泛逻辑的基本形式演绎系统UL及其可靠性*)

张小红[1,2] 何华灿[1] 李伟华[1]

(西北工业大学计算机科学与工程系 西安710072)[1] (宁波大学理学院 浙江宁波315211)[2]

The Basic Formal Deductive System UL of Universal Logic and its Reliability

ZHANG Xiao-Hong[1,2] HE Hua-Can[1] LI Wei-Hua[1]

(Department of Computer Science & Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)[1]

(The Faculty of Science, Ningbo University, Zhejiang Ningbo 315211)[2]

Abstract A basic formal deductive system UL of universal logic is introduced for the first time, and quotient algebra is constructed. Then valuation of type H is introduced and reliability theorem is proven. Moreover, the relation between UL and the classical proposition logical system L and fuzzy logical formal deductive system L^* are discussed.

Keywords Universal logic, Formal deductive system UL, Valuation of type H, Reliability, Fuzzy logic

1 引言

自Zadeh[1]于1965年建立模糊集理论以后，一种初始形态的模糊逻辑也被提出[2]。尽管模糊推理在模糊控制中有直接的应用，也受到模糊系统与人工智能学界的广泛关注，但是，由于模糊推理长期以来没有严格的逻辑基础，致使其进一步发展受到限制，且不可避免地受到怀疑与批判[3]。不过，近年来，以王国俊教授为首的一批学者成功地将模糊逻辑和模糊推理结合起来，通过建立模糊逻辑的形式演绎系统、创建模糊推理的三I算法等一系列漂亮的工作[4~6]，极大地推动了这一领域向理论和应用的纵深发展。

另一方面，何华灿教授为了探索逻辑的一般规律，建立了能包容各种逻辑形态和推理模式的泛逻辑学理论[7,8]。由于泛逻辑将模糊逻辑作为其特例，因而借鉴模糊逻辑和模糊推理研究的上述成功经验，建立泛逻辑学形式演绎系统，为不确定推理奠定坚实的逻辑基础，就自然成为一个极有意义的研究方向。

事实上，语义理论和语构理论是逻辑学研究的两个重要方面，它们相互促进、共同发展。对于经典命题逻辑有形式推演系统L，对于多值逻辑有著名的Kleene 3-值逻辑系统K3、Lukasiewicz 3-值逻辑系统L3以及J.B.Rosser与A.R.Turquette的多值逻辑系统R-T等。为了将模糊推理纳入严格的逻辑轨道，王国俊在文[4,9]中提出了模糊逻辑的形式系统L^*，文[10]中证明了该系统的完备性，从而说明了形式系统L^*在语法与语义两个方面是和谐的，这也为模糊推理的研究奠定了逻辑基础。

本文首次提出泛逻辑的基本形式演绎系统UL，讨论其基本性质，建立了商代数结构，引入了H-赋值的概念，证明了可靠性定理。我们还讨论了UL与经典命题逻辑形式系统L、模糊逻辑形式系统L^*的关系。

我们之所以称UL为泛逻辑的基本形式演绎系统，是因为本文只考虑泛逻辑命题联结词的基模型，即广义相关系数h、自相关系数k均为0.5时的情况；同时，对于命题联结词也只涉及"非"、"析取"、"合取"、"蕴含"，对泛逻辑特有的"泛平均"、"泛组合"等命题联结词还未包括在内。不过，对基本形式演绎系统UL进行深入研究，将有助于建立泛逻辑的一般形式演绎系统。更重要的是，研究UL及其在不确定推理中的作用将是极有价值的重要工作，这将对模糊推理的所有应用领域产生积极影响。

需要说明的是，我们已成功地证明了系统UL是弱完备的，即UL在语义和语构两个方面是基本和谐的。关于这方面的结果将在另文中发表。

2 形式系统UL

定义1(UL中的公理) 设S是无穷集，$\neg$是S上的一元运算，$\vee$，$\rightarrow$是S上的二元运算。F(S)是由S生成的($\neg$，$\vee$，$\rightarrow$)型自由代数。称F(S)中具有以下各种形式的公式为公理：

