

多 Agent 系统的排队模型研究(1)*)

——基本概念

李凡长¹ 余玉梅²(苏州大学计算机科学与技术学院 苏州215006)¹ (云南民族大学数学与计算机科学学院 昆明650031)²

摘要 多 Agent 系统是人工智能、软件领域等研究的热点问题,在这个问题的研究中,人们普遍关注的问题是如何组织协调 Agent 之间的关系,让各个 Agent 充分发挥作用,使系统处于最佳状态。本文抓住多 Agent 之间的这个关键问题,给出了多 Agent 系统的排队模型的基本概念,为进一步研究多 Agent 系统奠定了理论基础。

关键词 生灭过程,排队模型,多 Agent 系统

Research on A Queuing Model of Multi-Agent(1)

——Fundamental concept

LI Fan-Zhang¹ SHE Yu-Mei²(College of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006)¹(College of mathematics and computer, Yunnan Institute of the Nationalities, Kunming 650031)²

Abstract Multi-agent system research has attracted increasing attention, is artificial intelligence, software, etc. Research on the problem, the people universal follow with interest question is how organize and coordinate relation of between agent, which is let agent bring into full play and seed system to make the best state. In this paper, the concept of queuing model of multi-agent is proposed. By the research of this model theory, this paper has abundantated the content of multi-agent.

Keywords Birth and death processes, Queuing model, Multi-agent system

在人工智能、软件工程等领域,最具有挑战性的目标之一就是如何建立能够在一起很好地协调工作的计算机系统。Agent 是被认为解决这些问题的最有效的方法。目前对 Agent 虽然没有统一的严格定义,但人们比较公认的观点是: Agent 是指具有智能的人或其它智能物或相当于智能物的实体,以及能进行独立工作的软件系统,这种 Agent 对给定介质环境中的事物变化能迅速做出反应,它具有自治、推理、响应、协作、自学习和相互学习以及产生自身行为能力等特性,根据 Agent 的这些性质及功能,目前在众多领域中得到了广泛应用,如电子商务、软件系统等^[1~5]。从目前的研究及应用情况来看,专家们一致认为: Agent 系统之所以没有取得重大突破,其关键的问题是 Agent 系统中还缺乏坚实的理论基础,有许多本质问题还得不到满意的结果。如在多 Agent 系统中的协调机制等问题。基于这些客观事实,本文建立多 Agent 系统的排队理论来帮助解决多 Agent 系统中的协调问题。

1. 基本概念

为了研究多 Agent 的排队论问题我们先给出一些基本概念。

1.1 Agent 状态的生灭概念

关于 Agent 状态的生灭概念借用以下公约来说明。

公约1 假定 Agent 状态元素对应一个非负整数集 $\{0, 1, \dots\}$ 上的 Markov 过程 $\{X(t), t \geq 0\}$,如果其中有下列三对角形式:

 $\bar{Q} =$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu_n & -(\lambda_n + \mu_n) & \lambda_n \\ & & & & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (1.1.1)$$

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个 Agent 状态的生灭过程。 $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ 称为 Agent 状态的生率, $\{\mu_n, n \geq 1\}$ 称为 Agent 状态的灭率。

引入瞬时状态概率

$$p_j(t) = P\{X(t) = j\}, j = 0, 1, \dots$$

Agent 状态的生灭过程的最基本特征是:在充分短的时间内,过程几乎只能转移到相邻的状态上,即当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,有

$$P\{X(t + \Delta t) = k | X(t) = j\} = \begin{cases} \lambda_j \Delta t + o(\Delta t), k = j + 1 \\ \mu_j \Delta t + o(\Delta t), k = j - 1, j \geq 1 \\ 1 - (\lambda_j + \mu_j) \Delta t + o(\Delta t), k = j \\ o(\Delta t), |k - j| \geq 2 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

公约2 由式(1.1.2)出发,建立 Agent 状态的瞬态概率 $p_j(t)$ 的微分方程如下:

$$\begin{cases} \dot{p}_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ \dot{p}_j(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), j \geq 1 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

式(1.1.3)称为 Agent 状态的生灭过程的 Kolmogorov 方程。如果极限

*) 本文的研究得到江苏省自然科学基金(BK2002040)和江苏省教育厅自然科学基金(02KJB520001)资助,李凡长 教授,主要研究方向是人工智能,动态模糊智能理论,智能软件等。余玉梅 副教授,主要研究方向:人工智能、动态模糊逻辑等。

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t), j=0,1,\dots \quad (1.1.4)$$

