知识表达系统函数规则简化的理论基础

李小霞　陈绵云
（华中科技大学控制科学与工程系　武汉430074）

Theoretical Research about Reduction of Functional Rule from a Knowledge Representation System

LI Xiao-Xia　CHEN Mian-Yun
(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract　In this paper, we describe in mathematical language a problem of reduction of a functional rule from a knowledge representation system(KRS). Then the invert relations between the reduction of functional rule and the reduction of a family of subsets are discussed in detail. In the big frame, not only a series of new concepts, new problems and new theorems are found out, but also new mathematical descriptions for some original concepts and problems in rough set theory are given. Finally based on the theoretical research, an algorithm about reduction of functional rule is described.

Keywords　Rough set theory, Knowledge representation system, Functional rule, Reduction of functional rule, Reduction of a family of subsets

0　引言

粗集理论[1]是波兰的Z.Pawlak等一批科学家提出来的，被用来研究不完整数据、不精确知识的表达、学习、归纳等。有些学者认为它无论在理论和应用上都是一种新的、最重要的并且是迅速发展的研究领域，为机器学习、知识获取、决策分析、数据库知识发现、专家系统、决策支持系统、归纳推理、模式识别、模糊控制等提供了一种很有效的数学方法。我们的研究思路是从寻找粗集理论与这些实际应用的接口开始的，如图1所示。文[2][3]是近年来中国出版的粗集理论的专著，比较系统地收录和总结了粗集理论在理论和应用方面的成果。它们总结的粗集理论在应用方面的研究，大都涉及了决策表的简化。这与我们从诸多文献的阅读中得到的结论是相同的。可见决策表的简化是粗集理论与实际应用的一个重要接口。文[3]比较全面地收集了决策表简化的理论，从决策表简化的角度来看，我们发现文[3]中与决策表简化相关的内容有三块——第一块讨论等价关系族的简化和集族的简化（文[3]中第四章的1、2、3、4节），第二块讨论知识表达系统的决策表的简化（文[3]中第五章的第5节），第三块用决策逻辑语言来研究知识表达系统决策表的简化（文[3]中第六章的8、9、10、11节）。我们看到在第二块，粗集理论直接把决策表的简化问题转化为等价关系族和集族的简化问题来解决，这样的做法导致了我们对一些问题的困惑——什么是决策表的简化（在粗集理论中，决策表的简化有种种的形式，如图1所示），决策表的种种简化与等价关系族和集族的简化有什么关系（在粗集理论中，等价关系族和集族的简化也有种种形式，如图1所示）。我们从这些困惑出发，做了一系列的工作。这篇论文收集了我们一部分工作——知识表达系统函数规则简化的理论基