(UL1)$A\rightarrow(B\rightarrow A)$

(UL2)$A\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow B)$

(UL3)$(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$

(UL4)$A\rightarrow\neg\neg A$

(UL5)$A\rightarrow(A\vee B)$

(UL6)$(A\wedge B)\rightarrow A$

(UL7)$(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$

(UL8)$A\vee(B\vee C)\rightarrow(A\vee B)\vee C$

(UL9)$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$

(UL10)$((A\rightarrow B)\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow A)$

(UL11)$(B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow A\vee C)$

其中，$P\wedge Q$是$\neg(\neg P\vee\neg Q)$的简写。

定义2(UL中的推理规则) UL中有下述推理规则：MP规则(分离规则)——由A和$A\rightarrow B$推得B。

定义3(系统UL) 由公式集F(S)、公理(UL1)~(UL11)以及MP规则组成的系统称为系统UL。

定义4(系统UL中的证明) 系统UL中的证明是一个F(S)中公式的有限序列$A_1,A_2,\cdots,A_n$。对每一个$i\leqslant n$，A_i是UL中的公理，或者存在$j<i$和$k<i$，使A_i是通过A_j和A_k

*)国家自然科学基金资助项目(批准号:60273087)。**张小红** 教授，博士生，主要研究方向为代数学、人工智能及应用。**何华灿** 教授，博士生导师，主要研究领域为人工智能及应用、泛逻辑学。**李伟华** 教授，博士生导师，主要研究领域为网络与多媒体通信、人工智能与决策支持。

运用 MP 规则而得的公式。上述证明叫做 A_n 的证明，记作 $\vdash A_n$。A_n 叫做 UL 中的定理。

定义5 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$。从 Γ 到 A 的推演是一个 $F(S)$ 中公式的有限序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_n=A$。对每一个 $i\leqslant n$，A_i 是 UL 中的公理，或者 $A_i\in\Gamma$，或者存在 $j<i$ 和 $k<i$，使 A_i 是通过 A_j 和 A_k 运用 MP 规则而得的公式。这时也说公式 A 可从 Γ 推出，记作 $\Gamma\vdash A$。

显然，A 是定理当且仅当 A 可从空集推出。从以上定义可直接得到：

定理1 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 A_n 的证明，则对每一个 $i\leqslant n$，$A_1,A_2,\cdots,A_i$ 是 A_i 的证明。

定理2(UL 中的三段论规则 HS) 设 $\Gamma=\{A\to B, B\to C\}$，则 $\Gamma\vdash(A\to C)$。

证明：1) $A\to B$　　Γ 中的元

2) $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$　　由(UL3)

3) $(B\to C)\to(A\to C)$　　MP 规则

4) $B\to C$　　Γ 中的元

5) $A\to C$　　由3),4),MP 规则

定理3 以下公式是系统 UL 的定理：

(T1) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$

(T2) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

(T3) $\neg\neg A\to A$　(T4) $A\to A$

证明：(T1)的证明如下

1) $B\to((B\to C)\to C)$　　由(UL2)

2) $(B\to((B\to C)\to C))\to((((B\to C)\to C)\to(A\to C))\to(B\to(A\to C)))$　　由(UL3)

3) $(((B\to C)\to C)\to(A\to C))\to(B\to(A\to C))$　　由1),2),MP 规则

4) $(A\to(B\to C))\to((B\to C)\to C)\to(A\to C))$　　由(UL3)

5) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$　　由4),3),(HS,定理2)

(T2)的证明如下

1) $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$　　由(UL3)

2) $((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))\to((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))$　　由(T1)

3) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$　　由1),2),MP 规则

(T3)的证明如下

1) $\neg A\to\neg\neg\neg A$　　由(UL4)

2) $(\neg A\to\neg\neg\neg A)\to(\neg\neg A\to A)$　　由(UL9)

3) $\neg\neg A\to A$　　由1),2),(HS,定理2)

(T4)的证明如下

1) $A\to\neg\neg A$　　由(UL4)