存在,并且 $p_0 + p_1 + \dots = 1$, 则称过程是正常返的 Agent 状态, 并称 $\{p_j, j \geq 0\}$ 为 Agent 状态过程平稳概率分布或稳态分布。Agent 生灭过程的重要问题之一是如何从生成元式 (1.1.1) 出发, 判断 Agent 状态过程的正常返状态特征性并给出它的稳态分布。如果稳态分布存在, 由式 (1.1.4) 必有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p'_j = 0, j=0,1,\dots$$

在式 (1.1.3) 的两端取极限, 给出

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 - \mu_1 p_1 = 0 \\ \lambda_{j-1} p_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) p_j + \mu_{j+1} p_{j+1} = 0, j \geq 1 \end{cases} \quad (1.1.5)$$

如果把稳态分布写成无穷维向量 $\pi = (p_0, p_1, \dots)$, 式 (1.1.5) 可改写成更紧凑的矩阵形式

$$\pi \tilde{Q} = 0, \pi e = 1 \quad (1.1.6)$$

式 (1.1.5) 和 (1.1.6) 统称为 Agent 状态过程的平衡方程 (及正规化条件)。求解差分方程 (1.1.5) 可给出 Agent 状态过程的平稳概率分布。另一个更直接的方法由 Karlin 与 McGregor 给出:

定理 1.1.1 (Karlin-McGregor) Agent 状态的生灭过程式 (1.1.1) 正常返当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} < \infty$$

Agent 状态过程的稳态分布可表为

$$p_0 = K, p_j = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_j} K, j \geq 1$$

其中 $K = [1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}]^{-1}$

1.2 矩阵几何解

假定 Agent 状态对应一个二维 Markov 过程 $\{X(t), J(t)\}$, 其状态空间为:

$$\Omega = \{(k, j) : k \geq 0, j = 1, 2, \dots, m\}$$

则状态集 $\{(k, 1), \dots, (k, m)\}$ 称为水平 $k, k \geq 0$, 如果将状态按字典序排列后, 其生成元可写成下列分块三对角形式:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ B_1 & A_1 & C_1 & & \\ & B_2 & A_2 & C_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & B_n & A_n & C_n \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

$$\tilde{Q} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} -\lambda & \lambda & & & & & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & & & & \\ & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (c-1)\mu & -[\lambda + (c-1)\mu] & \lambda & & \\ & & & c\mu & -(\lambda + c\mu) & \lambda & \\ & & & & c\mu & -(\lambda + c\mu) & \lambda \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right\} \quad (1.2.3)$$

程是正常返的。记

$$\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t) = k\}, k \geq 0,$$

当 $k > c$ 时, 平衡方程 (1.1.6) 和生成元 (1.2.3) 给出。

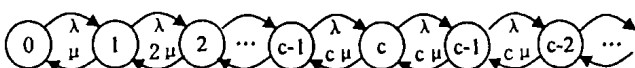


图1 M/M/c 多 Agent 排队状态转移

$$\lambda \pi_{k-1} - (\lambda + c\mu) \pi_k + c\mu \pi_{k+1} = 0, k > 0 \quad (1.2.4)$$

现在考虑二次方程

$$c\mu z^2 - (\lambda + c\mu)z + \lambda = 0 \quad (1.2.5)$$

它的两个根是 $z = \rho = \lambda/(c\mu)^{-1} < 1$ 和 $z = 1$, $z = \rho$ 是方程

则称 $\{X(t), J(t)\}$ 是一个 Agent 状态拟生灭过程 (quasi birth and death process, 简记 QBD), 其中所有子块是 m 阶方阵, $A_k, k \geq 0$, 有负的对角线元素和非负的非对角线元素, 并且行和非正。 B_k 和 C_k 都是非负阵, 满足

$$(A_0 + C_0)e = (A_k + B_k + C_k)e = 0, k \geq 1$$

由式 (1.2.1) 与 (1.1.1) 的比较可知, QBD 是经典生灭过程到一维状态空间到二维状态空间的推广。Agent 生灭过程的状态 $X(t) = k$, 现在被分解成 m 个子状态 $\{(k, 1), \dots, (k, m)\}$ 。这一结构顺应了刻画 Agent 状态过程在多层次、多位相及变动参数情况下演化的要求。

对于形如式 (1.2.1) 使用的只是一类特殊的 QBD, 即生元 $\tilde{Q}$ 中的子块从某一个水平开始不再发生变化的情形。这时, 过程生成元形如:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ B_1 & A_1 & C_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_{c-1} & A_{c-1} & C_{c-1} \\ & & & B & A & C \\ & & & & B & A & C \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

