带形状参数的指数均匀 B 样条模型*)

赵颜利　郭成昊　刘凤玉
（南京理工大学计算机系　南京 210094）

摘　要　本文给出了 $k(k\geqslant 2)$ 阶带形状参数指数多项式的均匀 B 样条模型。该类模型具有很多与 B 样条模型相同的性质，并且具有一个可调节的形状参数。由该模型构造的曲线，通过改变形状参数的取值，可以调整曲线接近其控制多边形的程度。该模型可以应用于 CAD/CAM 领域，作为几何造型一种新的有效模型。

关键词　带形状参数指数均匀 B 样条，均匀 B 样条，计算机辅助几何设计

Exponential Uniform B-Spline with Shape Parameter

ZHAO Yan-Li　GUO Cheng-Hao　LIU Feng-Yu
(Department of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract　A new model of $k(k\geqslant 2)$ order exponential uniform B-spline with shape parameter is given. Most of its properties similar to those of the B-spline model , and also it has a shape parameter . The spline curves which are constructed by the exponential uniform B-spline with shape parameter can adjust the curve's shape and the degrees between the curve and its control polygon with changing the parameter value. The new model can be applied to the field of CAD/CAM.

Keywords　Exponential uniform B-spline with shape parameter, Uniform B-pline, CAGD

1　引言

计算机辅助几何设计中有很多经典的曲线造型工具，如 Bezier 曲线、B 样条曲线等。此类经典的曲线模型具有许多优良的性质，在实际工程中也得到了广泛的应用。但也有许多不足之处，如 B 样条曲线只能表示多项式曲线，对于 CAD/CAM 中常见的曲线如圆、摆线、双曲线等，它只能近似表示，且对于给定的控制点，均匀 B 样条曲线的位置是确定的。若调整曲线的形状，必须调整控制多边形。

为了克服这些局限，很多文献中提出了新的模型，如文[1,2]中，张纪文提出了由 $\{\sin t,\cos t,t,1\}$ 的线性组合得到的 C-B 样条曲线。C-B 样条曲线是三次均匀样条的一个推广，且可以精确地表示椭圆和圆弧段。文[3,4]中，Mainar 等人在空间 $\mathrm{Span}\{\sin t,\cos t,t^2,t,1\}$ 和 $\mathrm{Span}\{1,t,\cos t,\sin t,t\cos t,t\sin t\}$ 上给出正规 B 基。文[5]中构造了二次带形状参数的曲线，可以在控制多边形不变的情况下，调节参数的大小来调节曲线形状，形状参数的调整范围为$[-1,1]$。但是以上模型都是针对低阶情况，故文[6]给出了构造任意阶曲线的模型，构造了一类拟 Bezier 曲线。文[7]构造了任意阶的 NUAT 样条曲线，但它们存在的问题是对于固定的控制点，其样条曲线是固定的，必须调整控制多边形，才能调整曲线的形状。更一般地，本文提出了 k 阶$(k\geqslant 2)$的带形状参数的指数均匀 B 样条模型，它具有凸包性、局部性、归一性、对称性等 B 样条的优良性质，并且同时具有一个可调节的形状参数，可以达到 C^2 连续。在控制多边形不变的情况下，它能生成不同位置的曲线，更好地逼近控制多边形，同时参数的取值范围大于$[-1,1]$。

2　带形状参数的指数均匀 B 样条基函数的构造与性质

记 $t_i=\{i: i=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ 为对参数 t 轴做均匀分割得到的一组节点。记在节点处达到 $k-2$ 阶连续的分段 k 阶指数多项式的空间为 Ω_k，空间 Ω_k 是一线性空间。在空间 Ω_k $(k\geqslant 3)$上给出一组基，这组基具有与均匀 B 样条基相同的性质，如正性、归一性、对称性和局部支集性等，这儿称之为带形状参数的指数均匀 B 样条基。