2) $\neg\neg A\to A$　　由(T3)

3) $A\to A$　　由1),2),(HS,定理2)

定理4 在系统 UL 中成立：(T5)若 $\vdash B\to C$，则 $\vdash(A\to B)\to(A\to C)$。

证明：1) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$　　由(T2)

2) $B\to C$　　已知

3) $(A\to B)\to(A\to C)$　　由1),2),MP 规则

我们称上述(T5)为左保序规则。

定理5 在系统 UL 中成立：(T6)若 $\vdash A\to B$，则 $\vdash(B\to C)\to(A\to C)$

证明：1) $A\to B$　　已知

2) $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$　　由(UL3)

3) $(B\to C)\to(A\to C)$　　由1),2),MP 规则

我们称上述(T6)为右反序规则。

定理6 以下公式是系统 UL 的定理：

(T7) $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$

(T8) $A\wedge B\to B\wedge A$

(T9) $(A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to B\vee C)$

证明：(T7)的证明如下

1) $\neg\neg A\to A$　　由(T3)

2) $(A\to B)\to(\neg\neg A\to B)$　　由1),(T6)

3) $B\to\neg\neg B$　　由(UL4)

4) $(\neg\neg A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$　　由3),(T5)

5) $(A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$　　由2),4),(HS,定理2)

6) $(\neg\neg A\to\neg\neg B)\to(\neg B\to\neg A)$　　由(UL9)

7) $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$　　由5),6),(HS,定理2)

(T8)的证明如下

1) $(\neg B\vee\neg A)\to(\neg A\vee\neg B)$　　由(UL7)

2) $((\neg B\vee\neg A)\to(\neg A\vee\neg B))\to(\neg(\neg A\vee\neg B)\to\neg(\neg B\vee\neg A))$　　由(T7)

3) $\neg(\neg A\vee\neg B)\to\neg(\neg B\vee\neg A)$　　由1),2),MP 规则

4) $A\wedge B\to B\wedge A$　　3)的简写

(T9)的证明如下

1) $(A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to C)$　　由(UL6)

2) $C\to(B\vee C)$　　由(UL5)

3) $(A\to C)\to(A\to B\vee C)$　　由2),(T5)

4) $(A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to B\vee C)$　　由1),3),HS

3 可证等价及商代数

定义6 设 $A,B\in F(S)$，如果 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$，则称 A 与 B 可证等价，记作 $A\approx B$。

定理7 可证等价是 $F(S)$ 上的等价关系。

证明：由定义知 $\approx$ 是对称的，由 HS(见定理2)知 $\approx$ 是传递的，由定理3中的(T4)知 $\approx$ 是自反的，所以可证等价 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的等价关系。

定理8 可证等价关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的 $(\neg,\vee,\to)$ 型同余关系，即：i)若 $A\approx B$，则 $\neg A\approx\neg B$；ii)若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$，则 $A\vee C\approx B\vee D$；iii)若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$，则 $A\to C\approx B\to D$。

证明：i)若 $A\approx B$，则 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$，由(T7)及 MP 规则得 $\neg B\to\neg A$，$\neg A\to\neg B$，于是 $\neg A\approx\neg B$。

ii)若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$，则据 $A\to B$、(UL11)及 MP 规则得 $C\vee A\to C\vee B$，再应用(UL7)及 HS 得 $A\vee C\to B\vee C$；另一方面据 $C\to D$、(UL11)及 MP 规则得 $B\vee C\to B\vee D$。于是由 HS 规则得 $A\vee C\to B\vee D$。同理可证 $B\vee D\to A\vee C$，于是 $A\vee C\approx B\vee D$。

iii)若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$，则据 $C\to D$ 及左保序规则(T5)得 $(A\to C)\to(A\to D)$；据 $B\to A$ 及右反序规则(T6)得 $(A\to D)\to(B\to D)$；从而据 HS 规则得 $(A\to C)\to(B\to D)$。同理可证 $(B\to D)\to(A\to C)$，于是 $A\to C\approx B\to D$。

