一种基于核集与相似性的模糊推理方法*)

刘文远[1] 张庆大[1] 王宝文[1] 石 岩[2]
(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)[1] (九州东海大学工程学院信息系统系 日本)[2]

摘 要 在稀疏规则库条件下，当给定的输入落入规则"间隙"时，采用传统的模糊推理方法是得不到任何结论的。学者已经证明模糊推理本质上就是插值器。Koczy 和 Hirota 首先提出了 KH 线性插值推理方法，然而推理结果存在着无法保证凸性和正规性等问题。为了能有一个较好的插值推理结果，本文提出了一种基于核集与相似性的模糊插值推理方法，并把此方法扩展到多维变量的情况，该方法不仅推理简单，推理结果较好，并且能很好地保证推理结果的凸性和正规性。这为智能系统中的模糊推理提供了一个非常有用的工具。

关键词 模糊假言产生式，模糊集，相似性，多维稀疏模糊推理

Fuzzy Interpolative Reasoning Method Based on Center Set and Similarity

LIU Wen-Yuan[1] ZHANG Qing-Da[1] WANG Bao-Wen[1] SHI Yan[2]
(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)[1]
(School of Information Science, Kyushu Tokai University, Japan)[2]

Abstract When rule base is sparse, we cannot get any reasoning result by traditional fuzzy reasoning method for an observation is in the gap between two neighboring antecedents. Authors have proved that fuzzy reasoning is really equal to a interpolation. Hence Koczy and Hirota first proposed KH linear interpolative reasoning method. But its consequence does not always keep convexity and normality. So this paper presents a fuzzy interpolative method based on center set and similarity. And it is extended to handle the multidimensional variables fuzzy reasoning. Reasoning is simple by the method; moreover it can keep the convexity of the reasoning consequence.

Keywords Fuzzy set, Core and similarity, Sparse fuzzy reasoning

1 引言

模糊推理是模糊控制、模糊专家系统、模糊决策支持系统等智能系统中的重要组成部分。在模糊推理系统中，传统的模糊推理方法即合成推理方法(CRI)所针对的对象都是稠密型模糊规则库[1]，即规则的前件必须完全覆盖输入论域。然而，当模糊规则库呈稀疏状态，即规则库不能完全覆盖输入论域时，规则前件的隶属函数之间就会出现"空隙"，采用合成推理方法(CRI)便会因为缺少推理依据而无法得到推理结论。有学者已经证明采用模糊推理本质上就是插值器[6]。为了解决这一问题，最早的插值推理方法是由 Koczy 和 Hirota 提出的 KH 线性插值推理方法[1,2]。但随后又有很多学者[3,5]发现采用该方法不能保证最后推理结果的隶属函数是一个正规凸集，为了保证推理结果集的正规凸性，一些学者增加了限定条件，但是由于这些限定条件太严格，造成不能很好在模糊推理系统中实际应用。

为了寻找一种比较好的模糊推理方法，本文推出一种基于核集和相似性的模糊推理方法。

2 KH 模糊插值推理方法分析

在这部分，简要介绍针对稀疏规则库的 KH 模糊插值推理方法。线性插值推理方法使得我们可以抛开模糊推理中传统的 CRI 推理方法，采用插值方法来实现模糊推理。

首先，给出两个定义：

定义 1 假定 A_1 和 A_2 是论域 X 上的两个模糊集且 $A_1 < A_2$，α 截集的 $A_{1\alpha}$ 和 $A_{2\alpha}$ 之间的上限距离 d_L 和下限距离 d_U 分别定义为：

$$d_L(A_{1\alpha},A_{2\alpha})=d(\inf\{A_{1\alpha}\},\inf\{A_{2\alpha}\}) \tag{1}$$

$$d_U(A_{1\alpha},A_{2\alpha})=d(\sup\{A_{1\alpha}\},\sup\{A_{2\alpha}\}) \tag{2}$$