考虑到正性、归一性、对称性等性质，为构造 $k\geqslant 3$ 时 Ω_k 上的基函数，我们首先定义二阶基函数为

$$N_{0,2}(\lambda,t)=\begin{cases}a(e^{2t}-e^{-2t})+b(e^{t}-e^{-t}), & 0\leqslant t<1\\ a(e^{4-2t}-e^{2t-4})+b(e^{2-t}-e^{t-2}), & 1\leqslant t<2\end{cases}$$

$$N_{i,2}(t)=N_{0,2}(t-i)\qquad i=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{1}$$

$N_{0,2}(\lambda,t)$是 $t\in[0,2]$内关于 $t=1$ 对称，且 C^0 连续（零阶点连续）的分段二次函数，在区间端点间 $N(\lambda,0)=N(\lambda,2)=0$。同时为满足 $k\geqslant 3$ 时 Ω_k 上的基函数的归一性，须满足下列条件：

$$\int_0^2 N_{0,2}(\lambda,t)\mathrm{d}t=0 \tag{2}$$

由式(1)、(2)得到 $\frac{a}{e^2}(e^2-1)+\frac{2b}{e}(e-1)^2=1$

若令 $a=\frac{e^2(\lambda+1)}{(e^2-1)^2}$，则 $b=\frac{-e\lambda}{2(e-1)^2}$。将 a、b 代入上式，得到如下公式：

$$N_{0,2}(t)=$$

$$\begin{cases}\frac{e^2(\lambda+1)}{(e^2-1)^2}(e^{2t}-e^{-2t})+\frac{-e\lambda}{2(e-1)^2}(e^{t}-e^{-t}), & 0=t<1\\ \frac{e^2(\lambda+1)}{(e^2-1)^2}(e^{4-2t}-e^{2t-4})+\frac{-e\lambda}{2(e-1)^2}(e^{2-t}-e^{t-2}), & 1=t<2\end{cases}$$

当 $k=3$ 时，定义下列递推公式：

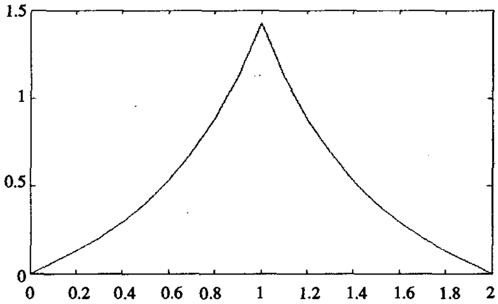
$$N_{0,k}(t)=\int_{-1}^{t}S_{0,k-1}(x)\mathrm{d}x$$

$$N_{i,k}(t)=S_{0,k}(t-i)\ ,\ i=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

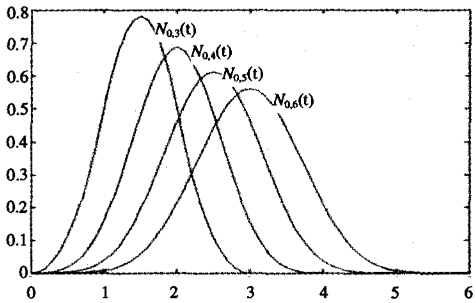
称 $N_{i,k}(t)$ $(i=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$为 k 阶带形状参数的指数均匀B 样条的基函数，其中 λ 为形状可调节的参数，其取值范围为$\left[\frac{-2e(e^2+1)}{2e^3-e^2-1},\frac{4e}{(e-1)^2}\right]$。在实际应用中，可以根据需要确定其具体取值。当 $k=3$ 时，根据上述定义可以得到

*）国家自然科学基金资助项目(60273035)。

$N_{i,k}(t)$所具有的性质,说明 $N_{i,k}(t)$为空间 Ω_k 的一组基。图1分别显示了两阶带形状参数的指数均匀 B 样条基函数和 3～6 阶的带形状参数的指数均匀 B 样条基函数图像,其中 $\lambda=0.5$。