定理9 $F(S)$ 上的可证等价关系 $\approx$ 具有下述性质：

(T10) $A\vee(B\vee C)\approx(A\vee B)\vee C$

(T11) $A\wedge(B\wedge C)\approx(A\wedge B)\wedge C$

(T12) $\neg(A\vee B)\approx\neg A\wedge\neg B$

(T13) $\neg(A\wedge B)\approx\neg A\vee\neg B$

证明：先证(T10)成立：

由(UL8)可得 $(A\vee B)\vee C\to C\vee(A\vee B)$，再应用(UL7)、(U11)及 MP 规则得 $C\vee(A\vee B)\to C\vee(B\vee A)$，于是据 HS

规则得$(A\vee B)\vee C\to C\vee(B\vee A)$；而据(UL8)有$C\vee(B\vee A)\to(C\vee B)\vee A$，再据(UL7)、(U11)可得$(C\vee B)\vee A\to A\vee(C\vee B)\to A\vee(B\vee C)$，于是得$C\vee(B\vee A)\to A\vee(B\vee C)$，从而$(A\vee B)\vee C\to A\vee(B\vee C)$。结合(UL8)即得$A\vee(B\vee C)\approx(A\vee B)\vee C$。

(T11)可由(T10)及$\approx$为同余关系推出。

下证(T12)成立：

由(UL4)、(T3)得$A\approx\neg\neg A,B\approx\neg\neg B$，据定理14 ii)可得$A\vee B\approx\neg\neg A\vee\neg\neg B$，再据定理14 i)可得$\neg(A\vee B)\approx\neg(\neg\neg A\vee\neg\neg B)$，即$\neg(A\vee B)\approx\neg A\wedge\neg B$。

同理可证(T13)成立。

定理10 设$F(S)$是UL系统中的$(\neg,\vee,\to)$型自由代数，$\approx$是$F(S)$上的可证等价关系，则可在$(\neg,\vee,\to)$型商代数$[F]=F(S)/\approx$中引入序关系$\leqslant$使得：

i)$([F],\leqslant)$构成偏序集，对$[F]$中任二元$a=[A]$与$b=[B]$，$a\vee b=[A\vee B]$恰为a与b在这个偏序集中的上界，且$\vee$满足交换律和结合律；

ii)偏序集$([F],\leqslant)$有界，其最大元、最小元分别用1、0表示。如果A是UL中的定理，则$[A]=1$、$[\neg A]=0=\neg 1$；

iii)对$[F]$中任二元$a=[A]$与$b=[B]$，$a\leqslant b$当且仅当$a\to b=1$；

iv)$\neg$是关于序$\leqslant$而言的$[F]$上的逆序对合对应，即$a\leqslant b\Rightarrow b\leqslant\neg a$且对任意的$a=[A]\in[F]$有$\neg\neg a=a$；

v)以$f(a,b)$记$[F]$上的蕴含运算$a\to b$，则：

① $f(1,a)=a$ ② $f(a,a)=1$

③ $f(\neg a,\neg b)=f(b,a)$ ④ $f(a,0)=\neg a$

⑤ $f(a,b)\leqslant f(f(b,c),f(a,c))$

⑥ $f(a,f(b,c))=f(b,f(a,c))$

⑦ $f(f(a,b),b)=f(f(b,a),a)$

⑧ $f(f(b,c),f(a\vee b,a\vee c))=1$

证明：i)由定理8知可证等价关系$\approx$是$F(S)$上的同余关系，从而保证了等价类之间的$(\neg,\vee,\to)$型运算与各类中代表元的选取无关。对$F(S)$中的每个公式A，以$[A]$表示A所在的等价类，则：