其中，d 是欧氏距离或者可以看作闵克夫斯基距离。

定义 2 假定 $A_1 => B_1$ and R_2 : $A_2 => B_2$ 是论域 $X \times Y$ 上不相联的模糊规则，A_1，A_2 和 B_1，B_2 分别是 X 和 Y 上的模糊集。假定 A^* 是论域 X 上的一观察值，且满足 $A_1 < A^* < A_2$，则两个模糊规则之间的线性插值定义是：

$$d(A^*,A_1):d(A^*,A_2)=d(B^*,B_1):d(B^*,B_2) \tag{3}$$

根据模糊集分解定理，式(3)被重写为：

$$d_L(A_{1\alpha},A_\alpha^*):d_L(A_\alpha^*,A_{2\alpha})=d_L(B_{1\alpha},B_\alpha^*):d_L(B_\alpha^*,B_{2\alpha}) \tag{4}$$

$$d_U(A_{1\alpha},A_\alpha^*):d_U(A_\alpha^*,A_{2\alpha})=d_U(B_{1\alpha},B_\alpha^*):d_U(B_\alpha^*,B_{2\alpha}) \tag{5}$$

其中，$\alpha\in[0,1]$。

将式(1)和式(2)带入到式(4)和式(5)中得：

$$\inf\{B_\alpha^*\}=\frac{d_L(A_{1\alpha},A_\alpha^*)\inf\{B_{2\alpha}\}+d_L(A_\alpha^*,A_{2\alpha})\inf\{B_{1\alpha}\}}{d_L(A_{1\alpha},A_\alpha^*)+d_L(A_\alpha^*,A_{2\alpha})} \tag{6}$$

*)基金项目：国家科技部高新技术计划项目(2005EJ000017)，河北省科技研究与发展计划(02547015D)，河北省普通高等学校博士科研资助基金 2002(B2002118)。刘文远 博士，教授，研究方向为软计算，数据库，电子商务；张庆大 硕士研究生，研究方向为软计算、模糊推理；王宝文 副教授，硕士生导师，研究方向为软计算、模糊推理；石 岩 教授，研究方向为软计算模糊神经网络、模糊决策与控制。

$$\sup\{B_\alpha^*\}=\frac{d_U(A_{1\alpha},A_\alpha^*)\inf\{B_{2\alpha}\}+d_U(A_\alpha^*,A_{2\alpha})\inf\{B_{1\alpha}\}}{d_U(A_{1\alpha},A_\alpha^*)+d_U(A_\alpha^*,A_{2\alpha})} \tag{7}$$

但是，发现 $\inf\{B_\alpha^*\}$ 和 $\sup\{B_\alpha^*\}$ 有时不是关于 α 的线性关系，所以在许多情况下，插值结果是一个非凸的模糊集，即使给定规则的模糊集是正规凸模糊集。为了使稀疏规则条件下的插值推理既能保持凸性和正规性又有满意的推理结果，同时推理方法的算法简单，推理效率高，下面提出了一种基于核集和相似性的模糊插值推理方法，这种模糊插值推理方法所得到的插值推理结果 B^* 都将是正规凸模糊集。而且从实际应用角度看，其算法简单，推理效果较好。

3 一种基于核集和相似性的模糊推理方法

相似性是我们在判断、分析和推测事物时经常使用的一种方法。考虑模糊规则中模糊集之间的相似性，以及模糊集的核心之间的关系为依据提出了基于核集与相似性的模糊推理方法。

3.1 模糊集之间的相似性

模糊集之间的相似性有好几种求法[4]，但是计算复杂繁琐，我们提出一种新的普通模糊集之间的相似性——把模糊集隶属函数分成左右和中间三段，相似性为相对应段的宽度之比，则模糊集之间的相似性就分为左相似性、右相似性和中间相似性。

定义 3(模糊集的核) 模糊集合 A 的核 $core(A)$ 是 $X\in R$ 中满足 $u_A(x)=1$ 的所有点集，$u_A(x)$ 表示模糊集的隶属函数。