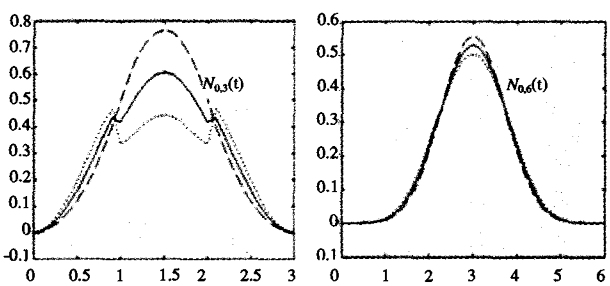


(a) 两阶带形状参数的指数均匀 B 样条基函数图像



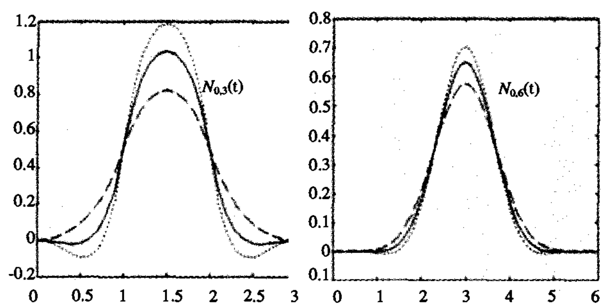
(b) 3～6 阶带形状参数的指数均匀 B 样条基函数图像

图 1　各阶带形状参数的指数均匀 B 样条基函数的形状图



虚线 $\lambda=-1$;　实线 $\lambda=-6$;点线 $\lambda=-8$)

(a) $N_{0,k}(t)$基函数图(k=3,5)



虚线 $\lambda=3$;　实线 $\lambda=5$;点线 $\lambda=20$)

(b) $N_{0,k}$基函数图(k=3,5)

图 2　λ 取不同值,$N_{0,k}$基函数图($k=3,5$)

定义中给出的形状参数 λ 的取值范围,是指 $N_{i,2}(t)$中形状参数的取值范围。为满足 $N_{i,2}(t)$非负性,需保证 $t\in(0,1)$时,$a(e^x-1)+b(e^{2x}-1)\geqslant 0$,由此求得 λ 的取值范围为 $\left[\frac{-2e(e^2+1)}{2e^3-e^2-1},\frac{4e}{(e-1)^2}\right]$。实际上,随着阶数的增加,形状参数的取值范围还可以扩大。图 2 为形状参数 λ 取值不同的时候,三阶和五阶带形状参数的指数均匀 B 样条基函数比较图。表 1 给出了 3～6 阶带形状参数的指数均匀 B 样条的形状参数 λ 取值范围。

从图 2(a)可以看出对于固定的 k,当 $\lambda<0$ 时,随着 λ 的减小,超出取值范围后基函数变为负数;但当随着阶数 k 的增加,其函数图像最终变为非负。图 2(b)可以看出对于固定的 k,当 $\lambda>0$ 时,随着 λ 的增大,带形状参数的指数均匀 B 样条基函数出现多峰现象,最终出现负值,但随着阶数 k 的增加,其函数图像最终变为单峰和非负。

表 1　形状参数 λ 的取值范围

3～6 阶指数多项式的形状参数 λ	取值范围
2 阶指数多项式	$\leqslant\lambda\leqslant 3.68$
3 阶指数多项式	$-20.95\leqslant\lambda\leqslant 3.74$
4 阶指数多项式	$-25.01\leqslant\lambda\leqslant 3.81$
5 阶指数多项式	$-34.56\leqslant\lambda\leqslant 4.25$
6 阶指数多项式	$-42.62\leqslant\lambda\leqslant 4.51$

k 阶带形状参数的指数均匀 B 样条基函数具有如下性质:

性质 1　非负性

$N_{i,k}(t)\geqslant 0,\ t\in(-\infty,+\infty)$

由定义知,对于 $t\in(-\infty,+\infty)$,$S_{i,2}(t)\geqslant 0$,

由公式 $N_{0,k}(t)=\int_{t-1}^{t}N_{0,k-1}(d)\mathrm{d}x$

可得 $N_{0,3}(t)=\int_{t-1}^{t}N_{0,2}(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$