处理 QBD 的方法, 完全依赖于生成元 $\tilde{Q}$ 的特殊结构。为了更自然地引入这种方法, 我们注意到在 Agent 状态生灭过程模型中与式 (1.2.2) 对应的典型例子是 M/M/c 多 Agent 排队系统。下面使用一种特殊的技巧处理 M/M/c 多 Agent 排队系统, 这种处理自然地导致了对 (1.2.2) 型 QBD 解析分析的矩阵几何解方法。

在到达率 λ 和服务率 μ 的 M/M/c 多 Agent 排队系统中, $L(t)$ 表示时刻 t 系统内 Agent 顾客数, 也称为多 Agent 系统的队长。 $\{L(t), t \geq 0\}$ 是一个 Agent 状态生灭过程, 其无穷小生成元是 (1.2.3) 式。

在式 (1.2.3) 中, 自状态 $k = c$ 以后生率和灭率都不再随状态变化。过程的状态转移如图 1 所示。设 $\rho = \lambda/(c\mu)^{-1} < 1$, 过

(1.2.5) 的最小非负解。代入 (1.2.4) 验证, 可知 $\pi_k = K\rho^{k-c}, k > c$, 满足 (1.2.4), 其中 K 是待定常数。在式 (1.2.4) 中, 取 $k = c+1$, 给出

$$\lambda \pi_c - \lambda K + (\lambda K - (\lambda + c\mu)K\rho + c\mu K\rho^2) = \lambda(\pi_c - K) = 0$$

于是 $K = \pi_c$ 。对 $k \geq c$ 时, 我们有

$$\pi_k = \pi_c \rho^{k-c}, k \geq c \quad (1.2.6)$$

现在, 只要再确定 $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_c$ 。由平衡方程 (1.1.6) 及 (1.2.3), 并注意到 $\pi_{c+1} = \pi_c \rho$, 得到

$$\begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 = 0 \\ \lambda \pi_{k-1} - (\lambda + k\mu) \pi_k + (k+1)\mu \pi_{k+1} = 0, 1 \leq k \leq c-1 \\ \lambda \pi_{c-1} + [-(\lambda + c\mu) + c\mu \rho] \pi_c = 0 \end{cases}$$

如果引入 $c+1$ 阶方阵

$$B[\rho] = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (c-1)\mu & -[\lambda+(c-1)\mu] & \lambda \\ & & & c\mu & -(\lambda+c\mu)+c\mu\rho \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

我们并不算出 $c\mu\rho=\lambda$, 是为了在后面的讨论中加以比较。 $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_c$ 满足

$$(\pi_0, \dots, \pi_c)B[\rho] = 0 \quad (1.2.8)$$

求解方程组(1.2.8)并应用表达式(1.2.6), 给出多 Agent 系统的 M/M/c 排队的稳态分布

$$\pi_k = \begin{cases} K \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, 0 \leq k \leq c \\ K \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \rho^{k-c}, k > c \end{cases} \quad (1.2.9)$$

其中常数因子 K 可由正规化条件确定

$$K = \left\{ \sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1-\rho)^{-1} \right\}^{-1}$$

上述结果可总结为下列定理:

定理 1.2.1 多 Agent 系统中的 Agent 状态生灭过程式(1.2.3)正常返, 当且仅当方程(1.2.5)的最小非负解 ρ 落入 $(0, 1)$ 区间内, 并且线性方程组

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_c)B[\rho] = 0$$

有正解。当过程正常返时, 稳态分布可表为

$$\pi_k = \pi_c \rho^{k-c}, k \geq c$$

而 $\pi_0, \dots, \pi_c$ 由方程组

$$(\pi_0, \dots, \pi_c)B[\rho] = 0, \sum_{k=1}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \pi_c (1-\rho)^{-1} = 1$$

唯一确定。

式(1.2.9)中后式 $\pi_k = \pi_c \rho^{k-c}, k \geq c$, 具有几何分布的特征, 因此称多 Agent 系统中 M/M/c 排队的稳态分布是“具有修正边界状态的几何分布”。这一结构推广到矩阵形式, 就导致了处理式(1.2.2)型 QBD 的矩阵几何解方法^[6~8]。

1.3 Agent 状态的拟生灭过程

本节讨论形如式(1.2.2)的 QBD 正常返的条件及求出稳态分布的方法。首先考虑最简单的情况, 设 $\{X(t), J(t)\}$ 的状态空间是

$$\Omega = \{(k, j) : k \geq 0, 1 \leq j \leq m\}$$

并且生成元可表为

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & \\ B_1 & A & C & \\ & B & A & C \\ & & B & A & C \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.3.1)$$

