

# 二阶张量场可视化研究

李海生<sup>1</sup> 杨 钦<sup>2</sup> 陈其明<sup>1</sup>

(北京航空航天大学机械工程与自动化学院 北京100083)<sup>1</sup>

(北京航空航天大学计算机科学与技术系 北京100083)<sup>2</sup>

## The Research on Visualization of Second Order Tensor Fields

LI Hai-Sheng<sup>1</sup> YANG Qin<sup>2</sup> CHEN Qi-Ming<sup>1</sup>

(Dept. of Mechanical Engineering and Automation<sup>1</sup>, Dept. of Computer Science and Technology<sup>2</sup>,

Beijing Univ. of Aeronautics and Actronautics, Beijing 100083)

**Abstract** Second-order tensors are widely existed in engineering, physical science and biomechanics. Examples are stresses and strains in solids and velocity gradients in fluid flows. This paper takes the Boussinesq's problem as an example which is typical in Elasticity Mechanics, and visualizes the second-order real symmetric tensor fields by ellipsoid icons and hyperStreamlines. The results are reasonable. The visualization methods adopted in this paper are also suitable for other second-order symmetric tensor fields such as electromagnetic field.

**Keywords** Tensor fields, Visualization, Ellipsoid icons, Hyperstreamline

## 1. 引言

当今科学计算可视化的研究对象主要集中在三维数据场的可视化,来源于有限元分析、流体力学、力场、医学、气象场、温度场中的许多三维体数据,它们可表示为分布于体空间的单值函数  $V=f(x,y,z)$ ,当  $V$  为标量时则为标量场,若  $V$  为矢量则为矢量场,若  $V$  为张量则为张量场。体数据场包含的信息量非常丰富,数据量也非常多,经过可视处理,借助计算机图形学的理论和数字图像技术,可直观地反映出数据场内部信息的分布规律以及变化过程。

目前,关于标量场的可视化技术研究得已经比较成熟。与标量场相比,矢量场和张量场的最大不同点在于每一物理量不仅具有大小而且具有方向,这种方向性的可视化要求决定了它与标量场完全不同的可视化映射方法。张量在计算流体力学(CFD)和有限元分析中经常使用。三维空间中的一个二阶张量表示为一个  $3 \times 3$  矩阵,一个张量场是由二维或三维场中一系列这样的矩阵组成。

二阶张量场广泛存在于工程和物理科学中。如实体中的应力和应变及流体中的速度梯度、流体微团的变形率等均为二阶张量。一个二阶张量有九个分量,张量场的可视化是一个很复杂的问题,同时也是目前可视化研究的热点所在<sup>[1]</sup>。本文讨论二阶实对称张量场的可视化问题。

## 2. 用点图标对二阶张量场进行可视化

对于一个二阶的实对称张量场而言,对于张量场中的每一个点,对应着九个分量。工程中最常见的二阶实对称张量就是用于表示材料在受力作用后物体的应力和应变张量。应力张量的形式为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

应变张量的形式为:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} & (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) & (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

在应力和应变的表示形式中,位于主对角线上的元素为主应力/主应变,其它各项称为剪切应力/剪切应变<sup>[2]</sup>。其中,剪切应力/剪切应变两两相等。

上述  $3 \times 3$  张量矩阵是一个实对称矩阵,由矩阵理论中关于实对称矩阵的定理<sup>[3]</sup>,总可以找到一个正交矩阵  $T$  (一组笛卡尔坐标),使得上述张量化为对角形:

$$T^T \sigma T = T^{-1} \sigma T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

其中,  $T$  的三个列向量为实空间  $R^3$  的一组标准正交基底,对应于一组笛卡尔主坐标,坐标轴底方向称为主轴方向(或主方向)。 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  为张量的主分量,是它们所对应的特征方程式  $|\lambda E - \sigma| = 0$  的根,主方向则是满足该方程的特征矢量方向。

该特征方程的三个特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  就是该张量  $\sigma$  的主分量  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 。它们对应于各自的特征矢量为为主分量相对应的3个主方向,3个主方向是相互正交的。因此,对一个对称张量场的可视化完全等同于同时对三个正交矢量场的可视化。求解对称二阶张量问题可转换为求解二阶张量的特征值与特征向量问题。