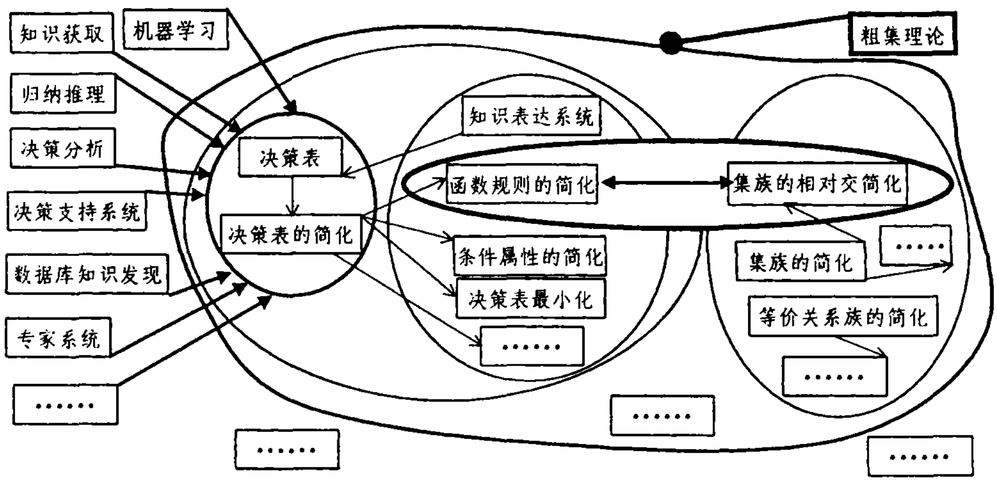

图1　本文的研究思路

*）国家自然科学基金（79970025）和国防科研基金（00J15.3.3.JW0528）。李小霞　博士生，研究方向包括知识发现、粗集理论、系统科学及其应用。陈绵云　教授，博导，研究方向包括灰色动态建模与控制、模糊控制与决策、一般系统论及应用。

础。我们的工作目标在于形式化地描述知识表达系统函数规则的简化问题，研究知识表达系统函数规则的简化问题与集族的简化问题之间的转化关系(如图1所示)。为了说明这些理论是有用的，我们给出了一个知识表达系统函数规则的简化算法。可以看到，这个算法是建立在严密的理论基础上，其正确性是可以一步一步证明的。本文的工作以及其它的一些具体的研究，显示我们的研究思路具有下述的意义，从而证明了它的可行性——丰富了粗集理论(我们对知识表达系统相关的简化问题给出形式化的描述及其相应的性质，提出了新的等价关系族和集族简化的定义及其相关的性质，使知识表达系统的简化和等价关系族和集族的简化具有清晰明确的转化关系，这都是原有的粗集理论不曾有的)；使相关的简化算法建立在严格的理论基础上；使得知识表达系统相关的简化问题与等价关系族和集族的简化问题既彼此独立又相互联系，不仅便于二者的融合，也便于二者各自独立地拓展；因为所有的定义、问题、问题的解决都是用数学语言描述的，这使得知识表达系统相关的简化理论具有一定的普适性，不仅适用于数据表的简化，任何的实际对象，只要能用知识表达系统来描述，就有可能用它相关的简化来操作。

注：为了表达上的方便，本文中使用了一些符号，我们把这些符号的意义收集到了附录中。

1 基本概念

1.1 知识表达系统

知识表达系统的形式化描述为 KS=〈Universe，Attr〉，其中 KS 代表一个知识表达系统，Universe，Attr 都是非空集合，并且对$\forall$ a$\in$Attr，a 是 Universe 上的一个映射，即 a：Universe$\to$Dom(a)，其中 Dom(a)表示映射 a 的值域。我们称 Universe 中的元素为这个知识表达系统的对象，Attr 中的元素为对象的属性，Attr 的子集为属性集。

1.2 属性的不可分辨关系

假设 KS=〈Universe，Attr〉是一个知识表达系统。对$\forall$ $a\in Attr$，定义 $inda=\{(x,y)\mid x,y\in Unvierse$，并且 $a(x)=a(y)\}$，称 $inda$ 为属性 a 的不可分辨关系。容易证明：$inda\in$ Equ[Universe]。对$\forall$ $F\subseteq Attr, F\neq\varnothing$，记 $indF=\{inda\mid a\in F\}$。

1.3 知识表达系统的决策规则

假设 KS=〈Universe，Attr〉是一个知识表达系统，x$\in$Universe，C，D$\subseteq$Attr，C，D$\neq\varnothing$，C$\cap$D=$\varnothing$，令 Rule(x，C，D)=({(a，a(x))| a$\in$C }，{(b，b(x))|b$\in$D })，称 Rule(x，C，D)为这个知识表达系统以 x 为标识，以 C 为条件属性集，以 D 为决策属性集的规则。其中称{(a，a(x))| a$\in$C}为 Rule(x，C，D)的条件集合，记为 Con(x，C，D)，称{(b，b(x))|b$\in$D}为 Rule(x，C，D)的决策集合，记为 Dec(x，C，D)。如果 Rule(x，C，D)满足对$\forall$ y$\in$Universe，Con(y，C，D)=Con(x，C，D)蕴含 Dec(y，C，D)=Dec(x，C，D)，则称 Rule(x，C，D)为函数规则。对$\forall$ x，y(Universe，$\forall$ C，C'，D，$D'\subseteq$Attr，C，C'，D，$D'\neq\varnothing$，C$\cap$D=$\varnothing$，$C'\cap D'=\varnothing$，如果 Con(x，C，D)=Con(y，C'，D')并且 Dec(x，C，D)=Dec(y，C'，D')，则称规则 Rule(x，C，D)和 Rule(y，C'，D')相同，记为 Rule(x，C，D)=Rule(y，C'，D')。