定义 4 设 A 为论域 $X\subseteq R$ 上的模糊集，$core(A)$ 为 A 的核集；模糊集 A 的左核为 $core(A)$ 的下确界，模糊集 A 的右核为 $core(A)$ 的上确界：

$$core^L(A)=\inf(core(A)) \tag{8}$$

$$core^R(A)=\sup(core(A)) \tag{9}$$

事实上，当 A 为一元模糊集时，左核 $core^L(A)$ 即为模糊集 A 的最左边的核值，右核 $core^R(A)$ 为模糊集 A 的最右边的核值。

定义 5 设 A 为论域 $X\subseteq R$ 上的模糊集，对于 $\lambda\in[0,1]$，模糊集 A 的左宽度、中宽度和右宽度定义如下：

$$wid_\lambda^L(A)=core^L(A)-\inf_\lambda(A) \tag{10}$$

$$wid_\lambda^M(A)=core^R(A)-core^L(A) \tag{11}$$

$$wid_\lambda^R(A)=\sup_\lambda(A)-core^R(A) \tag{12}$$

其中，$\inf_\lambda(A)$ 和 $\sup_\lambda(A)$ 为模糊集 A 的隶属函数 $u(x)=\lambda$ 时的左边界和有边界。

由模糊集的左宽度、中间宽度和右宽度，我们给出模糊集相似性的定义。

定义 6 设 A 和 B 是论域 $X\subseteq R$ 上两个正规的凸的模糊集，$\lambda\in[0,1]$，定义 A 与 B 的左相似性、中间相似性和右相似性如下：

$$S_{(A,B)}^L=\frac{wid_\lambda^L(A)}{wid_\lambda^L(B)} \tag{13}$$

$$S_{(A,B)}^M=\frac{wid_\lambda^M(A)}{wid_\lambda^M(B)} \tag{14}$$

$$S_{(A,B)}^R=\frac{wid_\lambda^R(A)}{wid_\lambda^R(B)} \tag{15}$$

有了宽度相似性的概念，就可以去刻画模糊集 A 与 B 之间的相似关系。

梯形模糊集通常用四个特征点来表示即 $B=[b1,b2,b3,b4]$，它的左右宽度一般取 $\lambda=0$ 时的宽度 $wid^L=b2-b1$，$wid^R=b4-b3$ 中间宽度是 $\lambda=1$ 时的宽度 $wid^M=b3-b2$，如图 1 所示。

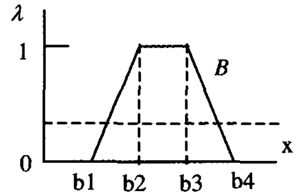

图 1 梯形模糊集

3.2 模糊推理方法

确定结论模糊集的步骤是首先求模糊集的核心，然后是模糊集的形状。

模糊集的核心 $corea^C(A)$ 定义为：

$$corea^C(A)=(corea^R(A)+corea^L(A))/2 \tag{16}$$

其中，$core^R(A)$ 和 $core^L(A)$ 由定义 2 得。

假定规则：

Rules: if X is A_1, then Y is B_1

If X is A_2, then Y is B_2

<u>Observation: X is A^*</u>

Conclusion: Y is B^*

1) 确定结论模糊集 B^* 的核心

考虑模糊集的核心作为模糊集的位置，这样就可以把模糊集的位置和形状分开考虑；也有其他的表示模糊集位置的方法是重心法，由于重心既考虑模糊集的位置又考虑到模糊集的形状，但是这样计算非常复杂。

根据定义我们可以知道已知规则中的模糊集的核心 $core^C(A_1)$，$core^C(A_2)$，$core^C(A^*)$，$core^C(B_1)$，$core^C(B_2)$。

如果下面由参数组成的二阶 Vandermonde 行列式满足：

$$\begin{vmatrix} 1 & core^C(A) \\ 1 & core^C(B) \end{vmatrix}=core^C(A)-core^C(B)\neq 0 \tag{17}$$