根据线性代数二次型<sup>[3]</sup>的理论,对称矩阵与二次型存在一一对应的关系,可知上述的对称二阶张量对应于一个实二次型:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$$

上述二次型对应于一个二次曲面方程,且该二次曲面方

李海生 博士研究生,研究方向为计算机图形学和网格剖分。杨 钦 副教授,主要研究方向为计算机图形学和科学计算可视化。陈其明 教授,主要研究方向为计算机图形学、计算几何和可视化。

程一定可以通过正交满秩线性变换转化为标准型:

$$f(x_1, x_2, x_3) = b_1\sigma_1^2 + b_2\sigma_2^2 + b_3\sigma_3^2$$

该标准型恰恰对应于一个椭球,其中心在坐标原点,3个主轴方向与坐标轴方向相同,为张量  $f(x_1, x_2, x_3)$  的主方向。主分量  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  是  $f(x_1, x_2, x_3)$  所对应方程的特征根,与坐标系无关,是张量场中的不变量,反映了张量  $f(x_1, x_2, x_3)$  的固有性质。如果主分量各不相同,则主方向相互正交。由此可见,弹性应力场所对应的每一个对称二阶张量除可以转化为一个特征值和特征向量问题,还可以用三维空间中的椭球面表示。三个半轴的长度分别为主分量  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ,方向为它们对应向量的方向。这样可以将三维张量场中一点的应力情况形象地用一个椭球表示出来。

### 3. 用超流线对张量场进行可视化

采用椭球等点图标虽然可以反映出应力场中的某点处三个主应力之间的关系,但其离散性的缺点也十分明显——无法表示出应力场的连续变化<sup>[1]</sup>。为此,类似于矢量场中的场线,对于张量场引入超流线反映应力场的连续变化情况。超流线是更一般化的流线,沿着轨迹表示出经过点的张量信息<sup>[4]</sup>。应力场中的超流线比较客观地表示了应力场中力的传播现象。

以张量场中的某点为起始点,构造以该点为起始点的在三个特征矢量场中的某一个特征矢量场中的流线,然后沿着该流线以流线上点处另两个特征矢量所表示的几何元素(如椭圆、十字叉、双曲线等)进行扫描就得到了超流线。最典型的几何元素是椭圆,椭圆的长轴和短轴分别表示了剩余的两个特征矢量的较大特征矢量和较小特征矢量。还可以采用十字叉作为几何元素表示另两个特征矢量,十字叉的两个臂的长度和方向分别刻画了两个特征矢量的大小和方向。采用椭圆作为几何元素生成的超流线被称为管,采用十字叉生成的超流线被称为螺旋线。管适合于表示在断面上的张量变化,螺旋线适合于表示主方向的改变。

在构造超流线时,还可以对超流线的面进行颜色编码,一般是将特征值的大小映射为超流线的面的颜色。超流线的颜色和轨迹表示了某一特征矢量场的分布,而其断面表示了另两个特征矢量场。沿该轨迹线,超流线表示出了应力场的一种连续变化。显然,根据定义超流线的轨迹线的纵向特征矢量的不同,类似于特征矢量,超流线也分为主、次和最小超流线。

### 4. 二阶张量场的插值算法

数据场可视化中采用的插值算法主要有线性基函数插值方法、逆距离加权法和体积加权法。我们采用体积加权法来对二阶对称张量场的9个分量分别进行插值计算得到空间中任一点的属性值大小。由于是二阶实对称张量场,不在主对角线上的元素两两相等,因此在实际插值计算时,对于张量场中的某一点,只需要分别计算其六个分量即可。

体积加权法一般用在四面体中,如图1所示,设四面体内一点P,要求该点对应点物理量值  $E(P)$ ,可将该点与四面体的各顶点相连形成四个小四面体,这个四面体的每个结点的权值可由它对应的小四面体的体积占总体积的比例来决定,即:

$$\omega_0 = \frac{V_{123P}}{V_{0123}} \quad \omega_1 = \frac{V_{023P}}{V_{0123}} \quad \omega_2 = \frac{V_{013P}}{V_{0123}} \quad \omega_3 = \frac{V_{012P}}{V_{0123}}$$

$$E(P) = \omega_0 E_0 + \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3$$

