维普资讯 http://www.cqvip.com

基于双域双向水平倾角最小化圈绕的凸壳新算法

黄 涛[1,2] 周启海[1,2] 吴红玉[2]

(西南财经大学信息技术应用研究所 成都 610074)[1] (西南财经大学经济信息工程学院 成都 610074)[2]

摘 要 本文依据同构化凸壳构造基本定理,提出效率更高的双域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法。本新算法的同构化特点是:1)"初始顶点与双域生成"处理:找出给定二维点集 S 的最低点和最高点,即 Y 轴坐标值最小点(若有多个最小点,则只取最左的最小点)和 Y 轴坐标值最大点(若有多个最大点,则只取最左的最大点),作为凸壳(逆时针圈绕的)A 向初始顶点、(顺时针圈绕的)B 向初始顶点;并以这两个初始顶点为端点的线段,把原二维点集划分为两个独立的子点集 $S_{右}$、$S_{左}$。2)在 $S_{右}$ 内,进行双向"圈绕寻找下一新顶点"即凸壳 A 向、B 向最新顶点寻找处理:分别过自己的最近新顶点,作 X 轴正向射线,并 A 向或 B 向找出当前点集内对该顶点正向射线(为始边的)倾角最小的点;删除对已得各顶点所构成的子凸壳内点,当所剩当前点集非空时继续作"2)"逐边圈绕,直到为空。3)同理,在子点集 S 左内,进行双向"圈绕寻找下一新顶点"即凸壳 A 向、B 向最新顶点寻找处理。

关键词 同构化,凸壳算法,顶点射线,水平倾角,双域双向圈绕

A New Algorithm for Finding Convex Hull Based on Coiling with a Minimum Lever Pitch in Double Domain and Double Direction

HUANG Tao[1,2] ZHOU Qi-Hai[1,2] WU Hong-Yu[2]

(Research Institute of Information Technology Application, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074)[1]

(School of Economic Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074)[2]

Abstract According to the isomorphic fundamental theorem of the convex hull construction, a more efficient new algorithm to find a convex hull based on coiling with a minimum lever pitch in double domain and double direction is advanced. This new algorithm isomorphism characteristic is: 1)"The generation of initial vertex and double domain": find out the bottommost point and the highest point on the convex hull S as the initial vertex of the convex hull, which has the minimum or the maximum coordinate value of the Y axis among all the points in given 2D point set (if the bottommost point is not only one, the bottommost and leftmost or the highest rightmost point should be selected). The line which take the two initial vertexes as end points divide the 2D point set into two absolute point set S_{right} S_{left}. 2) In the 2D point set S_{right} do the process of seeking the newest apex with double direction: passing the last new regressive vertex, make the vertex's half line paralleled by X axis along positive direction, and find out the current vertexes with a minimum pitch to its vertex's regressive half line(as the initial line) to be the newest vertex in coiling; Delete the sub-convex hull's inner points. And loop from"2)"to coil with double direction side by side continuingly while the reminded point set is not empty. 3) in the 2D point set S_{left} do the similar process.

Keywords Isomorphic, Convex hull algorithm, Vertex's half line, Pitch of base Lines, Double domain and double direction coiling

1 引言

凸壳在"计算图形、图像处理、模式识别、指纹识别、地物辨识、地质勘探、网点布局、环境监测、……"中,均有广泛而重要的学术意义与应用价值。近 40 年来,世界各国学者为了改进和提高二维点集或线段集凸壳(以下简称凸壳)算法及其效率,提出诸多凸壳算法,但其效率尚待进一步提高。此前,根据作者提出的同构化凸壳构造基本定理,实现了对颇具代表性的"卷包裹"等凸壳算法的同构化改进与创新[1~6]。本文再给出效率更高的基于双域双向水平倾角最小化圈绕的凸壳新算法。

2 凸壳问题与凸壳算法简述

定义 1 设多边形 Q 的顶点是给定平面内的点 $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2), \cdots, Q_n(x_n, y_n)$。若线段 Q_iQ_j ($i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n, 3 \leqslant n < +\infty$) 总在多边形 Q 内,则称 Q 为凸多边形。