类推得 $N_{0,k}(t)=\int_{t-1}^{t}N_{0,k-1}(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$

再由定义公式可得 $N_{i,k}(t)=N_{0,k}(t-i)\geqslant 0$

性质 2　局部支集性

$$N_{i,k}(t)=\begin{cases}>0, t<\in(i,i+k)\\ =0,\text{其他}\end{cases}$$

性质 3　归一性

$\sum_i N_{i,k}(t)=1\quad k=3$

证明:对于 $t\in[i,i+1]$,

$\sum_i N_{i,k}(t)=\sum_{j=i-k+1}^{i}N_{j,k}(t)$

当 $k=3$ 时,$\sum_{j=i-2}^{i}N_{j,3}(t)=1$ 显然成立。

假设当 $n=k$ 成立,即$\sum_i N_{i,n}(t)=1$

则当 $n=k+1$ 时,

$\sum_i N_{i,n+1}(t)=\sum_i\int_{t-1}^{t}N_{i,n}(t)\mathrm{d}t=\int_{t-1}^{t}\sum_i N_{i,n}(t)\mathrm{d}t=\int_{t-1}^{t}\mathrm{d}t=1$

性质 4　求导公式

$N'_{i,k}(t)=N_{i,k-1}(t)-N_{i+1,k-1}(t)$

$N'_{i,k}(t)=(\int_{t-1}^{t}N_{i,k-1}(t))'=N_{i,k-1}(t)-N_{i,k-1}(t-1)=N_{i,k-1}(t)-N_{i+1,k-1}(t)$

性质 5　对称性

$N_{i,k}(i+k-t)=N_{i,k}(i+t)$

证明:当 $k=2$ 时,$N_{i,k}(i+k-t)=N_{i,2}(i+2-t)=N_{0,2}(2-t)$,$N_{i,k}(i+t)=N_{i,2}(i+t)=N_{0,2}(t)$

由定义构造条件 1)可知,$N_{0,2}(2-t)=N_{0,2}(t)$

故当 $k=2$ 时,$N_{i,k}(i+k-t)=N_{i,k}(i+t)$

假设当 $k=n$ 时,$N_{i,k}(i+n-t)=N_{i,k}(i+t)$成立,故 $N_{0,k}(n-t)=N_{0,k}(t)$,则当 $k=n+1$ 时,

$N_{i,n+1}(i+n+1-t)=N_{0,n+1}(n+1-t)=\int_{n-t}^{n+1-t}N_{0,n}(m)\mathrm{d}m=\int_{t-1}^{t}N_{0,n}(n-x)\mathrm{d}x$

$=\int_{t-1}^{t}N_{0,n}(x)\mathrm{d}x=N_{0,n+1}(t)=N_{i,n+1}(t)$

即 $N_{i,n+1}(i+n+1-t)=N_{i,n+1}(i+t)$

性质 6　连续性

$N_{i,k}(t)$在整个参数空间上为$k-2$阶连续

证明：由定义知$N_{i,2}(t)$零阶连续，则$N_{i,3}(t)=\int_{t-1}^{t}N_{i,2}(x)\mathrm{d}x$一阶连续

$N_{i,3}(t)=\int_{t-1}^{t}N_{i,3}(x)\mathrm{d}x$二阶连续，由此可推出

$N_{i,k}(t)=\int_{t-1}^{t}N_{i,k-1}(x)\mathrm{d}x$为$k-2$阶连续。

性质 7　线性无关性

$\{N_{i,k}(t)\}_{i=-\infty}^{+\infty}(i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$在$t\in(-\infty,+\infty)$上全局线性无关，特别地在$t\in[i,i+1]$上$N_{i-k+1}(t),\cdots,N_{i,k}(t)$局部线性无关。