式(1.3.1)中所有的子块是 m 阶方阵。为适应生成元的分块结构, 将稳态分布写成分段向量。记

$$\pi_{kj} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t)=k, J(t)=j\}, (k, j) \in \Omega,$$

$$\pi_k = (\pi_{k1}, \dots, \pi_{km}), k \geq 0,$$

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots).$$

假定 QBD 式(1.3.1)正常返, 平衡方程 $\pi\tilde{Q} = 0$ 及式(1.3.1)的特殊结构给出

$$\pi_{k-1}C + \pi_k A + \pi_{k+1}B = 0, k \geq 1 \quad (1.3.2)$$

这一表达式是前节(1.2.4)式从纯量到矩阵的推广。仿照前节(1.2.5)式引入矩阵方程

$$R^2B + RA + C = 0 \quad (1.3.3)$$

如果式(1.3.3)有最小非负解 R , 我们考虑行向量 $\pi_k = \pi^* R^k, k \geq 1$, 这里 π^* 是待定的 m 维行向量。将该行向量代入(1.3.2),

可知

$$\pi^* R^{k-1}(C + RA + R^2B) = 0, k \geq 1$$

从而 $\pi_k = \pi^* R^k, k \geq 1$, 是(1.3.2)的解。为确定 π^* , 在(1.3.2)中取 $k=1$, 通过填加 π^*C 一项, 给出

$$\pi_0 C - \pi^* C + \pi^* [C + RA + R^2B] = (\pi_0 - \pi^*)C = 0$$

在一般情况下 C 总是可逆的, 因此 $\pi^* = \pi_0$, (1.3.2)的解可写成

$$\pi_k = \pi_0 R^k, k \geq 0 \quad (1.3.4)$$

另一方面, $\{\pi_k, k \geq 0\}$ 必满足正规化条件, 因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k e = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} R^k e = 1$$

这就要求矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} R^k$ 是收敛的。 R 是非负阵, 级数收敛当且仅当其谱半径 $\text{sp}(R) < 1$ 。最后确定 π_0 , 注意到 $\pi_1 = \pi_0 R$, 于是有

$$\pi_0(A_0 + RB_1) = 0 \quad (1.3.5)$$

式(1.3.5)是线性齐次方程组, 只将能 π_0 确定到相差一个常数因子, 再使用正规化条件

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k e = \pi_0 (I - R)^{-1} e = 1$$

确定其中常数, 从而得到式(1.3.1)的稳态概率。基于上述思想, 可以证明:

定理 1.3.1 QBD(1.3.1)正常返当且仅当矩阵方程

$$R^2B + RA + C = 0$$

的最小非负解 R 满足 $\text{sp}(R) < 1$, 并且线性方程组

$$\pi_0(A_0 + RB_1) = 0, \pi_0(I - R)^{-1}e = 1$$

有唯一正解。过程的稳态分布可表为

$$\pi_k = \pi_0 R^k, k \geq 0 \quad (1.3.6)$$

在大量实际应用中, QBD 的生成元并非所有的子块都是 m 阶方阵。设自然数 $c \geq 1$, 当 $0 \leq k \leq c-1$ 时, 水平 k 包含着 m_k 个状态; 当 $k \geq c$ 时, 所有水平 k 都含有 $m_c = m$ 个状态。这时, $\{X(t), J(t)\}$ 的状态空间是

$$\Omega = \{(k, j) : 0 \leq k \leq c-1, 1 \leq j \leq m_k\} \cup \{(k, j) : k \geq c, 1 \leq j \leq m\}.$$

过程的生成元仍如式(1.2.2), 但其中 A_k 是 m_k 阶方阵, $0 \leq k \leq c-1$; B_k 是 $m_k \times m_{k-1}$ 矩阵, $1 \leq k \leq c$; C_k 是 $m_k \times m_{k-1}$ 矩阵, $0 \leq k \leq c-1$ 。 A_k 有负的对角线元素和非负的非对角线元素, 行和为负数。 B_k 和 C_k 都是非负矩阵, 满足

$$A_0 e + C_0 e = B_1 e + A_1 e + C_1 e = 0$$

生成元 $\tilde{Q}$ 中子块 A, B 和 C 都是 m 阶方程, 满足 $(A+B+C)e = 0$

当 $0 \leq k \leq c-1$ 时, 称水平 k 是边界水平。边界水平所含的状态称为边界状态。现在, 我们允许边界水平上含有不同的状态数, 称这个更一般的 QBD 是(1.3.1)的复杂边界变体。现在, 平稳分布的分段形式是:

$$\pi_k = (\pi_{k1}, \dots, \pi_{km_k}), 0 \leq k \leq c-1$$

$$\pi_k = (\pi_{k1}, \dots, \pi_{km}), k \geq c$$

这个一般 QBD 的分析与标准情况(1.3.1)基本上相同。设 R 是矩阵方程(1.3.3)的最小非负解, 满足 $\text{sp}(R) < 1$, 则有

$$\pi_k = \pi_c R^{k-c}, k \geq c$$

而 $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_c$ 是方程组

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_c)B[R] = 0$$

的正解, 现在 $B[R]$ 是 $m_0 + m_1 + \dots + m_{c-1} + m$ 阶方程, 是一个生成元, 可表为

$$B[R] = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ B_1 & A_1 & C_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_{c-1} & A_{c-1} & C_{c-1} \\ & & & B_c & RB+A \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

这些分析可归结为下列定理:

定理1.3.2 形如(1.2.2)的复杂边界 QBD 过程正常返当且仅当矩阵方程

$$R^2B + RA + C = 0$$

的最小非负解 R 的谱半径 $\text{sp}(R) < 1$, 并且线性齐次方程组

$$(\pi_0, \dots, \pi_c)B[R] = 0 \quad (1.3.8)$$

有正解。当过程正常返时, 稳态分布可表为

$$\pi_k = \pi_c R^{k-c}, k \geq c \quad (1.3.9)$$

并且 $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_c$ 由方程组

$$(\pi_0, \dots, \pi_c)B[R] = 0, \sum_{k=0}^{c-1} \pi_k e + \pi_c (I-R)^{-1} e = 1$$

唯一决定。

比较定理1.2.1与1.3.2, 我们看到式(1.2.2)型 QBD 的分析方法完全平行于 M/M/c 排队系统。式(1.3.9)表明, 对复杂边界的 QBD, 当 $k \geq c$ 时, 稳态概率向量显示出矩阵几何分布的特征, 称这类分布是具有修正边界的矩阵几何解。

应用定理1.3.1和1.3.2, 还需给出判断 $\text{sp}(R) < 1$ 的方法。我们指出, 率阵 R 在 QBD 过程的分析起重要作用, 然而大多数实际场合却无法解析地表示 R 。一个方便的解决方法是:

定理1.3.3 若 $H = A + B + C$ 是有限的不可约生成元, π 是 H 的平稳概率向量, 即 $\pi H = 0, \pi e = 1$, 则 $\text{sp}(R) < 1$ 当且仅当 $\pi B e > \pi C e$ 。

1.4 Agent 状态矩阵几何解的性质

考虑矩阵几何解式(1.3.6)的边缘分布:

$$P\{X=k\} = \pi_k e = \pi_0 R^k e, k \geq 0 \quad (1.4.1)$$

取 PGF, 我们有

$$X(z) = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} z^k R^k e = \pi_0 e + z \pi_0 R (I - zR)^{-1} e = \pi_0 e + z \pi_0 (I - R)^{-1} R (I - zR)^{-1} (I - R) e$$

与离散 PH 分布的 PGF 比较, 似乎 X 有 m 阶离散 PH 表示 $(\pi_0 (I - R)^{-1} R, R)$, 这一结果揭示了矩阵几何解与离散 PH 分布的内在联系。引入行向量

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) = \pi_0 (I - R)^{-1}$$

和对角矩阵

$$\Delta = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \begin{bmatrix} \xi_1 & & & \\ & \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_m \end{bmatrix}$$

则 $\Delta e = \xi^T$, “ T ”表示矩阵转置。因 $(I - R)^{-1}$ 严格正, ξ 没有零分量, 从而 Δ 是可逆的。设

$$G = \Delta^{-1} R^T \Delta, G^0 = (I - G) e, \eta = \xi G$$

定理1.4.1 (Sengupta) 形如式(1.4.1)的分布是 m 阶离散 PH 分布, 有 PH 表示 (η, G) 。

证明 由定义 G 是非负阵。注意到

$$G^0 = \Delta^{-1} \Delta (e - G e) = \Delta^{-1} (\xi^T - R^T \Delta e) = \Delta^{-1} \Delta (I - R^T) \xi^T = \Delta^{-1} (I - R^T) [\pi_0 (I - R)^{-1}]^T = \Delta^{-1} \pi_0^T$$