定义 2 设二维点集 $S=\{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 3 \leqslant m < +\infty\}$ 由给定平面内的点构成。若凸多边形 Q 顶点 $Q_i \in S$,且 Q 是可覆盖 S 中各点的最小凸多边形;则称凸多边形 Q 为二维点集 S 的凸壳,而点集 S 中各点的位置分布区域称为凸壳 Q 的顶点分布域(简称分布域)。如何寻求给定二维点集 $S=\{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 3 \leqslant m < +\infty\}$ 的凸壳,称为凸壳问题。构造性生成给定二维有限点集 $S=\{P_i(x_i, y_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 3 \leqslant m < +\infty\}$ 的凸壳的算法,统称凸壳生成算法。

凸壳问题的几何原型,可通俗简单而形象地说明,如图 1 所示。设 $1 \leqslant i \leqslant m, 3 \leqslant m < +\infty$,对木版上的有限点集 S 中各点 $P_i(x_i, y_i)$ 处,分别各钉一个图钉,再用一条橡皮带从该点集的外沿去围绕一圈这些图钉。显然有:首先,被缠紧的橡皮带圈必定构成一个凸多边形 Q;其次,所有图钉总不会出

黄 涛 讲师,主要研究方向:计算机应用。**周启海** 教授,博(硕)士生导师,主要研究方向:计算几何,算法研究与应用,财经计算,同构化信息处理等。**吴红玉** 硕士研究生,主要研究方向:计算机应用。

维普资讯 http://www.cqvip.com

现在该橡皮带圈(即:所得凸多边形 Q)所围成的区域之外。

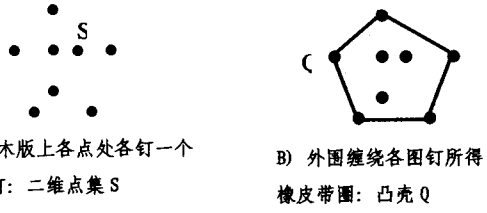

图 1　凸壳问题几何原型的形象说明示意图

3　凸壳生成算法研究评述

3.1　卷包裹凸壳算法

1970 年 D. Chand 和 S. Kapur 提出较有代表性的卷包裹凸壳算法[7],如图 2 所示。其算法思想可概括为:

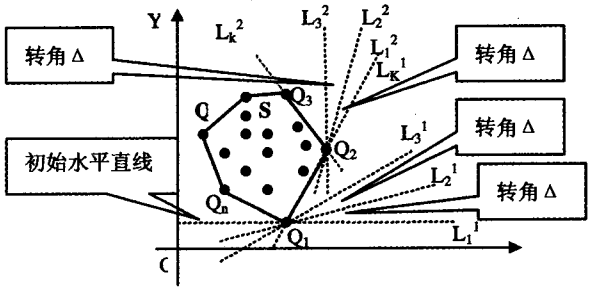

图 2　卷包裹凸壳算法示意图

首先过 Y 坐标最小的点 Q_1 画一水平直线 L,显然该点是凸壳的一个顶点,然后 L 绕 Q_1 按逆时针方向旋转,碰到 S 中的第二个点 Q_2 时,直线 L 改绕 Q_2 逆时针方向旋转而在 Q_1 与 Q_2 之间留下一线段,该线段为凸壳的一条边。继续旋转下去,最后直线 L 旋转 360°回到 Q_1,便得到所要求的凸壳。

卷包裹凸壳算法,尽管它较真实地反映了凸壳的自然态同构化特点,是图 1 橡皮带外绕法的朴素模拟圈绕与计算机实现,但它存在不少缺点,例如:其固定转角 Δ,使它有"低效,近似,不利并行化",并且"其无效内点总数永远都是固定不变",导致它的效率不高。

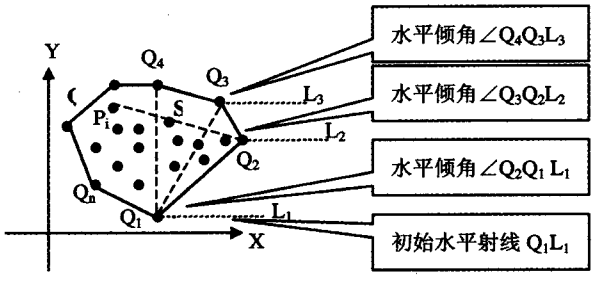

图 3　最小水平倾角凸壳算法示意图

3.2　单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法

依据同构化凸壳构造基本定理,文[1]提出了比卷包裹凸壳算法效率更高的单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[3],如图 3 所示。其算法思想可概括为:

①找出给定二维点集的最低点,即 Y 轴坐标值最小点(若有多个最小点,则只取最左的最小点),并作为凸壳初始顶点(即最低顶点);② 过最近新顶点,作平行 X 轴正方向的同向顶点射线,并找出当前点集内对该顶点射线倾角最小的点,以作为逐边圈绕的最新顶点(下面会给出证明);③在当前点集分布域中,删除由初始顶点、次新顶点、最新顶点构成三角形所覆盖的全部点,并当所剩当前点集非空时才从"②"继续作逐边圈绕。

文[3]证明了单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法的"倾角最小的点,必为逐边圈绕的最新顶点"的合理性与正确性。此后,文[4]提出了效率高于文[3]的单域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法。文[6]提出了效率高于文[4]的双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法。基于文[4,6],本文进一步提出了如下效率更高的双域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法。

4　双域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法

4.1　理论基础

本新算法的理论基础,是同构化凸壳构造基本定理。

同构化凸壳构造基本定理　记二维点集 $S=\{P_i(x_i,y_i) \mid 1\leqslant i\leqslant m, 3\leqslant m<+\infty\}$,凸多边形 Q 的顶点集为 $R=\{Q_i(x_i,y_i) \mid 1\leqslant i\leqslant n\leqslant m<+\infty, 3\leqslant n, 3\leqslant m\}$。如果凸多边形 Q 是二维点集 S 的凸壳,则有:

i.(顶点对内点的)凸壳内点无关性定理:凸壳 Q 的所有顶点 $Q_i(x_i,y_i)$必不在 S 与 R 的余集中,即 $Q_i(x_i,y_i)\notin S-R, 1\leqslant i\leqslant n\leqslant m<+\infty, 3\leqslant n, 3\leqslant m$。

ii.(顶点对顶点的)凸壳顶点独立性定理:凸壳 Q 的任一顶点 $Q_k(x_k,y_k)$必不在 R 与$\{Q_k\}$的余集中,即 $Q_k(x_k,y_k)\notin R-\{Q_k\}, 1\leqslant k\leqslant n\leqslant m<+\infty, 3\leqslant n, 3\leqslant m$。

证明:ⅰ.假设凸壳 Q 的某个顶点 $Q_k(x_k,y_k)\in S-R, 1\leqslant k\leqslant n$;则必有顶点 $Q_k(x_k,y_k)\notin R$(这表明:该顶点 $Q_k(x_k,y_k)$应为凸壳 Q 的内点)。但 R 为凸壳 Q 的顶点集,故由已知条件可知,应有顶点 $Q_k(x_k,y_k)\in R$。这两者显然矛盾,故命题ⅰ成立。(这表明:凸壳 Q 的任何内点,必定不是凸壳 Q 的顶点)。

ⅱ.设 Q_k 为凸壳 Q 的任一顶点,则 Q_k 两侧至少有两个紧邻顶点 Q_{k-1}与 Q_{k+1}(其中:$k\in R$;若 $k-1=0$,则取 $k-1$ 为 n;若 $k+1=n+1$,则取 $k+1$ 为 1)。显然,Q_{k-1}、Q_k、Q_{k+1}三点构成一个紧邻顶点三角形 $Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}$,而顶点 Q_k 的位置是确定不变的,且只与自身坐标位置有关,而与其两个紧邻顶点 Q_k、Q_{k+1}的坐标位置无关,以此类推,可知:顶点 Q_k 的位置只与自身坐标位置有关,而与其两侧的所有相邻顶点 Q_i 与 Q_j(其中:$i\neq k, j\neq k, i\neq j, k\in R, i\in R, j\in R$)的坐标位置无关。故凸壳 Q 的任一顶点 Q_k 独立于其它顶点。

因此,该基本定理成立。

基于同构化凸壳构造基本定理,作者认为凸壳生成算法改进与优化的同构化方向应当是:第一、根据凸壳内点无关性定理,应一方面使凸壳顶点分布域极小化,即让包含凸壳顶点的判定区域尽可能小,以大大减少凸壳顶点判定时的无效处理量;另一方面使顶点判定对象直接化,即让所判定对象尽可能接近当前所寻顶点,以大幅提高凸壳顶点判定对象的直接针对性。第二、根据凸壳顶点独立性定理,一方面可从不同初始对象出发,来改进和优化串行凸壳新算法;另一方面可对不同视角对象处理,来改造和创造并行凸壳新算法。因此,在生成凸壳过程中,应尽力缩小顶点的可能分布域——在尽可能小的分布域内,尽可能快地直接找出并只找出其各个顶点(即凸壳各条边的各端点)的凸壳新算法;进而,再对有并行潜力的优秀串行凸壳新算法施以并行化改造与创新。无疑,这必定是今后进一步改进和提高凸壳算法效率的主要捷径。