证明：当$k=2$时显然成立。假设当$k=n$时$\{N_{i,k}(t)\}_{i=-\infty}^{+\infty}(i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$在$t\in(-\infty,+\infty)$上线性无关，则当$k=n+1$时，令$\sum\limits_{i}\alpha_iN_{i,n+1}(t)=0$，两边求导，可得$\sum\limits_{i}\alpha_iN'_{i,n+1}(t)=0$，由性质4可得

$$\sum_{i}[\alpha_iN_{i,n}(t)-\alpha_iN_{i+1,n}(t)]=0$$

即$\sum\limits_{i}(\alpha_i-\alpha_{i-1})N_{i,n}(t)=0$

由于$\{N_{i,n}(t)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$在$(-\infty,+\infty)$上线性无关，因此$a_i=a_{i-1}=a(i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

代入$\sum\limits_{i}\alpha_iN_{i,n+1}(t)=0$，得

$\sum\limits_{i}\alpha_iN_{i,n+1}(t)=\alpha\sum\limits_{i}N_{i,n+1}(t)=0$，故$\alpha=0$。所以$\{N_{i,k}(t)\}_{i=-\infty}^{+\infty}(i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$在$t\in(-\infty,+\infty)$上线性无关。当$t\in[i,i+1]$，同理可证。

3　带形状参数的指数均匀B样条曲线

假设$\{P_i\}_{i=1}^{n}\in R^m,m=2、3,N_{i,k}(t)(i=1,2,3,\cdots,n)$是定义在$[a,b]$上的$k$阶带形状参数的指数均匀B样条基函数，设$a=k$，$b=n+1$，则$N_{1,k}(t),N_{2,k}(t),N_{3,k}(t),\cdots,N_{n,k}(t)(n\geqslant k)$是空间$\Omega_k[a,b]$的一组基，如图3。空间$\Omega_k[a,b]$中的曲线可表示如下：

$$P(t)=\sum_{i=1}^{n}N_{i,k}(t)P_i,k\leqslant t\leqslant n+1,n\geqslant k$$

其中$\{P_i:i=1,2,3,\cdots,n\}$为控制顶点，$P_1P_2P_3\cdots P_n$为控制多边形。图4为$n=5$时，两条指数多项式均匀B样条曲线。

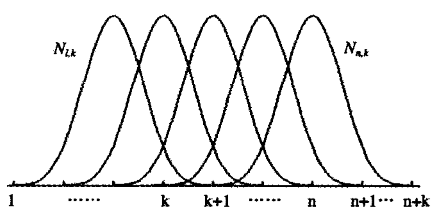
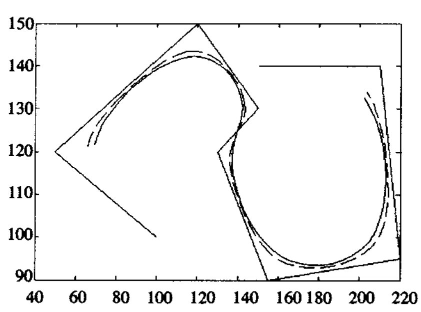


图3　$N_{1,k}(t)$，$\cdots$，$N_{n,k}(t)$是空间$\Omega_k[a,b]$的一组基



(虚线$\lambda=1$；虚线$\lambda=-1$)

图4　四阶带形状参数的指数均匀B样条曲线

性质 8　凸包性

由基函数的归一性，曲线$P(t)(i\leqslant t\leqslant i+1)$位于$k$个控制点$P_{i-k+1},\cdots,P_i$的凸包$H_i$内，整条曲线$P_i(i\leqslant t\leqslant i+1)$位于这些凸包$H_i$的并集$H=\bigcup\limits_{j=k}^{n}H_j$之内。