定理1 假设 KS=〈Universe，Attr〉是一个知识表达系统，x$\in$Universe，C，D$\subseteq$Attr，C，D$\neq\varnothing$，C$\cap$D=$\varnothing$，则 Rule(x，C，D)是函数规则 IFF$[x]_{\cap indC}\subseteq[x]_{\cap indD}$。

证明：首先证明如果 Rule(x，C，D)是函数规则，则$[x]_{\cap indC}\subseteq[x]_{\cap indD}$。

$\forall\ y\in Universe, y\in[x]_{\cap indC}\to(y,x)\in\bigcap indC\to\forall\ r\in C,(y,x)\in indr\to\forall\ r\in C, r(x)=r(y)\xrightarrow{Rule(x,C,D)\text{是函数规则}}\forall\ s\in D, s(x)=s(y)\to\forall\ s\in D,(y,x)\in inds\to(y,x)\in\bigcap indD\to y\in[x]_{\cap indD}$。

其次证明如果$[x]_{\cap indC}\subseteq[x]_{\cap indD}$，则 Rule(x，C，D)是函数规则。

假设 $y\in Universe$，并且满足$\forall\ r\in C, r(y)=r(x)\to\forall\ r\in C,(y,x)\in indr\to(y,x)\in\bigcap indC\to y\in[x]_{\cap indC}\xrightarrow{[x]_{\cap indC}\subseteq[x]_{\cap indD}}y\in[x]_{\cap indD}\to(y,x)\in\bigcap indD\to\forall\ s\in D,(y,x)\in inds\to\forall\ s\in D, y\in[x]_{inds}\to\forall\ s\in D, s(x)=s(y)$。 □

2 两个简化问题

2.1 函数规则的简化问题

假设 KS=〈Universe，Attr〉是一个知识表达系统，Rule(x，C，D)是它的一条函数规则。对$\forall$ r$\in$C，如果规则 Rule(x，C−{r}，D)是函数规则，则称 r 可以从 Rule(x，C，D)中去掉；如果对$\forall$ r$\in$C，r 都不能从 Rule(x，C，D)中去掉，则称 Rule(x，C，D)是独立的；对$\forall$ $C'\subseteq$C，$C'\neq\varnothing$，如果 Rule(x，C'，D)是函数规则，并且 Rule(x，C'，D)是独立的，则称 Rule(x，C'，D)是 Rule(x，C，D)的简化。记 Reduct(x，C，D)={C' | Rule(x，C'，D)是 Rule(x，C，D)的简化}，称为规则 Rule(x，C，D)的简化集，Core(x，C，D)={r|r$\in$C，并且 r 不能从 Rule(x，C，D)中去掉}，称为规则 Rule(x，C，D)的核集。

知识表达系统的规则被定义为二元组(A，B)，其中 A，B 又分别是由属性和属性值组成的二元组的集合，当集合 A，B 间的关系是函数关系时，称规则(A，B)为函数规则。假设(A'，B)是函数规则(A，B)的简化，则 A' 是 A 的子集，是 A 在保持与 B 的函数关系不变的条件下收缩到最小的结果。由此，可以看出函数规则的简化是规则的条件集的局整变换。