其中,  $E_0, E_1, E_2, E_3$  分别为P点所在四面体的四个顶点的物理量值。

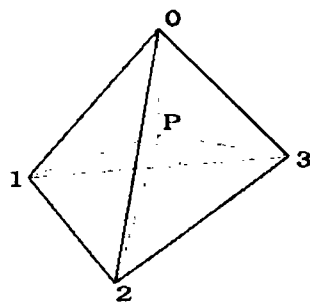


图1

任意一个四面体 ABCD 的体积可以通过计算三个向量的混合积很方便地得到。即

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}$$

### 5. 算法和实例

以半空间无限体上受一点法向力作用的情况(即弹性力学中的 Bousinesq 问题)<sup>[2]</sup>为例,来对该问题中所产生的应力场采用椭球图标和超流线进行可视化。椭球图标可视化应力场所采用的算法如下:

- 1) 对离散点集进行 Delaunay 三角剖分,构造它们之间的拓扑关系;
- 2) 在要显示图标的点处放置一个半径为 R 的圆球;
- 3) 判断对要显示图标的点所在的四面体;
- 4) 插值计算出所要显示图标的点的九个分量值,采用体积加权的方法,对每个分量单独进行插值;
- 5) 将插值得到的九个张量分量写成一个  $3 \times 3$  的矩阵,得到一个实对称矩阵,采用 Jacobi 方法计算该矩阵的三个特征值和特征向量;
- 6) 根据计算出来的三个特征值计算出缩放矩阵
 
$$T_s = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$
- 7) 根据计算出来的三个特征向量计算出旋转矩阵
 
$$T_R = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & 0 \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & 0 \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$
- 8) 根据该点所在的位置计算平移矩阵
 
$$T_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & 1 \end{pmatrix};$$
- 9) 用矩阵  $T = T_T \cdot T_R \cdot T_s$  对位于原点的球进行操作得到椭球。

取边长为20的立方体实体,实体对角线的两个顶点坐标为  $(-10, -10, -10)$  和  $(10, 10, 10)$ ,在实体的顶面的中心即  $(0, 0, 10)$  处加载荷100牛顿的力,在该实体中可以得到一个应力场,图2是采用椭球图标对该应力场进行可视化的结果。图中对实

体沿 X、Y、Z 轴三个方向的边均5等分,从而得到了 $6 \times 6 \times 6 = 216$ 个椭球图标。可以看出,采用的图标离散地表示了实体中的应力分布情况,但图标不能太多,太多的图标造成视觉上的混乱,可视化也就失去了意义。

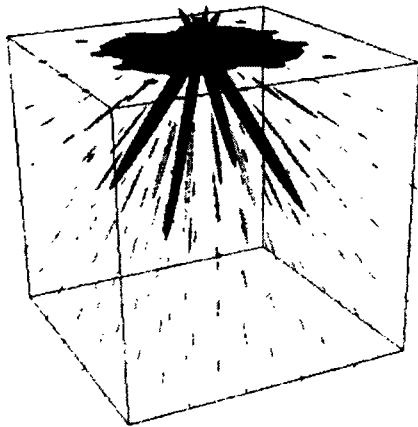


图2 椭圆图标可视化应力场

超流线可视化应力场的算法如下:

- 1) 对离散点集进行 Delaunay 三角剖分,构造它们之间的拓扑关系;
- 2) 指定超流线的起始点;
- 3) 判断点所在的四面体;
- 4) 插值计算出所要显示图标的点的九个分量值,采用体积加权的方法,对每个分量单独进行插值;
- 5) 将插值得到的九个张量分量写成一个 $3 \times 3$ 的矩阵,得到一个实对称矩阵,采用 Jacobi 方法计算该矩阵的三个特征值和特征向量;
- 6) 根据计算出的特征值和特征向量将除纵向特征向量外的另两个特征向量映射为椭圆或十字叉;
- 7) 根据选取的纵向特征向量,采用 Runge-Kutta 方法计算超流线轨迹线上的下一个点;

