则 y 是 B，即 $\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$

小前提，x 是 A'

结论：y 是 $\underset{\sim}{B'}=\underset{\sim}{A'}\circ(A\to B)=\underset{\sim}{A'}\circ\underset{\sim}{R}$

其中"$\circ$"是合成运算，"$\underset{\sim}{R}$"是蕴含关系。我们称这种最基本的推理模型为简单模糊推理机，许多较复杂的模型可以转化为这种模型。我们基于直觉模糊集来解决以下问题：

调节室温有下列经验，"若室温低，则将加热器电压调高。"现在室温较低，问怎样调节加热器电压？

建立论域 $X=Y=\{1,2,3,4,5\}$

(下转第131页)

从而在细调阶段只需要较少的学习训练次数就可以使自组织特征映射图收敛，所以提高了 SOFM 算法的学习效率。

参 考 文 献

1 Su M C, Chang H T. Fast Self-organizing Feature Map. IEEE Trans on Neural Networks, 2000,13:721～733

2 Kohonen T. Self-organizing Maps. New York, USA: Springer-Verlag,1995

3 Harp S A, Samad T. Genetic optimization of self-organizing feature maps. In: Proc. Int Conf. Neural Networks, Seattle, WA, 1991. 341～346

4 Lo Z P, Bavarian B. On the rate of convergence in topology preserving neural networks. Biol Cybern, 1991, 65:55～63

5 Kiang M Y, Kulkarni U R, Goul M, et al. Improving the effectiveness of self-organizing map networks using a circular Kohonen layer. In: Proc. 30th Hawaii Int Conf System Sciences, 1997. 521～529

6 Kohonen T. The self-organizing map. Proceedings of the IEEE, 1990, 78(9):1464～1480

7 Lerner B, Guterman H. On Pattern Classification with Sammon's Nonlinear Mapping-An Experimental Study. Proc. IEEE, 1994, 88:1464～1480

8 Sammon J W Jr. A nonlinear mapping for data structure analysis. IEEE Trans Comput, 1969, 18:401～409

9 袁曾任. 人工神经元网络及其应用. 清华大学出版社，1999. 299～305

10 张立明. 人工神经网络的模型及其应用. 复旦大学出版社，1993

（上接第 127 页）

$\underset{\sim}{A}$="室温低"=

$$\left\{\frac{\langle 1,0\rangle}{1}+\frac{\langle 0.7,0.2\rangle}{2}+\frac{\langle 0.4,0.4\rangle}{3}+\frac{\langle 0,0.9\rangle}{4}+\frac{\langle 0,1\rangle}{5}\right\},$$

$\underset{\sim}{B}$="高电压"=

$$\left\{\frac{\langle 0,1\rangle}{1}+\frac{\langle 0,0.9\rangle}{2}+\frac{\langle 0.4,0.4\rangle}{3}+\frac{\langle 0.7,0.2\rangle}{4}+\frac{\langle 1,0\rangle}{5}\right\},$$

A'="室温较低"=

$$\left\{\frac{\langle 1,0\rangle}{1}+\frac{\langle 0.6,0.3\rangle}{2}+\frac{\langle 0.4,0.4\rangle}{3}+\frac{\langle 0.2,0.7\rangle}{4}+\frac{\langle 0,1\rangle}{5}\right\}$$

这里以式(17)和式(18)为例，计算 $X\times Y$ 上的直觉模糊蕴含关系 $\underset{\sim}{R}$，对于式(17)，

$$R_{IB}=\int_{X\times Y}\langle \mu_B(y),\gamma_B(y)\rangle/(x,y)$$

$$=\begin{pmatrix}\langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\end{pmatrix}$$

$$B'=\underset{\sim}{A}\circ R=(\langle 1,0\rangle\ \ \langle 0.6,0.3\rangle\ \ \langle 0.4,0.4\rangle\ \ \langle 0.2,0.7\rangle\ \ \langle 0,1\rangle)$$

$$\circ\begin{pmatrix}\langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\end{pmatrix}$$

$$B'=(\langle 0,1\rangle\ \langle 0,0.9\rangle\ \langle 0.4,0.4\rangle\ \langle 0.4,0.9\rangle\ \langle 1,0\rangle)$$