定理2 假设 KS=〈Universe，Attr〉是一个知识表达系统，Rule(x，C，D)是它的一条函数规则，则有下述结论成立：

(1)假设 r$\in$C，并且 r 不能从 Rule(x，C，D)中去掉，$C'\subseteq$C，$C'\neq\varnothing$，Rule(x，C'，D)是函数规则，则 r$\in C'$，并且 r 不能从 Rule(x，C'，D)中去掉。

(2)假设 $C'\subseteq$C，$C'\neq\varnothing$，Rule(x，C'，D)是函数规则，则存在 $C''\subseteq C'$，$C''\neq\varnothing$，满足 Rule(x，C''，D)是 Rule(x，C，D)的简化。

(3)$\bigcap$Reduct(x，C，D)=Core(x，C，D)。

证明 (1)r 不能从 Rule(x，C，D)中去掉$\to$Rule(x，C−{r}，D)不是函数规则$\to\exists$ y$\in$Universe，满足 Con(x，C−{r}，D)=Con(y，C−{r}，D)并且 Dec(x，C−{r}，D)$\neq$Dec(x，C−{r}，D)。假设 r$\notin C'\to C'\subseteq$C−{r}$\to$Con(x，C'，D)=Con(y，C'，D)并且 Dec(x，C'，D)$\neq$Dec(y，C'，D)$\to$Rule(x，C'，D)不是函数规则，这与条件矛盾，所以假设不成立，r$\in C'$。基于同样的理由，r 不能从 Rule(x，C'，D)中去掉。

(2)假设对$\forall$ $C''\subset C'$，Rule(x，C''，D)都不是 Rule(x，C，D)的简化，则 Rule(x，C'，D)是 Rule(x，C，D)的简化。所以(2)必然成立。

(3)对$\forall$ r$\in\bigcap$Reduct(x，C，D)，假设 r$\notin$Core(x，C，D)，则由(2)可得存在 $C'\subseteq$C−{r}，满足 Rule(x，C'，D)是 Rule(x，C，D)的简化，这与 r$\in\bigcap$Reduct(x，C，D)矛盾，所以假设

不成立，$r\in Core(x,C,D)$。同时对$\forall\ t\in Core(x,C,D)$，根据(1)可得 $t\in\bigcap Reduct(x,C,D)$。

2.2 集族的简化问题

假设 $F\subseteq P(Universe)$，$F\neq\varnothing$，$Y\in P(Universe)$，$Y\neq\varnothing$，$\bigcap F\subseteq Y$，对$\forall\ X\in F$，如果$\bigcap(F-\{X\})\subseteq Y$，则称 X 在 F 中相对于 Y 不可去掉，否则称为可以去掉；如果对$\forall\ X\in F$，X 在 F 中相对于 Y 都不可以去掉，则称 F 相对于 Y 独立；对$\forall\ G\subseteq F$，$G\neq\varnothing$，如果$\bigcap G\subseteq Y$，并且 G 相对于 Y 独立，则称 G 是 F 相对于 Y 的简化；记 $Reduct(F,Y)=\{G|G$ 是 F 相对于 Y 的简化$\}$，称为 F 的简化族，$Core(F,Y)=\{X|X\in F$，并且 X 在 F 中相对于 Y 不可去掉$\}$，称为 F 的核集。

集族 F 相对于集合 Y 的简化与 F 之间是局整关系，是 F 在保持交运算的结果包含在 Y 中的条件下收缩到最小的结果。由此可见集族的简化是一定条件下的局整变换。

3 两个简化问题之间的相互转化关系

引理1 假设 $P\subseteq Equ[Universe]$，$P\neq\varnothing$，则有$\forall\ x\in Universe$，$[x]_{\cap P}=\bigcap\{[x]_r|r\in P\}$。

证明：$\forall\ y\in[x]_{\cap P}\leftrightarrow(y,x)\in\bigcap P\leftrightarrow\forall\ r\in P,(y,x)\in r\leftrightarrow\forall\ r\in P,y\in[x]_r\leftrightarrow y\in\bigcap\{[x]_r|r\in P\}$ □