性质 9　保凸性

凸控制多边形$P_1P_2\cdots P_n$定义的曲线$P(t)$为凸曲线。

性质 10　几何不变性和仿射不变性

曲线的形状、位置与坐标系的选择无关，曲线做仿射变换，只须把其控制多边形做此仿射变换。

性质 11　局部调整性

由曲线的表示公式，改动一个控制顶点$P_i(i\leqslant t\leqslant n)$，曲线上仅有点$P_i$参加的控制的那$L$段($l\leqslant k$)曲线的形状发生变化。同样，曲线$P(t)(i\leqslant t\leqslant i+1)$上的点只与$k$个控制顶点$P_{i-k+1},P_{i-k+2},\cdots,P_i$有关。便于交互设计，$t\in[i,i+1]$区间内子曲线可以表示为：

$$P_k(t)=\sum_{j=i-k+1}^{i}N_{j,k}(t)P_j \tag{3}$$

性质 12　曲线导数公式

对于曲线$P(t)$在$t\in[i,i+1]$区间内子曲线$P(t)=\sum\limits_{j=i-k+1}^{i}N_{j,k}(t)P_j$，则

$$\begin{aligned}P'(t)&=\sum_{j=i-k+1}^{i}N'_{j,k}(t)P_j\\&=\sum_{j=i-k+1}^{i}[N_{j,k-1}(t)-N_{j+1,k-1}(t)]P_i\\&=N_{i-k+1,k-1}(t)P(i-k+1)-\\&\quad N_{i+1,k-1}(t)P(i)+\sum_{j=i-k+2}^{i}\Delta P_iN_{i,k-1}(t)\end{aligned}$$

根据性质2，$t\in[i,i+1]$时，

$N_{i-k+1,k-1}(t)=N_{i+1,k-1}(t)=0$

故$P'(t)=\sum\limits_{j=i-k+2}^{i}\Delta P_iN_{i,k-1}(t)$，其中$\Delta P_i=P_i-P_{i-1}$。

则$\Delta P^r(t)=\sum\limits_{j=i-k+2}^{i}\Delta^rP_iN_{i,k-1}(t)$

其中$\Delta^rP_i=\Delta^{r-1}P_i-\Delta^{r-1}P_{i-1}$

性质 13　对称性

以$P_1,P_2,\cdots,P_n$为控制顶点的K阶带形状参数的指数均匀B样条曲线与$P_nP_{n-1},\cdots,P_1$为控制顶点的K阶带形状参数的指数均匀B样条曲线为同一条曲线，但方向相反，即

$$\sum_{i=1}^{n}P_iS_{i,k}(i+t)=\sum_{i=1}^{n}P_{n-1}S_{i,k}(i+k-t),t\in[0,k)$$

4　带形状参数的指数均匀B样条曲线的逼近性

以三阶指数多项式均匀B样条为例，分析在参数λ取不同值时曲线与控制多边形的逼近关系。一般地，当$t\in[0,1]$时，根据式(3)，我们得到曲线的在$t\in[0,1]$的子曲线。考虑到指数多项式均匀B样条为三阶，控制顶点与曲线上对应点有

$$P(1)-P_{-1}=\sum_{j=-3}^{0}N_{j,4}(1)P_j-P_{-1} \tag{4}$$

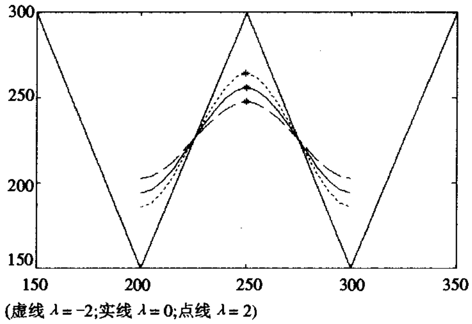
根据性质(2)，有$N_{-3,4}(1)=0$

对式(4)两边计算并取范数，有

$$\begin{aligned}|P(l)-P_{-1}\|&=N_{-2,4}(l)P_{i-2}+N_{-1,4}(l)(P_{-1}-1)+N_{0,4}(1)P_0\\&=(-0.0141\lambda+0.1472)\|P_{i-2}-2P_{i-1}+P_i\|\end{aligned} \tag{5}$$