维普资讯 http://www.cqvip.com

4.2 基本定义与算法构造

定义 3 二维点集 $S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m<+\infty,3\leqslant m\}$中，其 Y 轴坐标值最小点 $Q_{下1}(x_{下1}=\min\{x_{下i}\mid 1\leqslant i\leqslant m\geqslant 3\},y_{下1})$及 Y 轴坐标值最大点 $Q_{上1}(x_{上1}=\min\{x_{上i}\mid 1\leqslant i\leqslant m\geqslant 3\},y_{上1})$，称为二维点集 S 的凸壳 Q 的初始下顶点 $Q_{下1}$ 和初始上顶点 $Q_{上1}$。以凸壳 Q 任一顶点 Q_{cj}（或 Q_{dj}）为端点且平行于 X 轴正(或负)方向的同向射线 $Q_{cj}L_{ci}$（或 $Q_{dj}L_{dj}$），称为顶点 Q_{cj}（或 Q_{dj}）的正(或负)向水平射线(这里，c 可为右上或右下，d 可为左上或左下；$1\leqslant j\leqslant n\leqslant m<+\infty,1\leqslant i\leqslant n\leqslant m<+\infty,3\leqslant n$)；其中，射线 $Q_{下1}L_{右下1}$ 称为初始顶点 $Q_{下1}$ 的正向初始水平射线，射线 $Q_{上1}Q_{右上1}$ 称为初始顶点 $Q_{上1}$ 的初始正向水平射线，而射线 $Q_{下1}L_{左下1}$ 称为初始顶点 $Q_{下1}$ 的负向初始水平射线，射线 $Q_{上1}Q_{左上1}$ 称为初始顶点 $Q_{上1}$ 的初始负向水平射线。顶点 Q_{cj}（或 Q_{dj}）的顶点水平射线 $Q_{cj}L_{cj}$（或 $Q_{dj}L_{dj}$），以端点 Q_{cj}（或 Q_{dj}）为圆心，按逆(或顺)时针方向转行到二维点集 S 中任一点 P_i 处所成夹角 $\angle P_iQ_{cj}L_{cj}$（或 $\angle P_iQ_{dj}L_{dj}$），称为点 P_i 对水平射线 $Q_{cj}L_{cj}$（或 $Q_{dj}L_{dj}$）的逆时针圈绕的 A 向、或者顺时针圈绕的 B 向水平倾角，其中 $0\leqslant\angle P_iQ_{cj}L_{cj}$（或 $\angle P_iQ_{dj}L_{dj}$）$\leqslant 2\pi$(其示例如图 3)。

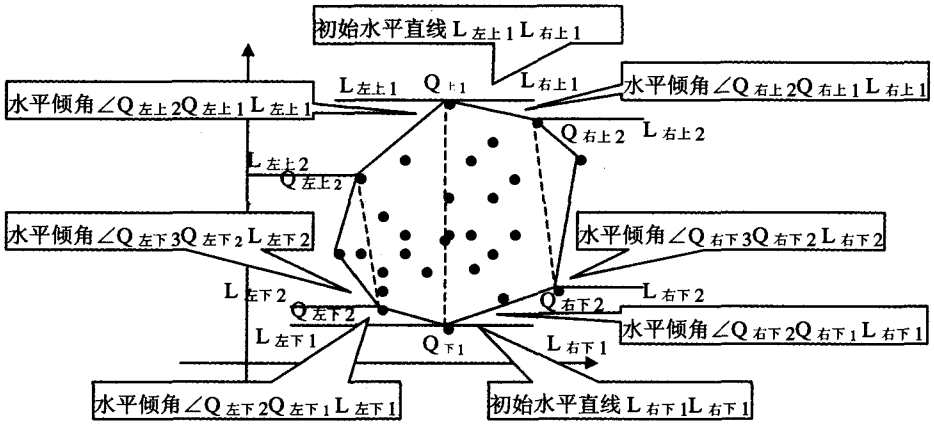

图 3 最小水平倾角凸壳算法示意图

事实上，只要能对卷包裹凸壳算法施行“用足其缠绕潜能，克服其近似缺点，消除其低效弱点”的同构化改进与创新，就一定会产生效率更高的凸壳新算法。据此，本文利用定义 5，提出了双域双向水平倾角最小化圈绕的下述凸壳新算法。其算法思想如下：