定理3 假设 Rule(x,C,D)是知识表达系统 KS=〈Universe，Attr〉中的一条函数规则，$C^*\subseteq C$，$C^*\neq\varnothing$，则有：Rule(x,C^*,D)是 Rule(x,C,D)的简化 IFF $\{[x]_{indb}|b\in C^*\}$是$\{[x]_{inda}|a\in C\}$相对于$[x]_{\cap indD}$的简化。

证明：Rule(x,C,D)是函数规则$\xrightarrow{\text{定理1}}[x]_{\cap indC}\subseteq[x]_{indD}\xrightarrow{\text{引理1}}\bigcap\{[x]_{inda}|a\in C\}\subseteq[x]_{\cap indD}$；

首先证明如果 Rule(x,C^*,D)是 Rule(x,C,D)的简化，则$\{[x]_{indb}|b\in C^*\}$是$\{[x]_{inda}|a\in C\}$相对于$[x]_{\cap indD}$的简化。

Rule(x,C^*,D)是 Rule(x,C,D)的简化→Rule(x,C^*,D)是函数规则$\xrightarrow{\text{定理1}}[x]_{\cap indC^*}\subseteq[x]_{\cap indD}\xrightarrow{\text{引理1}}\bigcap\{[x]_{indb}|b\in C^*\}\subseteq[x]_{\cap indD}$；

Rule(x,C^*,D)是 Rule(x,C,D)的简化→Rule(x,C^*,D)是独立的→$\forall\ b\in C^*$，Rule(x,C^*,D)不是函数规则$\xrightarrow{\text{定理1}}[x]_{\cap indC^*}\not\subseteq[x]_{\cap indD}\xrightarrow{\text{引理1}}\bigcap\{[x]_{indb}|b\in C^*\}\not\subseteq[x]_{\cap indD}\to\{[x]_{indb}|b\in C^*\}$相对于$[x]_{\cap indD}$独立。

其次证明如果$\{[x]_{indb}|b\in C^*\}$是$\{[x]_{inda}|a\in C\}$相对于$[x]_{\cap indD}$的简化，则 Rule(x,C^*,D)是 Rule(x,C,D)的简化。

$\{[x]_{indb}|b\in C^*\}$是$\{[x]_{indb}|a\in C\}$相对于$[x]_{\cap indD}$的简化$\to\bigcap\{[x]_{indb}|b\in C^*\}\subseteq[x]_{\cap indD}\xrightarrow{\text{引理1}}[x]_{\cap indC^*}\subseteq[x]_{\cap indD}\xrightarrow{\text{定理1}}$Rule$(x,C^*,D)$是函数规则；

$\{[x]_{indb}|b\in C^*\}$是$\{[x]_{inda}|a\in C\}$相对于$[x]_{\cap indD}$的简化$\to\{[x]_{indb}|b\in C^*\}$相对于$[x]_{indD}$独立$\to\forall\ b^*\in C^*,\bigcap\{[x]_{indb}|b\in C^*,\ and\ \ b\neq b^*\}\not\subseteq[x]_{indD}\xrightarrow{\text{引理1}}\forall\ b^*\in C^*,[x]_{ind(C^*-\{b^*\})}\not\subseteq[x]_{\cap indD}\xrightarrow{\text{定理1}}$Rule$(x,C^*,D)$独立。 □