于是, G^0 是非负列向量。因 $G e + G^0 = e$, G 是子随机阵。现在, 分布(1.4.1)可写成

$$P\{X=k\} = \pi_0 R^k e = (\pi_0 \Delta^{-1}) (\Delta R^k \Delta^{-1}) (\Delta e)$$

$$= (G^0)^T (G^k)^T \xi^T = (\xi G^k G^0)^T \text{ (实数转置)}$$

$$= \xi G^k G^0 = \eta G^{k-1} G^0, k \geq 1$$

因为 $\xi e = \pi_0 (I - R)^{-1} e = 1$, G 是子随机阵, 于是

$$\eta e = \xi G e \leq \xi e = 1. \text{ 现在}$$

$$\begin{aligned} P\{X=0\} &= \pi_0 e = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=k\} \\ &= 1 - \eta (I - G) (I - G)^{-1} e = 1 - \eta e = \eta_{m+1} \end{aligned}$$

这样一来, 分布(1.4.1)可以写成

$$P\{X=k\} = \begin{cases} \eta_{m+1}, k=0 \\ \eta G^{k-1} G^0, k \geq 1 \end{cases} \quad (1.4.2)$$

并且 (η, G) 是真正的离散 PH 表示。

设 (X, J) 的联合分布可表为形如式(1.3.6)的矩阵几何形式, 即

$$\pi_{kj} = P\{X=k, J=j\}, k \geq 0, 1 \leq j \leq m, m \geq 2$$

$$\pi_k = (\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{km}), k \geq 0$$

$$\pi_k = \beta R^k, k \geq 0$$

其中 $\pi_0 = \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 。并设矩阵 R 有分块上三角形式

$$R = \begin{pmatrix} H & \eta \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

其中, H 是 $m-1$ 阶方阵, r 是正实数, η 是 $m-1$ 维列向量。因为 $\text{sp}(R) < 1$, 可知 $\text{sp}(H) < 1$, 并且 $0 < r < 1$ 。现在引入条件随机变量。

$$X^{(m)} = \{X | J=m\} \quad (1.4.4)$$

定理1.4.2 若 R 形如(1.4.3), 则条件随机变量 $X^{(m)}$ 可分解成两个独立随机变量之和 $X^{(m)} = X_0 + X_d$, X_0 服从参数 r 的几何分布, X_d 服从 $m-1$ 阶离散 PH 分布, 有 PGF

$$X_d(z) = \frac{1}{\sigma} \{ \beta_m + z(\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) (I - zH)^{-1} \eta \} \quad (1.4.5)$$

常数 σ 可表为

$$\sigma = \beta_m + (\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) (I - H)^{-1} \eta$$

证明 由 R 的分块三角结构, 有

$$R^k = \begin{bmatrix} H^k & \sum_{i=0}^{k-1} r^i H^{k-1-i} \eta \\ 0 & r^k \end{bmatrix}, k \geq 1$$

代入矩阵几何分布表达式并进行矩阵运算, 给出 π_k 的第 m 个分量

$$\pi_{km} = \beta_m r^k + (\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) \sum_{i=0}^{k-1} r^i H^{k-1-i} \eta, k \geq 0 \quad (1.4.6)$$

式中 $k=0$ 时约定空和为零。由此可计算条件事件的概率

$$\begin{aligned} P\{J=m\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{km} \\ &= \beta_m \frac{1}{1-r} + (\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) (1-r)^{-1} (I - H)^{-1} \eta \\ &= \frac{1}{1-r} \{ \beta_m + (\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) (I - H)^{-1} \eta \} \\ &= \frac{\sigma}{1-r} \end{aligned}$$

条件随机变量 $X^{(m)}$ 的分布可写成

$$P\{X^{(m)}=k\} = P\{X=k | J=m\} = \frac{1-r}{\sigma} \pi_{km}, k \geq 0 \quad (1.4.7)$$

对式(1.4.7)取 PGF, 并应用式(1.4.6), 我们有

$$\begin{aligned} X^{(m)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{X^{(m)}=k\} \\ &= \frac{1-r}{\sigma} \left\{ \frac{\beta_m}{1-zr} + z(\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) \frac{1}{1-zr} (I - zH)^{-1} \eta \right\} \\ &= \frac{1-r}{1-zr} \frac{1}{\sigma} \{ \beta_m + z(\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) (I - zH)^{-1} \eta \} \\ &= X_0(z) X_d(z) \end{aligned}$$

展开 X_d 的 PGF, 可知 X_d 服从 $m-1$ 阶矩阵几何解的边缘分

布,由定理1.4.1,它服从一个 $m-1$ 阶离散 PH 分布。

如果 R 具有下列分块下三角形式:

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ \xi & H \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

我们可证明类似的结论。

定理1.4.3 若 R 形如(1.4.8),条件随机变量 $X^{(0)} = \{X | J=1\}$ 可分解为两个独立随机变量之和 $X^{(0)} = X_0 + X_d$, X_0 服从参数 r 的几何分布, X_d 服从 $m-1$ 阶离散 PH 分布,有 PGF

$$X_d(z) = \frac{1}{\sigma} \{\beta_1 + z(\beta_2, \dots, \beta_m)(I - zH)^{-1}\xi\} \quad (1.4.9)$$