第 0 步：“初始顶点生成”处理。在分布域 S 中，找出 Y 轴坐标值最小的一个初始极点(即最低点)$P_{右(左)下1}$，作为凸壳初始顶点(即最低顶点)$Q_{右(左)下0}$并标记为新顶点 $Q_{右(左)下1}$；找出 Y 轴坐标值最大的一个初始极点(即最高点)$P_{右(左)上1}$，作为凸壳初始顶点(即最高顶点)$Q_{右(左)上0}$并标记为新顶点 $Q_{右(左)上1}$(若有多个最小点或是最大点，则只取最左的最小点或最大点)，并作为凸壳(逆时针圈绕的)A 向、(顺时针圈绕的)B 向的共同初始顶点(即最低顶点)。

第 1 步：“子域的划分与判定”。连接初始顶点 $Q_{右(左)下1}$ $Q_{右(左)上1}$所得到的直线 $Q_{右(左)下1}$ $Q_{右(左)上1}$称为初始线，对分布域 S 中的点进行判断：过凸壳初始顶点 $Q_{右(左)下1}$，作 $Q_{右(左)下1}$ 的平行 X 轴的同向顶点水平射线 $L_{左下1}L_{右下1}$，若对于分布域 S 中的任意点 P_i 满足 $\angle P_iQ_{右(左)下1}$ $L_{右下1}<\angle Q_{右(左)下1}$ $Q_{右(左)上1}$ $L_{右下1}$，$P_i\in S$，则 P_i 属于子分布域 $S_{右}$，反之，则称点 P 属于子分布域 $S_{左}$。据此，可将初始分布域 S，划分为两个彼此无交的子域 $S_{右}$、$S_{左}$。

第 2 步：在子分布域 $S_{右}$ 中，进行双域双向水平倾角最小化圈绕寻找凸壳：

i. 双向“圈绕寻找下一新顶点”，作凸壳最新顶点寻找处理：

①“构造当前次新顶点的水平射线”处理：在子分布域 $S_{右}$ 中分别过凸壳 A 向、B 向当前新顶点 $Q_{右下k}$、$Q_{右上k}$($1\leqslant k\leqslant n$)，分别作平行 X 轴正方向的同向顶点射线(简称正向射线) $Q_{右下k}L_{右下1}$ 和 $Q_{右上k}L_{右上1}$($1\leqslant k\leqslant n$)；

②“寻找最小水平倾角点”处理：

在子分布域 $S_{右}$ 中，A 向找出对当前次新顶点 $Q_{右下k}$ 的水平射线 $Q_{右下k}L_{右下k}$(为始边的)的水平倾角最小点 $P_{右下j}$(即满足 $\angle P_{右下j}Q_{右下j}L_{右下j}=\min\{\angle P_{右下k}Q_{右下j}L_{右下j}\mid P_{右下k}\in S\}$)(注：若有多个最小水平倾角点，则只取最后一个最小水平倾角点，即离当前次新顶点 $Q_{右下j}$ 最远的那个最小水平倾角点 $P_{右下j}$)；并且 B 向找出对当前次新顶点 $Q_{右上k}$ 的水平射线 $Q_{右上k}L_{右上k}$(为始边的)的水平倾角最小点 $P_{右上i}$(即满足 $\angle P_{右上i}Q_{右上i}L_{右上i}=\min\{\angle P_{右上k}Q_{右上i}L_{右上i}\mid P_{右上k}\in S\}$)(注：若有多个最小水平倾角点，则只取最后一个最小水平倾角点，即离当前次新顶点 $Q_{右上k}$ 最远的那个最小水平倾角点 $P_{右上i}$)；