利用拉格朗日插值构造映射函数 F 为：

$B^*=F(A^*)$

这样我们根据定义可以得出模糊集 B^* 的核心 $core^C(B^*)$：

$$core^C(B^*)=F(core^C(A^*))$$

$$\frac{(core^C(A_2)-core^C(A^*))}{core^C(A_2)-core^C(A_1)}core^C(B_1)+\frac{(core^C(A^*)-core^C(A_1))}{core^C(A_2)-core^C(A_1)}core^C(B_2) \tag{18}$$

2) 确定结论模糊集 B^* 的形状

利用线性插值构造模糊集 A' 和 B' 即：

$$A'=\alpha A_1+(1-\alpha)A_2 \tag{19}$$

$$B'=\alpha B_1+(1-\alpha)B_2 \tag{20}$$

其中，$\alpha=\dfrac{core^C(A_2)-core^C(A^*)}{core^C(A_2)-core^C(A_1)}$ 是插值基。

这样就产生了一条新的规则 $A'=>B'$，因为 A_1，A_2，B_1，B_2 是正规模糊集，那么 A' 和 B' 也是正规模糊集。

原规则就变为：

<u>Observation: X is A^*</u>

If X is A, then Y is B

Conclusion: Y is B^*

那么，根据前面已经提出了模糊集之间的相似性，我们利

用模糊集 B^* 与 B' 之间的相似性等同于模糊集 A^* 与 A' 之间的相似性来确定 B^* 的形状即：

$$\begin{cases} S^L_{(A^*,A')}=S^L_{(B^*,B')} \\ S^M_{(A^*,A')}=S^M_{(B^*,B')} \\ S^R_{(A^*,A')}=S^R_{(B^*,B')} \end{cases} \tag{21}$$

把(13)(14)(15)式带入式(21)得到模糊集 B^* 的宽度

$$wid^L_\lambda(B^*)=\frac{wid^L_\lambda(A^*)}{wid^L_\lambda(A')}wid^L_\lambda(B'),$$

$$wid^M_\lambda(B^*)=\frac{wid^M_\lambda(A^*)}{wid^M_\lambda(A')}wid^M_\lambda(B'),$$

$$wid^R_\lambda(B^*)=\frac{wid^R_\lambda(A^*)}{wid^R_\lambda(A')}wid^R_\lambda(B')。$$

因此，根据上述第一步与第二步求出的模糊集 B^* 的核心和宽度，我们就可以确定模糊集 B^* 的四个特征点即：

$b1=b2-wid^L_\lambda(B^*)$，$b2=core^C(B^*)-wid^M_\lambda(B^*)/2$，

$b3=core^C(B^*)+wid^M_\lambda(B^*)/2$，$b4=b3+wid^R_\lambda(B^*)$。

4 多维变量模糊推理

现实中问题是复杂的，模糊规则经常使用多维变量表示，因此有必要把此方法推广到多维变量模糊推理。

假定有两条稀疏规则：

规则 1：if x is A_{11} and A_{1i} and…and A_{1n} then Y is B_{11} and B_{1j} and … and B_{1m}

规则 2：if x is A_{21} and A_{2i} and…and A_{2n} then Y is B_{21} and B_{2j} and…and B_{2m}，

观察值 A_1^* and A_2^*，and…and A_n^*

结论 B_1^* and B_2^* and…and B_m^*？

其中，A_{1i}，A_{2i}，A_i^* 是论域 $X\in R$ 上的模糊集 $i=1\cdots n$，B_{1j}，B_{2j} 是论域 $Y\in R$ 上的模糊集 $j=1\cdots m$。

用模糊描述来表示规则前件中的模糊集合，$F_1=[A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}]$，$F_2=[A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n}]$，

$F^*=[A_1^*,A_2^*,\cdots,A_n^*]$，所谓模糊描述为一组模糊集。因为是稀疏规则，假定有一种关系，$F_1<F<F_2$，表示它们之间没有交集。