即

$$\frac{\langle 0,1\rangle}{1}+\frac{\langle 0,0.9\rangle}{2}+\frac{\langle 0.4,0.4\rangle}{3}+\frac{\langle 0.4,0.9\rangle}{4}+\frac{\langle 1,0\rangle}{5}$$

所以需要调整较高的电压，符合实际。

对于式(18)，列方阵可计算得

$$R_{LX}=$$

$$\begin{pmatrix}\langle 0,1\rangle & \langle 0,0.9\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 1,0\rangle\\ \langle 0.3,0,8\rangle & \langle 0.3,0.8\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle & \langle 0.7,0.2\rangle\\ \langle 0.6,0.6\rangle & \langle 0.6,0.6\rangle & \langle 0.6,0.4\rangle & \langle 0.6,0.4\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle\\ \langle 1,0.1\rangle & \langle 1,0.1\rangle & \langle 0.6,0.8\rangle & \langle 0.3,0.8\rangle & \langle 0,0.9\rangle\\ \langle 1,0\rangle & \langle 1,0\rangle & \langle 0.6,0.6\rangle & \langle 0.3,0.8\rangle & \langle 0,1\rangle\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ R=(\langle 0.4,0.6\rangle\ \ \langle 0.4,0.6\rangle\ \ \langle 0.4,0.4\rangle\ \ \langle 0.7,0.2\rangle\ \ \langle 1,0\rangle)$$

因此可以调整较高的电压，符合实际。从上面两式的结果看出，这两个方法在解决此类问题都取得了较好的效果。式(8)，(10)，(12)和(14)同样可以解决上述推理问题，这里从略。

结论 在具体问题中，选择哪一种模糊蕴含式的运算方法，可以根据具体问题选择。直觉模糊集是对经典模糊集的有效扩展，其数学描述较之经典模糊集理论更加符合客观世界模糊对象的本质，因而形成新的研究热点。但目前直觉模糊集的研究处在发展阶段，直觉模糊集的模糊推理仍然有许多问题需要解决。本文从扩展二值逻辑出发，给出扩展的二值逻辑与模糊蕴含关系式的关系，进而给出基于扩展二值逻辑的模糊蕴含关系运算方法，再将经典模糊集拓展到直觉模糊集，提出了基于扩展二值逻辑的直觉模糊集的模糊蕴含式的计算方法，通过一个具体的简单模糊推理示例验证了这些直觉模糊集蕴含方法的正确性和有效性。

从基于卡诺图化简的扩展二值逻辑蕴含式出发，得到传统模糊逻辑蕴含式的运算方法，进而拓展到直觉模糊集下的模糊蕴含式，这个过程的思路简洁直观。基于直觉模糊集的多维模糊推理，多重模糊推理等可进一步进行研究。

参 考 文 献

1 Zadeh L A. Outline of a new approach to a new analysis of complex system and decision processes. IEEE trans. on Syst. Man and Cybernetics, 1973(3):28～34

2 Mamdani E H. Applications of fuzzy algorithms for simple dynamic plant. Proceedings of IEE, 1974(121):1585～1588

3 Ying M S. Reasonableness of the compositional rule of fuzzy inference. Fuzzy Sets System, 1990, 36:305～310

4 Ying M S. Perturbation of fuzzy reasoning. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 1990, 7:626～630

5 Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Boston: MA: Kluwer, 1998

6 Novak V, Perfilieva I. Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Boston: MA: Kluwer, 1999

7 Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1):87～96

8 Gau W L, Buehrer D J. Vague sets. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610～614

9 Bustine H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79:403～405

10 朱小栋，等. 基于扩展二值逻辑的模糊蕴涵式运算方法研究. 计算机科学，2006, 33(11.A): 98～100