从上式可知，当λ越大，则$P(l)$和P_{-1}的距离越小；反之λ越小，两者距离越大。类似地，可以得到整个参数区间内，随着形状参数λ的增大，三阶带形状参数的指数均匀B样条曲线更加逼近控制多边形顶点。

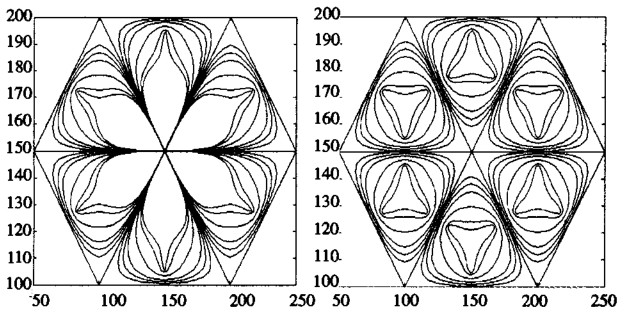
同样可以推导，随着形状参数 λ 的增大，$k(k\geqslant3)$ 阶带形状参数的指数均匀 B 样条曲线更加逼近控制多边形顶点。由于证明过程比较繁琐，我们将另文说明。图 5 给出了形状参数 λ 取不同值时，曲线与控制点的逼近情况。



（虚线 $\lambda=-2$；实线 $\lambda=0$；点线 $\lambda=2$）

图 5　三阶带形状参数的指数均匀 B 样条曲线逼近

5　带形状参数的指数均匀 B 样条曲线的图形实例



(a) 花瓣　　(b) 花纹

图 6　四阶带形状参数的指数均匀 B 样条曲线造型图

曲线设计中的一个基本的内容是开曲线和闭曲线的构造，了解开曲线的端点行为和闭曲线的构造具有重要意义。对于控制点列 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $P_0=P_n$：若要构造开曲线，只须增加两个控制点 $P_0=2P_1-P_2$，$P_{n+1}=2P_n-P_{n-1}$，即可构造两端插值于 P_1、P_n，且在 t_0 和 t_n 处分别以 P_1-P_2、P_n-P_{n-1} 为切向量的开曲线。若要构造闭曲线，只须增加两个控制点 $P_{n+1}=P_2$，$P_{n+2}=P_3$。图 6 给出了 λ 取不同值时的开曲线和闭曲线。图 6(a)是 $\lambda=-2,-1,0,2,4,6$ 时，按控制点列生成的花瓣开曲线图形；图 6(b)是 $\lambda=-4,-2,-1,0,2,4,6,8$ 时，按控制点列生成的花纹闭曲线图形。不论是开曲线还是闭曲线，调整 λ 的值可以得到不同的曲线。当 λ 增大时，曲线逐渐远离控制多边形，当 λ 减小时候，曲线逐渐逼近控制多边形。

结论　本文构造了 $k(k\geqslant3)$ 阶带形状参数的指数均匀 B 样条样条基，并因此定义了带形状参数的指数均匀 B 样条曲线和曲面。该样条基具有与均匀 B 样条基相同的性质、结构，保持了均匀 B 样条曲线的一些实用的几何性质，并且该样条基带有一个形状参数，通过对形状参数取值的改变，可以调整曲线接近其控制多边形的程度。同时，该样条曲线可以构造张量积曲面，通过选取形状参数的值，也可以得到不同程度地接近其控制多面体的曲面。指数多项式均匀 B 样条定义线性空间 Ω_k 上，又由于 Ω_k 对于积分运算是封闭的，即对任意的 $N(t)\in\Omega_k$，有 $\int N(t)\,dt\in\Omega_k$，为相关的积分运算带来方便。以上分析说明，指数多项式均匀 B 样条模型是自由曲线曲面造型的一个有力工具，具有良好的应用价值。