把模糊集之间的相似性扩展到模糊描述之间的相似性。

定义 7 模糊描述 F_1 与 F_2 之间的左相似性、中相似性和右相似性如下：

$$S^L_{(F_1,F_2)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S^L_{(A_{1i},A_{2i})}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{wid^L_\lambda(A_{1i})}{wid^L_\lambda(A_{2i})} \tag{22}$$

$$S^M_{(F_1,F_2)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S^M_{(A_{1i},A_{2i})}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{wid^M_\lambda(A_{1i})}{wid^M_\lambda(A_{2i})} \tag{23}$$

$$S^R_{(F_1,F_2)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S^R_{(A_{1i},A_{2i})}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{wid^R_\lambda(A_{1i})}{wid^R_\lambda(A_{2i})} \tag{24}$$

其中，$S^L_{(A_{1i},A_{2i})}$、$S^M_{(A_{1i},A_{2i})}$ 和 $S^R_{(A_{1i},A_{2i})}$ 的值是分别依据定义 4 中公式(13)(14)(15)所得。

模糊描述 F 的核心被定义为：

$$core^C(F)=\frac{1}{n}\sum[(core^L(A_i)+core^R(A_i))/2] \tag{25}$$

那么，结论模糊集的核心为：

$$\begin{aligned} core^C(B_j^*)&=F(core^C(A_j^*)) \\ &=\frac{1}{n}\sum\frac{(core^C(A_{2j})-core^C(A_j^*))}{core^C(A_{2j})-core^C(A_{1j})}core^C(B_{1j}) \\ &+\frac{1}{n}\sum\frac{core^C(A^*)-core^C(A_1))}{core^C(A_2)-core^C(A_1)}core^C(B_2) \end{aligned} \tag{26}$$

根据相似性我们可以得到结论模糊集 B_j^* 的宽度：

$$wid^L(B_j^*)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\frac{1}{n}\sum wid^L(A_i^*)}{\frac{1}{n}\sum wid^L(A'_i)}wid^L_\lambda(B'_j)$$

$$wid^M(B_j^*)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\frac{1}{n}\sum wid^M(A_i^*)}{\frac{1}{n}\sum wid^M(A'_i)}wid^M_\lambda(B'_j)$$

$$wid^R(B_j^*)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\frac{1}{n}\sum wid^R(A_i^*)}{\frac{1}{n}\sum wid^R(A'_i)}wid^R_\lambda(B'_j)$$

同理，知道模糊集的核心和宽度就可以确定模糊集 B_j^*。

5 仿真实验

实例 1 单维变量模糊推理情况

规则 1：$A_1(0,3,4,7)\rightarrow B_1(0,2,3,5)$

规则 2：$A_2(16,19,20,23)\rightarrow B_2(20,22,24,26)$

观察值：$A^*(8,9,10,11)$

结论：$B^*(b1,b2,b3,b4)$？

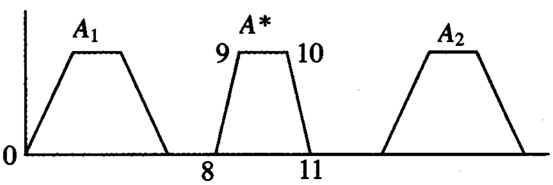

图 2 规则前件和观察值

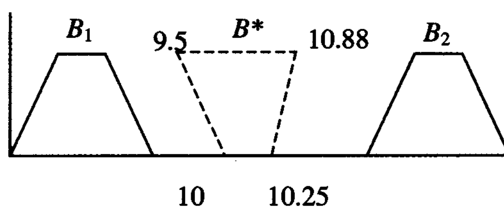

图 3 KH 方法推理结果

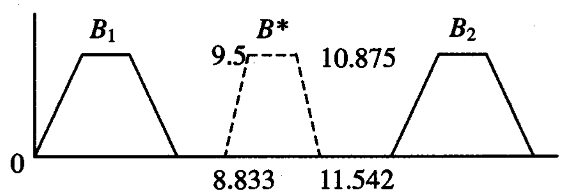

图 4 本文方法推理结果

从图 3 和图 4 对比可以看出，本文方法得出的模糊集(虚线表示的)保证了图形的凸性和正和正规性，推理效果比较好。

实例 2 多维变量模糊推理情况

规则 1：$A_{11}(1,4,5,6)$ and $A_{12}(1,5,6,8)\rightarrow B_{11}(8,9,11,12)$ and $B_{12}(5,6,8,9)$