③“标记当前最新顶点”处理：把当前所得水平倾角最小点 $P_{右下i}$、$P_{右上i}$，分别按顺次保存为最新顶点 $Q_{右下k}$、$Q_{右上k}$($1\leqslant k\leqslant n$)。

ii. “分布域极小化”，即当对前(已得各顶点所构成的)子凸壳内点删除处理：

如果所找到的当前子分布域 A 向最新点(即正向最小点)、B 向最新点(即负向最大点)是不同顶点——

则：①在当前子分布域 $S_{右}$ 中，删除初始线 $Q_{右下k}$ $Q_{右上k}$ 与“由当前 A 向最新顶点、当前 B 向最新顶点所构成直线”的内部的全部点；如果所剩区域非空，就仍记该非空区域为 $S_{右}$，并将当前 A 向最新顶点、当前 B 向最新顶点所构成直线记为初始线，回到第 2 步，继续作双域双向圈绕寻找；不然(该所剩区域已空，即已无未处理点)，就中止其双向逐边圈绕。

否则(即当前 A 向最新点和 B 向最新点为同一顶点)：表明此时所求凸壳的各顶点均已找出，故无需再作当前子凸壳内点删除处理，并中止其双向逐边圈绕。

(下转第 262 页)

维普资讯 http://www.cqvip.com

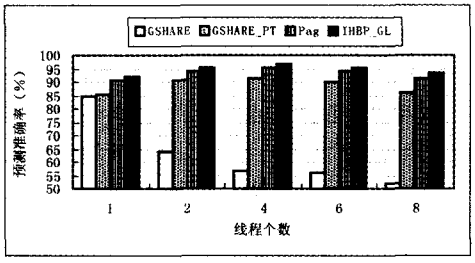

图7 IHBP与其它预测器准确率的比较

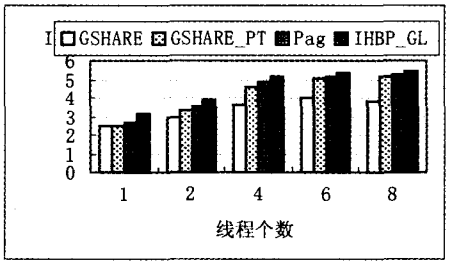

图8 几种预测器对IPC的影响

结论 本文详细分析了转移历史信息的组织方式和更新方式对分支预测准确率的影响。在此基础上，提出了IHBP分支预测算法，把全局信息和局部信息结合在一起来预测转移，同时发挥了两种转移历史信息的作用，采用推测更新的方式充分利用及时信息，解决了SMT处理器中分支预测信息过时、混乱等问题，使得预测的准确率更稳定。仿真结果表明：在8线程结构中，与目前国际普遍采用的每线程Gshare算法和Pag算法相比，分支预测准确率分别提高了8.5%和2.3%。

参考文献

1 Tullsen D M, Eggers S J, Levy H M. Simultaneous Multithreading: Maximizing On-Chip Parallelism. In: Proceedings of the International Symposium on Computer Architecture, 1995. 392～403
2 Gummaraju J, Franklin M. Branch Prediction in Multi-threaded Processors. IEEE, 2000
3 Evers M, Yeh T Y. Understanding branches and designing branch predictors for high-performance microprocessors. Proceedings of the IEEE, 2001, 89(11): 1610～1620
4 Smith J E. A Study of Branch Prediction Strategies. In: 8th Intl Symp on Computer Architecture, Minneapolis, MN, ACM, IEEE. May 1981. 135～148
5 Yeh T Y, Patt Y N. Alternative Implementations of Two-level Adaptive Branch Prediction. In: Proc. 19th Int'l Symp on Computer Architecture, 1992. 124～134
6 Pan S T, So K, Rahmeh J T. Improving the Accuracy of Dynamic Branch Prediction Using Branch Correlation. In: Proc. Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems (ASPLOS-V), October 1992. 76～84
7 McFarling C. Combining Branch Predictors: [Technical Note]. TN-86. WRL June 1993
8 Sechrest S, Lee C C, Mudge T. The Role of Adaptivity in Two Level Adaptive Branch Prediction. In: 28th ACM/IEEE International Symposium on Microarchitecture_ Nov. 1995
9 Chang P Y, Hao E, Yeh T Y, et al. Branch Classication: a New Mechanism for Improving Branch Predictor Performance. In: 27th ACM/IEEE International Symposium on Microarchitecture. Nov. 1994
10 Chang P, Banerjee U. Profile-guided Multi-heuristic Branch Prediction. In: Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, July 1995
11 Evers M, Chang P, Patt Y. Using Hybrid Branch Predictors to Improve Branch Prediction Accuracy in the Presence of Context Switches. In: International Symposium on Computer Architecture, May 1996. 3～11
12 Falc'on A, Santana O J, Medina P, et al. Studying New Ways for Improving Adaptive History Length Branch Predictors. In: Proceedings of the 4th International Symposium on High Performance Computing(ISHPC-IV), May 2002
13 陈跃跃，周兴铭．一种精确的分支预测微处理器模型．计算机研究与发展，2003，40(5)：741～745