$\neg[A]=[\neg A],[A]\vee[B]=[A\vee B]$,

$[A]\to[B]=[A\to B]$。

现定义$\leqslant$如下：

$[A]\leqslant[B]$当且仅当$\vdash A\to B$。

容易证明，上述定义与$[A],[B]$中的代表元选取无关，且$\leqslant$是$[F]$上的偏序。

设$A、B\in F(S)$，则$\vdash A\to A\vee B,\vdash B\to A\vee B$，由此可知$[A\vee B]$是$[A]$与$[B]$在$[F]$中的上界。由(UL7)、(T10)可知$\vee$满足交换律和结合律。

ii)设A是UL中的定理，则(UL1)及MP规则得$\vdash B\to A$，其中$B\in F(S)$，这说明此时A所在的等价类$[A]$是$[F]$中的最大元，记为1。又，由(UL9)知，此时对任意$B\in F(S)$有$(\neg B\to A)\to(\neg A\to B)$，而由$\vdash\neg B\to A$及MP规则得$\vdash\neg A\to B$，这说明此时$\neg A$所在的等价类$[\neg A]$是$[F]$中的最小元，记为0，显然$0=[\neg A]=[A]=\neg 1$。

iii)设$a=[A],b=[B]$。如果$a\leqslant b$，则$A\to B$，应用(UL1)及MP规则可推出：对$F(S)$中的任何定理C均有$A\to B\approx C$，于是$a\to b=[A]\to[B]=[A\to B]=[C]=1$。另一方面，如果$a\to b=1$，则$[A\to B]=[A]\to[B]=a\to b=1$，这说明$A\to B$与$F(S)$中的定理同在一个类，从而$A\to B$为定理，即$a\leqslant b$。

iv)由(UL4)、(T3)立即可得$[\neg\neg A]=[A]$，即对$[F]$中任一元$a=[A]$有，$\neg\neg a=a$。

如果对[F]中任二元$a=[A]、b=[B]$有$a\leqslant b$，则$A\to B$，从而由(T7)及MP规则得$\neg B\to\neg A$，即$\neg b\leqslant\neg a$。

v)设$a=[A],b=[B],c=[C]$。

① 任取UL中的定理B，则由(UL2)得$B\to((B\to A)\to A)$，再据MP规则得$(B\to A)\to A$。又由(UL1)知$A\to(B\to A)$，于是$B\to A\approx A$。所以$f(1,a)=1\to a=[B]\to[A]=[B\to A]=[A]=a$。

② 任取UL中的定理B，则由(UL1)知$B\to((A\to A)\to B)$，应用MP规则得$(A\to A)\to B$。又由(UL1)知$(A\to A)\to(B\to(A\to A))$，再据(T4)及MP规则得$B\to(A\to A)$，于是$A\to A\approx B$。所以$f(a,a)=[A]\to[A]=[A\to A]=[B]=1$。

③ 由(UL9)及(T7)得$(\neg A\to\neg B)\approx(B\to A)$，于是$[\neg A\to\neg B]=[B\to A]$，从而$\neg[A]\to[B]=[B]\to[A]$，即$f(\neg a,\neg b)=f(b,a)$。

④ 由③、ii)、①得$f(a,0)=f(\neg 0,\neg a)=f(1,a)=\neg a$。

⑤ 由(UL3)可推出$f(b,c)\leqslant f(f(a,b),f(a,c))$。

⑥ 由(T1)可推出$f(a,f(b,c))=f(b,f(a,c))$。

⑦ 由(UL10)可推出$f(f(a,b),b)=f(f(b,a),a)$。

⑧ 由(UL11)、(UL1)及MP规则可推出$f(f(b,c),f(a\vee b,a\vee c))=1$。

4 H-赋值及可靠性定理

依据文[8]中泛逻辑命题连结词基模型的定义，我们引入

定义7 函数$v:F(S)\to[0,1]$叫做$F(S)$的H-赋值，如果v满足：(i)$v(\neg A)=1-v(A)$；(ii)$v(A\to B)=\min(1,1-v(A)+v(B))$；iii)$v(A\vee B)=\min(1,v(A)+v(B))$。