参 考 文 献

1　Zhang J W. C-curves: An extension of cubic curves. Com-puter-aided Geometric Design, 1996, 13(3): 199 ～217
2　Zhang J W. Two different forms of C-B-Splines. Computer-aided Geometric Design, 1997, 14(1): 31～41
3　Mainar E, Pena J M, Sanchez-Reyes J. Shape preser- ving alternatives to the rational Bezier model. Computer-aided Geo metric Design, 2001, 18(1): 37～60
4　Mainar E, Pena J M. A basis of C-Bezier like curves. Computer-aided Geometric Design, 2002, 19(4): 291～295
5　Han Xu-Li. Quadratic trigonometric polynomial curves with a shape parameter. Computer-aided Geometric Design, 2002, 19 (7): 503～512
6　Chen Qinyu, Wang Guozhao. A class of Bezier like curv- es. Computer-aided Geometric Design, 2003, 20(1): 29～39
7　Wang Guozhao, Chen Qinyu, Zhou Minghua. NUAT B- spline curves. Computer-aided Geometric Design, 2004, 21(2): 193～205

（上接第 234 页）

$Q_{左下,r-1}$、最新顶点对 $Q_{左下,r}$、$Q_{左上,r}$（$Q_{左下,r}$、$Q_{左上,r}$ 可能合而为一）所构成子凸壳 $Q_{左上,r-1}Q_{左下,r-1}Q_{左下,r}Q_{左上,r}$ 的内点”的分布域极小化并行处理：

第 1-1-3 步　子凸壳 $Q_{左}$ 的全部顶点标记处理：顺次标记已求得的子凸壳 $Q_{左}$ 全部顶点。

（注：因与上述第 1-1 步及其第 1-1-1 步、第 1-1-2 步、第 1-1-3 步的处理原理、方法、步骤、操作等极其类同，故除第 1-1 步中的“右、左、A 向、B 向”需对应改为第 1-2 步中的“左、右、B 向、A 向”外，第 1-2 步及其第 1-2-1 步、第 1-2-2 步、第 1-2-3 步的其它处理与操作均可从略。）

第 2 步　“将子机群 $COW_{右}$、$COW_{左}$ 所得子凸壳 $Q_{右}$、$Q_{左}$ 各顶点”组合为所求凸壳 Q 的全部顶点处理，即：顺序把上述已得子凸壳 $Q_{右}$、$Q_{左}$ 各顶点，依次两两连接而最后所得凸多边形 Q，必定是所求二维点集 S 的凸壳 Q。

结论　本文提出基于机群的双群双域四向凸壳并行新算法，不仅在时间、空间复杂度与效率上，均优于现行的卷包裹凸壳算法、格雷厄姆凸壳算法、折半分治凸壳算法等传统凸壳串行算法与并行算法；而且便于推广到基于机群的 m 群、n 域、p 向（其中：$m>2$，$n>2$，$p>2$）的凸壳并行新算法研究（对此，作者拟另文阐述）。因此，它将有效提高二维凸壳生成速度，可进一步改进和提高二维凸壳在图像处理、文字分解、模式识别、物体分类、计算图形、指纹识别、遥测遥控、地物辨识、地质勘探、空天利用等的应用水平和工作效率。

参 考 文 献

1　周启海. 论二维点集或线段集凸壳生成算法改进与优化的同构化方向[J]. 计算机科学, 2007(7)
2　周启海. 简论二维点集凸壳研究的意义、现状与创新[C]. 见：第三届全国几何设计与计算学术会议论文集. 北京：电子工业出版社, 2007
3　周启海, 杨祥茂, 吴红玉. 单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 西华大学学报(自科版), 2006(2)
4　周启海, 吴红玉, 黄涛. 单域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 计算机科学, 2007(8)
5　周启海, 黄涛, 吴红玉, 张元新. 基于最大基线倾角智能逼近的凸壳新算法[J]. 计算机科学, 2007(9)
6　黄涛, 周启海. 双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 计算机科学, 2007(12)
7　周启海, 黄涛, 吴红玉. 双域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[C]. 见：中国几何设计与计算新进展(第三届中国几何设计与计算大会议论文集, 2007. 187～192