4 知识表达系统函数规则的简化算法

我们将使用类 C 语言描述知识表达系统函数规则的简化算法。

输入：知识表达系统 KS=〈Universe，Attr〉的一条规则 Rule(x，C，D)，假设 $C=\{C_1,C_2,C_2,\cdots,C_n\}$；
输出：Rule(x，C，D)的一个简化；
算法：
/ * 判断 Rule(x，C，D)是否是函数规则 * /
生成$[x]_{\cap indC}$和$[x]_{\cap indD}$；
if($[x]_{\cap indC}\not\subseteq[x]_{\cap indD}$)then {输出"规则不是函数型的"；算法结束；}
/ * 依次扫描 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，判断能否去掉 * /
Family=C；
for i=1 To n step 1
{ if(i=n)then {if(Family 是单元素集)then {go to result}}；
  生成$[x]_{\cap ind(Family-\{C_i\})}$；
  if($[x]_{\cap ind(Family-\{C_i\})}\subseteq[x]_{\cap indD}$)then {Family=Family-{$C_i$}}
}
result：输出 Family； □

算法正确性的说明还需要用到下面的定理。

定理4 假设 KS=〈Universe，Attr〉是一个知识表达系统，$F\subseteq Attr$，$F\neq\varnothing$，则对$\forall\ x\in Universe$，$[x]_{\cap indF}=\{y|y\in Universe\ and\ \forall\ r\in F,r(y)=r(x)\}$。

证明：$\forall\ y\in Universe,\forall\ r\in F,r(y)=r(x)\to\forall\ r\in F,(y,x)\in indr\to(y,x)\in\bigcap\{indr|r\in F\}\to y\in[x]_{\cap indF}$；

$\forall\ y\in[x]_{\cap indF}\to(y,x)\in\bigcap indF\to\forall\ r\in F,(y,x)\in indr\to\forall\ r\in F,r(y)=r(x)$。 □

定理5 假设：$F=\{X_1,X_2,\cdots,X_{n_1},X_{n_1+1},\cdots,X_{n_2},\cdots,X_{n_l},X_{n_l+1},\cdots,X_n\}\subseteq P(Universe)$，$F\neq\varnothing$，$Y\subseteq Universe$，$Y\neq\varnothing$，$\bigcap F\subseteq Y$，满足：

$X_i(1\leqslant i<n_1)$在 F 中相对于 Y 不能够去掉，X_{n_1}在 F 中相对于 Y 可以去掉；

令 $F_1=F-\{X_{n_1}\}$，$X_i(n_1+1\leqslant i<n_2)$在 F_1中相对于 Y 不能够去掉，X_{n_2}在 F_1中相对于 Y 可以去掉；

令 $F_2=F-\{X_{n_1},X_{n_2}\}$，如此类推，直到：

令 $F_{l-1}=F-\{X_{n_1},X_{n_2},\cdots,X_{n_{l-1}}\}$，$X_i(n_{l-1}+1\leqslant i<n_l)$在 F_{l-1}中相对于 Y 不能够去掉，X_{n_l}在 F_{l-1}中相对于 Y 可以去掉；

令 $F_l=F-\{X_{n_1},X_{n_2},\cdots,X_{n_{l-1}},X_{n_l}\}$，$X_i(n_l+1\leqslant i\leqslant n)$在 F_l 中相对于 Y 不能够去掉，则 F_l 是 F 相对于 Y 的简化。

证明 直接根据简化的定义可得。 □

定理6 假设 $Rule(x,F,D)$是知识表达系统 KS=〈Universe，Attr〉的函数规则，并且 $F=\{C_1,C_2,\cdots,C_{n_1},C_{n_1+1},\cdots,C_{n_2},\cdots,C_{n_l},C_{n_l+1},\cdots,C_n\}$，满足：$C_i(1\leqslant i<n_1)$不能从 Rule(x，F，D)中去掉，$C_{n_1}$能够从 Rule(x，F，D)中去掉；令 $F_1=F-\{C_{n_1}\}$，$C_i(n_1+1\leqslant i<n_2)$不能从 Rule$(x,F_1,D)$中去掉，$C_{n_2}$能够从 Rule$(x,F_1,D)$中去掉；如此类推，直到：

令 $F_{l-1}=F-\{C_{n_1},C_{n_2},\cdots,C_{n_{l-1}}\}$，$C_i(n_{l-1}+1\leqslant i<n_l)$不能从 Rule$(x,F_{l-1},D)$中去掉，$C_{n_l}$能够从 Rule$(x,F_{l-1},D)$中去掉；