可以在集合$[0,1]$上引入运算$\neg,\to,\vee$，对任意$x,y\in[0,1]$规定：

(i)$\neg x=1-x$；(ii)$x\to y=\min(1,1-x+y)$；iii)$x\vee y=\min(1,x+y)$。

于是定义7中的条件可表述为：

$v(\neg A)=\neg v(A)\quad v(A\to B)=v(A)\to v(B)$

$v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)$

这就是说$F(S)$的H-赋值是从$F(S)$到$[0,1]$的$(\neg,\to,\vee)$型同态。

用Ω表示$F(S)$的全体H-赋值之集。

定义8 设A是$F(S)$中的公式，如果对任意的$v\in\Omega$均有$v(A)=1$，则称A为重言式(永真式)，记为$\models A$。如果$A\to B$与$B\to A$都是重言式，则称A与B逻辑等价。

容易验证A与B逻辑等价当且仅当对任意的$v\in\Omega$均有$v(A)=v(B)$。

以下定理表明：UL中的语构关于语义Ω是可靠的。

定理11(可靠性定理) UL中的定理一定是重言式，即若$A\in F(S)$且$\vdash A$，则$\models A$。

证明：为证明本定理，只需证明UL中的公理(UL1)～(UL11)都是重言式，并且UL中的MP推理规则保持重言式。

设$A_1,A_2,\cdots,A_t$是$F(S)$中的公式，$E=g(A_1,A_2,\cdots,A_t)$是用$\neg,\to,\vee$把以上公式联结而得的公式，$v\in\Omega$，则由v为同态知

$v(E)=g'(v(A_1),v(A_2),\cdots,v(A_t))$

这里$v(A_1),v(A_2),\cdots,v(A_t)$为$[0,1]$上的实数，$g'$作用于这

些实数的方式恰如 g 作用于公式 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 的方式。对公式 A,B,C,分别以 p,q,r 记 $v(A),v(B),v(C)$,则易见 UL 中的各公理的赋值分别为

(1)$p\to(q\to p)$ (2)$p\to((p\to q)\to q)$

(3)$(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$ (4)$p\to\neg\neg p$

(5)$p\to(p\vee q)$ (6)$(p\wedge q)\to p$ (7)$(p\vee q)\to(q\vee p)$

(8)$p\vee(q\vee r)\to(p\vee q)\vee r$ (9)$(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$

(10)$((p\to q)\to q)\to((q\to p)\to p)$

(11)$(q\to r)\to(p\vee q\to p\vee r)$。

可以直接验证以上各式的值均为1。

以上证明了 UL 的11条公理都是重言式。以下证明 MP 推理规则保持重言式。事实上,设 A 和 $A\to B$ 都是重言式,则对任意赋值 v 均有 $v(A)=v(A\to B)=1$,从而

$$v(B)=1\to v(B)=v(A)\to v(B)=v(A\to B)=1$$

所以 B 为重言式,这说明 MP 规则保持重言式。

5 UL 与形式系统 L、形式系统 L* 的关系

定义9[4,9](经典逻辑的形式系统 L) 设 S 是无穷集,$F(S)$是由 S 生成的 $(\neg,\to)$型自由代数。称 $F(S)$中具有以下各种形式的公式为公理:

(L1) $A\to(B\to A)$

(L2)$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

(L3)$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$

称下述规则为 MP 规则(分离规则):由 A 和 $A\to B$ 推得 B。由公式集 $F(S)$、公理(L1)~(L3)以及 MP 规则组成的系统称为系统 L。

形式系统 L 能完满地刻画经典命题逻辑,在通常的语义(赋值)下,系统 L 是完备的。容易证明,形式系统 UL 中的所有公理、定理都是系统 L 中的定理,但系统 L 中的公理(L2)在系统 UL 中不必是重言式。比如:取 $v(A)=0.6,v(B)=0.5,v(C)=0.4$,则 $v((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))=0.9\neq1$。因此,形式系统 UL 包含 L 为其特例。

定义10[4,9](L^* 中的公理) 设 S 是无穷集,$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\vee,\to)$型自由代数。称 $F(S)$中具有以下各种形式的公式为公理:

(L^*1) $A\to(B\to A)$ (L^*2)$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$