8) 若该点在实体内或轨迹线的长度小于给定长度,转3); 否则,继续;

9) 根据超流线轨迹线上点处的椭圆或十字叉构造管或螺旋线,即为超流线。

图3是用超流线可视化应力场的效果图。

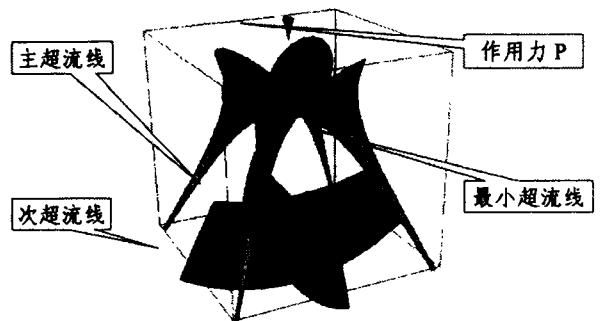


图3 应力场中的超流线

**结论** 我们以弹性力学中的 Boussinesq 问题为例,采用椭球图标和超流线对该问题的结果数据进行了可视化显示。可以看出,可视化结果比较合理地反映了实体中的三个主应力及剪切应力分布的情况。但由于张量的复杂性,对于复杂拓扑结构的实体的非对称张量场以及高阶张量场的可视化研究目前仍然十分有限。随着国内外在这方面研究的不断深入,相信在不久的将来,一定会取得更多的突破性进展。

### 参考文献

(上接第107页)

- 1 石教英,蔡文立. 科学计算可视化算法与系统. 科学出版社,1996
- 2 Sadda A S. Elasticity Theory and Applications. Pergamon Press Inc., New York, NY, 1974
- 3 蒋尔雄,高坤敏,吴景现. 线性代数. 人民教育出版社,1978
- 4 Delmarcells T, Hesselink L. Visualizing Second Order Tensor Fields with Hyperstreamlines. IEEE CG&A, 1993, 13(4)
- 5 M'99, 1999
- 6 Salama H F, Reeves D S, Viniotis Y. A distributed algorithm for delay-constrained unicast routing. In: Proc. of IEEE INFOCOM'97, 1997. 84~91
- 7 Chen S, Nahrstedt K. On finding multi-constrained paths. In: Proc. of IEEE ICC'98, 1998. 874~879
- 8 Guo L, Matta I. Search space reduction in QoS routing. In: Proc. of the 19th IEEE Intl. Conf. on Distributed Computing Systems, 1999. 142~149
- 9 Ma Q, Steenkiste P. Routing traffic with quality-of-service guarantees in integrated services networks. In: Proc. of NOSSD-AV'98, 1998
- 10 Orda A. Routing with end-to-end QoS guarantees in broadband networks. IEEE/ACM Transactions on Networking, 1999, 7(3): 365~374
- 11 Guerin R, Orda A. QoS routing in networks with inaccurate information: theory and algorithms. In: Proc. of IEEE INFOCOM'97, 1997. 75~83
- 12 Korkmaz T, Krunz M, Tragoudas S. An efficient algorithm for finding a path subject to two additive constraints. Computer Communications, 2002, 25(3): 225~238
- 13 Lorenz D H, Orda A. Optimal partition of QoS requirements on unicast paths and multicast trees. In: Proc. of IEEE INFOCOM'97, 1997. 75~83
- 14 Ergun F, Sinha R, Zhang L. QoS routing with performance-dependent costs. In: Proc. of IEEE INFOCOM'2000
- 15 Neve D, Mieghem V. TAMCRA: a tunable accuracy multiple constraints routing algorithm. Computer Communications, 2000, 23(2000): 667~679
- 16 Hassin P. Approximation schemes for the restricted shortest path problem. Mathematics of Operations Research, 1992, 17(1): 36~42
- 17 Jaffe J M. Algorithms for finding paths with multiple constraints. Networks, 1984, 14: 95~116