令 $F_l=F-\{C_{n_1},C_{n_2},\cdots,C_{n_{l-1}},C_{n_l}\}$，$C_i(n_l+1\leqslant i\leqslant n)$不能从 Rule$(x,F_l,D)$中去掉，则 Rule$(x,F_l,D)$是 Rule(x，F，D)的简化。

证明 直接由函数规则简化的定义得到。 □

算法说明：算法首先根据定理1判断 Rule(x，C，D)是否是函数规则，为此，需要根据定理4求 x 的两个等价类，然后才进入函数规则的简化。可以用两种不同的方法证明算法函数规则简化部分的正确性。一是根据定理6，逐一扫描各个属性，判断去掉后是否还是函数规则，判断规则是否是函数型的依然是根据定理1和定理4；二是根据定理3，首先将函数规则的简化转化为集族的简化。然后根据定理5，依次扫描每一个子集，判断能否去掉，为此算法根据引理1和定理4生成了剩余的子集的交集。

（下转第59页）

众所周知，运行时间长一直是感知机与 BP 神经网络在实际应用中难以克服的困难，覆盖算法利用神经元的几何意义，开辟了一条新的研究神经网络的路径，克服了网络运行速度瓶颈问题。而 Rough 集理论在保证信息量不变的前提下，提取最少个数的特征属性，降低样本空间的维数，加大了样本点的分布密度，从而，可以减少覆盖的个数，提高系统的精度。同时，也减少了数据的收集与存储成本。但是，CSN 与 RCSN 的运行时间和精度与学习中初始点的选取密切相关，如何选择样本的学习顺序是我们正着手研究的问题。

参 考 文 献

1 张铵，张铃．人工神经网络的设计方法．清华大学学报(自然科学版)，1998，38(S1)：1～4

2 张铃，张铵，殷海风．多层前向网络的交叉覆盖算法．软件学报，1999，10(7)：737～742

3 Pawlak A. Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data [M]. Kluwer Academic Pub.，1992

4 张文修，吴伟志．粗糙集理论介绍和研究综述．模糊系统与数学，2000，14(4)：1～12

5 王珏，苗夺谦，周育健．关于 Rough Set 理论与应用的综述[J]．模式识别与人工智能，1996，9：337～344

6 张铃，张铵．M-P 神经元模型的几何意义及其应用．软件学报，1998，9(5)：334～338

7 Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis [J]. Cybernetics and Systems: An International Journal，1998，29：661～688

8 吴鸣锐．大规模模式识别问题的分类器设计研究：[工学博士学位论文]．北京：清华大学计算机系，2000

9 刘清．Rough 集及 Rough 推理．科学出版社，2001.8

(上接第56页)

5 算法示例

数据表1可以描述为一个知识表达系统 KS=(Universe，Attr)，其中 Universe={对象1，对象2，对象3，对象4，对象5，对象6，对象7，对象8}，Attr={C_1，C_2，C_3，D}。当表1被描述为一个知识表达系统后，就可以用对知识表达系统操作的简化运算对它进行操作。比如 Rule(对象1，{C_1，C_2，C_3}，{D})是它的一条函数规则，可以根据定义直接判断，也可以根据定理1来判断，我们要用知识表达系统函数规则的简化算法对这条规则进行简化。

数据表1　可以描述为一个知识表达系统

Universe 对象	C_1高度	C_2头发	C_3眼睛	D 分类
对象1	矮	黑	蓝	—
对象2	高	黑	蓝	—
对象3	高	黑	棕	—
对象4	高	红	蓝	+
对象5	矮	黄	蓝	+
对象6	高	黄	棕	—
对象7	高	黄	蓝	+
对象8	矮	黄	棕	—