规则 2：$A_{21}(17,21,22,25)$ and $A_{22}(19,22,23,28)\rightarrow B_{21}(29,30,31,32)$ and $B_{22}(28,29,30,31)$

观察值：$A_1^*(10,10.5,11,11.5)$ and $A_2^*(15.5,16,16.5,17)$

结论：$B_1^*(b11,b12,b13,b14)$ and

$B_2^*(b21,b22,b23,b24)$？

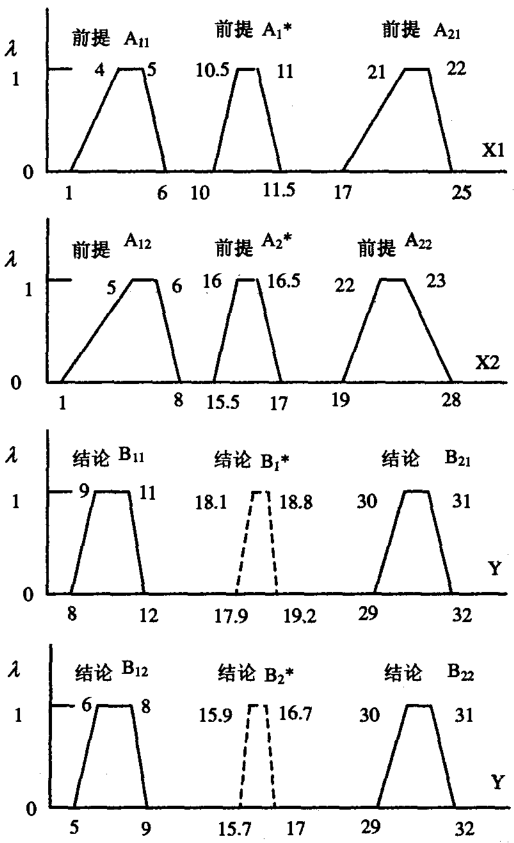

图5 本文方法推理结果

如图5所示，本文方法也适用于多维变量模糊差值推理，得出的结论模糊集(虚线表示的)保证了模糊集的凸性和正规。

结论 Koczy和Hirota提出的KH线性插值推理方法的推理结果在许多情况下是非凸的，甚至不是模糊集，这使得KH方法在实际应用中受到很多限制。本文提出一种基于核集和宽度相似性模糊插值推理方法，首先利用拉格朗日插值确定模糊集的核心，然后根据线性插值构造一新的规则，在模糊集之间的宽度相似性原理的基础上，使新规则的前件与观察值之间的相似性等于后件与结论模糊集之间的相似性，从而得到结论模糊集的形状宽度，保证推理结果的凸性和正规性，并把此方法推广到多维变量的情况。此方法简单直观，通过仿真试验并且与KH方法进行了比较，证明该方法能较好地保证推理结果隶属函数的凸性和正规性，为智能系统中的模糊推理提供了一个十分有用的工具。

参考文献

1 Kóczy L T, Hirota K. Interpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rules bases Inform. Sci, 1993, 71:169～201
2 Koczy L T, Hirota K. Approximate reasoning by linear rule interpolation and general approximation [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1993, 9(3):197～225
3 Shi Y M M. Some Considerations on Koczy's fuzzy Interpolative Reasoning Method. In: Proceedings of the International Joint Conference of the Fourth IEEE International Fuzzy Engineering Symposium, 1995. 2117～2122
4 Chen Shi-Jay, Chen Shyi-Ming. A New Method to Measure the Similarity between Fuzzy Numbers. In: The IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2001. 1123～1126
5 王天江，卢正鼎，李凡. 基于几何相似的模糊推理. 计算机科学，2004,31(9):169～175
6 Li Hong-xing. Fuzzy control interpolative principle [J]. China Science, 1998,28(3): 259～267

(上接第165页)