其中 $\sigma = \beta_1 + (\beta_2, \dots, \beta_m)(I - H)^{-1}\xi$

2. 多 Agent 的排队系统

2.1 多 Agent 的 M/PH/1 排队

考虑 Agent 的 M/PH/1 排队系统,以后简称为 M/PH/1 队列系统。到达遵循强度 λ 的 Poisson 过程,Agent 顾客服务时间有 m 阶 PH 表示 (β, S) ,约定 $\beta_{m+1} = 0$,即服务时间不以正概率取零值。记

$$\mu^{-1} = -\beta S^{-1}e, f(s) = \beta(sI - S)^{-1}S^0$$

到达间隔与服务时间相互独立,服从 FCFS 排队规则。以 $L(t)$ 表示时刻系统中 Agent 顾客数, $J(t)$ 表示时刻 t 的服务位相。 $\{L(t), J(t)\}$ 是 QBD 过程,有状态空间

$$\Omega = \{0\} \cup \{(k, j) : k \geq 1, 1 \leq j \leq m\}$$

状态0表示系统内无 Agent 顾客。过程的无穷小生成元是

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda\beta & & & \\ S^0 & -\lambda I + S & \lambda I & & \\ & S^0\beta & -\lambda I + S & \lambda I & \\ & & S^0\beta & -\lambda I + S & \lambda I \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

定理2.1.1 矩阵 $\lambda I - S - \lambda e\beta$ 可逆,并且其逆为正阵。

证明 我们有

$$\lambda I - S - \lambda e\beta = [I - \lambda e\beta(\lambda I - S)^{-1}](\lambda I - S) \quad (2.1.1)$$

因 $\lambda I - S$ 可逆,只需再证方括号中矩阵可逆。注意到 $0 < 1 - f(\lambda) = \lambda\beta(\lambda I - S)^{-1}e < 1$

则有

$$[\lambda e\beta(\lambda I - S)^{-1}]^n = (1 - f(\lambda))^{n-1} \lambda e\beta(\lambda I - S)^{-1} \rightarrow 0,$$

$n \rightarrow \infty$

于是

$$\begin{aligned} [I - \lambda e\beta(\lambda I - S)^{-1}]^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda e\beta(\lambda I - S)^{-1}]^n \\ &= I + \frac{\lambda}{f(\lambda)} e\beta(\lambda I - S)^{-1} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

对式(2.1.1)求逆,并应用式(2.1.2),我们得到

$$\begin{aligned} [\lambda I - S - \lambda e\beta]^{-1} &= (\lambda I - S)^{-1} [I + \frac{\lambda}{f(\lambda)} e\beta(\lambda I - S)^{-1}] \\ &= (\lambda I - S)^{-1} + \frac{\lambda}{f(\lambda)} (\lambda I - S)^{-1} e\beta(\lambda I - S)^{-1} \end{aligned}$$

由 Neuts(1981)中推论2.2.2, $(\lambda I - S)^{-1}e$ 和 $\beta(\lambda I - S)^{-1}$ 都是正向量,因此,上述逆阵严格正。

定理2.1.2 矩阵方程

$$R^2 S^0 \beta + R(-\lambda I + S) + \lambda I = 0 \quad (2.1.3)$$

的解 R 满足 $RS^0 = \lambda e$, 并有最小非负解

$$R = \lambda(\lambda I - S - \lambda e\beta)^{-1} \quad (2.1.4)$$

证明:用 e 右乘方程(2.1.3)两端,注意到 $Se = -S^0$,得

$$R^2 S^0 - \lambda Re - RS^0 + \lambda e = 0$$

$$(I - R)(\lambda e - RS^0) = 0$$

$I - R$ 可逆,因此 $RS^0 = \lambda e$ 。这将关系式代入方程(2.1.3),给出

$$R(\lambda I - S - \lambda e\beta) = \lambda I$$

由定理2.1.1得到(2.1.4)。

可以证明,(2.1.4)是(2.1.3)的最小正解,并且 $\text{sp}(R) < 1$ 当且仅当 $\rho = \lambda\mu^{-1} < 1$,进一步地,系统正常返当且仅当 $\rho < 1$ 。

定理2.1.3 $\rho < 1$ 时,过程的稳态分布可表为

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 - \rho \\ \pi_k &= (1 - \rho)\beta R^k, k \geq 1 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