生成[对象1]$_{\cap ind(C_1,C_2,C_3)}$和[对象1]$_{\cap ind(D)}$，[对象1]$_{\cap ind(C_1,C_2,C_3)}$={对象1}，[对象1]$_{ind(D)}$={对象1，对象2，对象3，对象6，对象8}；

[对象1]$_{\cap ind(C_1,C_2,C_3)}\subseteq$[对象1]$_{\cap ind(D)}$，所以 *Rule*(对象1，{$C_1$，$C_2$，$C_3$}，{$D$})是函数规则；Family={$C_1$，$C_2$，$C_3$}；

生成[对象1]$_{\cap ind(Family-\{C_1\})}$={对象1，对象2}，因为[对象1]$_{\cap ind(Family-\{C_1\})}\subseteq$[对象1]$_{\cap ind(D)}$，所以 Family={$C_2$，$C_3$}；

生成[对象1]$_{\cap ind(Family-\{C_2\})}$={对象1，对象2，对象4，对象5，对象7}，因为[对象1]$_{\cap ind(Family-\{C_2\})}\not\subset$[对象1]$_{\cap ind(D)}$，所以 Family={$C_2$，$C_3$}；

生成=[对象1]$_{\cap ind(Family-\{C_3\})}$={对象1，对象2，对象3}，因为[对象1]$_{\cap ind(Family-\{C_3\})}\not\subset$[对象1]$_{\cap ind(D)}$，所以 Family={$C_2$，$C_3$}；

输出 Family={C_2，C_3}，算法结束。

结束语　本文旨在研究粗集理论中函数规则的简化和集族的相对交简化之间的相互转化关系。这项研究在粗集理论中的位置及其在粗集理论与其它研究领域中的位置表示在图1中。从图1可以看到，对于知识表达系统，粗集理论中已经涉及到了它的一些简化问题，但缺乏形式语言描述；对于等价关系族和集族的简化，粗集理论已经用数学语言描述了几种具体的形式，但缺乏对两类简化问题关系的探讨；粗集理论与其它的一些应用领域的接口主要是决策表的简化。我们认为：对知识表达系统、等价关系族、集族的简化应该可以提出更多的具体形式，相应地，两类转化问题之间会存在更为复杂的转化关系；应用领域与粗集理论的接口也不应该限制到决策表的简化上。本文的工作是在这个大思路下产生的。沿着这个思路，还可以产生其它的结果，这些结果将使得粗集理论更加丰富和严谨，使得其它领域对粗集理论的应用更加广阔和灵活。

附录：本文经常使用的符号说明

-：如果符号的左右两边是两个子集合，那么符号表示两个集合的差运算；

$\subseteq$：左边的子集包含在右边的子集中；

$\subset$：左边的子集真包含在右边的子集中；

$\not\subset$：左边的子集不包含在右边的子集中；

$\in$：左边的元素属于右边的集合；

$\varnothing$：空子集；$\forall$：量词任意；$\exists$：量词存在；

Equ[Universe]：集合 Universe 上所有的等价关系组成的集合；

IFF：当且仅当；

$[x]_r$：x 是集合中的一个元素，r 是这个集合上的一个等价关系，$[x]_r$ 表示 x 所在的 r 的等价类；

$P \xrightarrow{T} Q$：P，T，Q 是三个命题，$P \xrightarrow{T} Q$ 表示根据命题 T，由命题 P 可推出命题 Q；

$P \xrightarrow{T} Q$：P，T，Q 是三个命题，$P \xrightarrow{T} Q$ 表示根据命题 T，命题 P 成立当且仅当命题 Q 成立；

P()：如果括号中是一个集合，则符号表示这个集合的幂集。

参 考 文 献

1 Pawlak Z. Rough Sets—Theoretical Aspects of Reasoning about Data，Kluwer Academic Publications，Dordrecht，1991

2 刘清．Rough 集及 Rough 推理．科学出版社，2001

3 曾黄麟．粗集理论及其应用——关于数据推理的新方法(修订版)．重庆大学出版社，1998