$(O_8,O_{12}),(O_9,O_1),(O_9,O_2),(O_9,O_4),(O_9,O_7),(O_9,O_{10}),(O_9,O_{12}),(O_1,O_3),(O_1,O_5),(O_1,O_6),(O_1,O_8),(O_1,O_9),(O_1,O_{11}),(O_{10},O_3),(O_{10},O_5),(O_{10},O_6),(O_{10},O_8),(O_{10},O_9),(O_{10},O_{11})\}$。

根据定义7可以求得 $F_1=F_2=a\wedge b\wedge d$，由定理9可知 $\{a,b,d\}$ 是表1所示不完备决策系统的下近似分布约简和上近似分布约简。根据定理4，$\{a,b,d\}$ 也是表1的粗糙分布约简。

结束语 粗糙集理论与方法在不完备信息系统中的扩充是粗集理论研究的一个热点问题。目前，不完备信息系统中的未知属性值可以有两种不同的语义解释，即遗漏型或丢失型。由于以往很多学者在不完备决策系统中进行知识约简方法的研究都是基于容差关系的(遗漏型未知属性值)，因此笔者的出发点是不完备决策系统中基于非对称相似关系(丢失型未知属性值)的粗糙集模型。接着，本文将几种不同的约简形式引入到不完备决策系统中并给出了相应的判定定理与辨识矩阵。这些工作都为从不完备系统中获取知识提供了新的理论方法和技术手段。

笔者下一步将对形式更为复杂的不完备决策系统中知识约简方法进行研究，如决策系统中同时出现遗漏型和丢失型未知属性值[16]。

参考文献

1 Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis [J]. Cybernetics and Systems, 1998, 29: 661～688
2 Pawlak Z. Rough sets and intelligent data analysis [J]. Information Sciences, 2002, 147: 1～12
3 Kryszkiewicz M. Comparative study of alternative types of knowledge reduction in inconsistent systems [J]. Information Sciences, 1999, 113: 271～292
4 张文修，米据生，吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机学报，2003, 26(1): 12～18
5 Mi Jusheng, Wu Weizhi, Zhang Wenxiu. Approaches to knowledge reduction based on variable precision rough set model [J]. Information Sciences, 2004, 159 (3-4): 255～272
6 管涛，冯博琴. 模糊目标信息系统上的知识约简方法[J]. 软件学报，2004, 15(10): 1470～1478
7 王国胤. Rough集理论在不完备信息系统中的扩充[J]. 计算机研究与发展，2002, 39(10): 1238～1243
8 Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems [J]. Information Sciences, 1998, 112: 39～49
9 周献中，黄兵. 基于粗集的不完备信息系统属性约简[J]. 南京理工大学学报(自然科学版)，2003, 27(5): 630～635
10 Guan Yanyong, Wang Hongkai. Set-valued information systems [J]. International Journal of Information Sciences, 2006, 176 (17): 2507～2525
11 Leung Yee, Li Deyu. Maximal consistent block technique for rule acquisition in incomplete information systems [J]. Information Sciences, 2003, 15: 85～106
12 Wu Weizhi, Zhang Wenxiu, Li Huaizu. Knowledge acquisition in incomplete fuzzy information systems via the rough set approach [J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 280～286
13 Grzymala-Busse J W, Wang A Y. Modified algorithms LEM1 and LEM2 for rule induction from data with missing attribute values. In: Proceeding of the Fifth International Workshop on Rough Sets and Soft Computing (RSSC'97) at the Third Joint Conference on Information Sciences (JCIS'97), Research TrianglePark, NC, March 1997. 69～72
14 Grzymala-Busse J W. On the unknown attribute values in learning from examples. In: Proceeding of the 6th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems (ISMIS-91), Charlotte, North Carolina, October 1991. Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol 542. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991. 368～377
15 Stefanowski J, Tsoukias A. Incomplete information tables and rough classification [J]. Computational Intelligence, 2001, 17: 545～566
16 Grzymala-Busse J W. Characteristic Relations for Incomplete Data: A Generalization of the Indiscernibility Relation. In: Proceeding of the Third International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC 2004), Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol 3066. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004. 244～253