(上接第237页)

第3步：同理，在子分布域S左中，进行双域双向水平倾角最小化圈绕寻找凸壳：

i. 双向"圈绕寻找下一新顶点"，作凸壳最新顶点寻找处理：

①"构造当前次新顶点的水平射线"处理：在子分布域$S_{左}$中分别过凸壳A向、B向当前新顶点$Q_{左下k}$、$Q_{左上k}$($1\leqslant k\leqslant n$)，分别作平行X轴负方向的同向顶点射线(简称正向射线)$Q_{左下k}L_{左下1}$和$Q_{左上k}L_{左上1}$($1\leqslant k\leqslant n$)；

②"寻找最小水平倾角点"处理：

在子分布域S左中，B向找出对当前次新顶点$Q_{左下k}$的水平射线$Q_{左下k}L_{左下k}$(为始边的)的水平倾角最小点$P_{左下j}$(即满足$\angle P_{左下j}Q_{左下j}L_{左下j}=\min\{\angle P_{左下k}Q_{左下j}L_{左下j}\mid P_{左下k}\in S\}$)(注：若有多个最小水平倾角点，则只取最后一个最小水平倾角点，即离当前次新顶点$Q_{左下j}$最远的那个最小水平倾角点$P_{左下j}$)；并且A向找出对当前次新顶点$Q_{左上k}$的水平射线$Q_{左上k}L_{左上k}$(为始边的)的水平倾角最小点$P_{左上i}$(即满足$\angle P_{左上i}Q_{左上i}L_{左上i}=\min\{\angle P_{左上k}Q_{左上i}L_{左上i}\mid P_{左上k}\in S\}$)(注：若有多个最小水平倾角点，则只取最后一个最小水平倾角点，即离当前次新顶点$Q_{左上k}$最远的那个最小水平倾角点$P_{左上i}$)；

③"标记当前最新顶点"处理：把当前所得水平倾角最小点$P_{左下i}$、$P_{左上i}$，分别按顺次保存为最新顶点$Q_{左下k}$、$Q_{左上k}$($1\leqslant k\leqslant n$)。

ii. "分布域极小化"，即当对前(已得各顶点所构成的)子凸壳$S_{左}$内点做类似子凸壳$S_{右}$中内点的处理。

最后，顺序把所得各顶点，依次两两连接而得到的凸多边形Q，必定是所求二维有限点集S的凸壳Q。

不难看出：本凸壳新算法，经极小化处理后的新分布域S中，其无效内点个数一般都会快速减少，故已可大幅提高凸壳Q生成速度。

结论 本文提出的双域双向水平倾角最小化圈绕，实现了小分布域化的凸壳顶点生成。它不仅克服了卷包裹凸壳算法等的近似或低效等弱点，改善了凸壳算法的时间、空间复杂度与效率，且颇易于改造为并行化算法。因此，它将有效提高二维凸壳生成速度，可进一步改进和提高二维凸壳在图像处理、文字分解、模式识别、物体分类、计算图形、指纹识别、遥测遥控、地物辨识、地质勘探、空天利用等的应用水平和工作效率。

参考文献

1 周启海．论二维点集或线段集凸壳生成算法改进与优化的同构化方向[J]．计算机科学，2007(7)
2 周启海．简论二维点集凸壳研究的意义、现状与创新[C]．见：第三届全国几何设计与计算学术会议论文集，北京：电子工业出版社，2007
3 周启海，杨祥茂，吴红玉．单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]．西华大学学报(自科版)，2006(2)
4 周启海，吴红玉，黄涛．单域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]．计算机科学，2007(8)
5 周启海，黄涛，吴红玉，张元新．基于最大基线倾角智能逼近的凸壳新算法[J]．计算机科学，2007(9)
6 黄涛，周启海．双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]．计算机科学，2007(12)
7 Chand D, Kapur S. An algorithm for convex polytope[J]. ACM, 1970, 17: 78～86