(L^*3)$(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$

(L^*4)$(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

(L^*5) $A\to\neg\neg A$ (L^*6) $A\to(A\vee B)$

(L^*7)$(A\vee B)\to(B\vee A)$

(L^*8)$(A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C)$

(L^*9)$(A\wedge B\to C)\to(A\to C)\vee(B\to C)$

(L^*10)$(A\to B)\vee((A\to B)\to\neg A\vee B)$

其中,$P\wedge Q$ 是$\neg(\neg P\vee\neg Q)$的简写。

定义11[4,9](L^* 中的推理规则) L* 中有:

(I1) MP 规则(分离规则)——由 A 和 $A\to B$ 推得 B;

(I2) 交推理规则——由 $A\to B$ 和 $A\to C$ 推得 $A\to B\wedge C$。

定义12[4,9](系统 L^*) 由公式集 $F(S)$、公理(L^*1)~(L^*10)以及推理规则(I1)与(I2)组成的系统称为系统 L^*。

下面我们分析泛逻辑的基本形式系统 UL 与 L^* 的关系。

(1)从语义角度看,UL 彻底摒弃了自 Zadeh 算子开始一直沿用的"最大、最小"方案(关于其缺陷可参见文[8]及文[11]),∨、∧已不再对应最大值和最小值,且∨、∧已不再满足分配律。比如:在 H-赋值 v 的语义下,若分别取 $v(A)=0.6,v(B)=0.4,v(C)=0.5$,则 $v(A\wedge(B\vee C)\to(A\wedge B)\vee(A\wedge C))=0.6\neq1$。

同时,系统 UL 中的公理

(UL10)$((A\to B)\to B)\to((B\to A)\to A)$

在 L* 中也不是重言式,比如:若对赋值 v 取 $v(A)=0.6,v(B)=0.4$,蕴含选用 R_0算子,则 $v(((A\to B)\to B)\to((B\to A)\to A))=0.6$。

(2)从语构角度看,在系统 UL 中,公式集 $F(S)$关于可证等价关系≈作成的商代数[F],关于如下定义的序不再构成分配格(只是有界偏序集)

$[A]\leqslant[B]$当且仅当$\vdash A\to B$

且$[A]\vee[B]$、$[A]\wedge[B]$不再是上、下确界(只是上、下界)。同时 L^* 的以下结论在 UL 中不再成立:

如果$\vdash A\to B$且$\vdash A\to C$,则$\vdash A\to B\wedge C$

如果$\vdash A\to C$且$\vdash B\to C$,则$\vdash A\vee B\to C$

$A\vee A\approx A$ $A\wedge A\approx A$

前两个结论不成立说明:在 UL 中没有交推理规则和并推理规则。

综上所述,形式系统 UL 与 L^* 是两个互不包含的独立系统。L^* 可看成 Zadeh 以"取大取小"为特征的模糊推理的理论抽象,而 UL 则是体现柔性推理思想的泛逻辑的理论概括。作者认为,研究泛逻辑的基本形式系统 UL 及其在不确定推理中的应用具有重要的现实意义。

参考文献

1 Zadeh L A. Fuzzy Sets. Inform Contr,1965,8:338~353

2 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans SMC,1973,1:28~44

3 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功. 模糊系统与数学,1995,9(4):1~14

4 王国俊. Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统. 科学通报,1997,42(10):1041~1045

5 王国俊. 模糊推理的全蕴含三 I 算法. 中国科学,E 辑,1999,29(1):43~53

6 Wang Guojun. On the logic foundation of fuzzy reasoning. Information Science,1999,177: 47~88

7 何华灿,刘永怀,何大庆. 经验性思维中的泛逻辑. 中国科学,E 辑,1996,26:72~78

8 何华灿.泛逻辑学原理. 北京:科学出版社,2001

9 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理. 北京:科学出版社,2000

10 裴道武,王国俊.形式系统 L* 的完备性及其应用,中国科学(E 辑),2002,32(1):56~64

11 庞彦军,刘开弟,刘军. 模糊数学中"取大取小"运算引发的问题. 系统工程理论与实践,2001,9:98~100