证明:使用矩阵几何解表示,我们有

$$\begin{aligned} \pi_k &= \pi_1 R^{k-1}, k \geq 2, \\ \text{并且 } \pi_0, \pi_1 \text{ 满足} \\ \begin{cases} -\lambda\pi_0 + \pi_1 S^0 = 0 \\ \lambda\pi_0\beta + \pi_1(RS^0\beta - \lambda I + S) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

将关系式 $RS^0 = \lambda e$ 代入(2.1.6)后式,得到 $\pi_1 = \pi_0\beta R$ 。只需再证 $\pi_0 = 1 - \rho$ 。

由正规条件我们有 $\pi_0 + \pi_0\beta R(I - R)^{-1}e = 1$ 。

将 R 代入,导致 $\pi_0 + \lambda\pi_0\beta(S + \lambda e\beta)^{-1}e = 1$ 。式中的逆可计算如下:

$$\begin{aligned} (\lambda e\beta + S)^{-1} &= S^{-1}(1 + \lambda e\beta S^{-1})^{-1} = S^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n e\beta S^{-n} \\ &= S^{-1} \{I - \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j e\beta S^{-j}\} = S^{-1} \{I - \lambda \\ &\quad (1 - \rho)^{-1} e\beta S^{-1}\} \end{aligned}$$

这一结果代入前式,我们有

$$\begin{aligned} \pi_0 - \lambda\pi_0\beta S^{-1}e + \lambda^2\pi_0(1 - \rho)^{-1}\beta S^{-1}e\beta S^{-1}e &= \pi_0 + \rho\pi_0 + \pi_0 \\ (1 - \rho)^{-1}\rho^2 &= \pi_0(1 - \rho)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

定理2.1.4 $\rho < 1$ 时, M/PH/1 排队系统中稳态 Agent 顾客数 L 服从 m 阶离散 PH 分布。

证明:由(2.1.5), L 的分布是

$$P\{L=k\} = \begin{cases} 1 - \rho, & k=0 \\ (1 - \rho)\beta R^k e, & k \geq 1 \end{cases} \quad (2.1.7)$$

再由 Sengupta 定理1.4.1,作为矩阵几何解的边缘分布, L 服从离散 PH 分布,并可仿照定理1.4.1构造 L 的 PH 表示。

定理2.1.5 $\rho < 1$ 时, M/PH/1 排队系统稳态等待时间 W 服从 m 阶 PH 分布,有 PH 表示 (r, L) 。其中

$$r = \rho\pi^*, L = S + \rho S^0\pi^* \quad (2.1.8)$$

π^* 是生成元 $S^* = S + S^0\beta$ 的平稳概率向量。

证明:从 M/G/1 排队中著名的 Pollaczek-Khinchine 公式出发,可给出一个简单的证明。以 $f(s)$ 表示的 LST,则

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1 - \rho)s}{s - \lambda + \lambda f(s)} = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \left(\frac{\mu(1 - f(s))}{s} \right)^k \quad (2.1.9)$$

PH 表示 (r, L) 服务时间的 LST,则

$$\begin{aligned} \tilde{W}(s) &= 1 - \rho + \rho\pi^* (sI - S - \rho S^0\pi^*)^{-1} (1 - \rho) S^0 \\ &= 1 - \rho + (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \pi^* [\rho(sI - S)^{-1} S^0 \pi^*]^k (sI - S)^{-1} S^0 \\ &= 1 - \rho + (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} [\pi^* (sI - S)^{-1} S^0]^k \\ &= (1 - \rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j [\pi^* (sI - S)^{-1} S^0]^j \end{aligned}$$

与(2.1.9)比较,应用剩余寿命的 PH 表示给出结论。

系统中 Agent 顾客数和等待时间的均值是

$$\begin{aligned} E(L) &= (1 - \rho)\beta R(I - R)^{-2}e \\ E(W) &= \frac{\rho}{1 - \rho} \pi^* (-S^{-1})e \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

正如我们看到的, M/PH/1 排队系统中 Agent 顾客数、等待时间等指标,仍然服从 PH 分布,分布和均值的求解都转化

为简单的矩阵运算。

2.2 多 Agent PH/M/c 排队

在 Agent PH/M/c 排队系统中, Agent 顾客的到达形成一个 PH 更新过程, 到达间隔有 m 阶 PH 表示 (α, T) , 设 $a e = 1, \lambda^{-1} = -\alpha T^{-1} e$ 。每一个服务台上的服务率都是 μ , 服务时间

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} T & T^0 \alpha & & & & \\ \mu I & -\mu I + T & T^0 \alpha & & & \\ & 2\mu I & -2\mu I + T & T^0 \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c\mu I & -c\mu I + T & T^0 \alpha \\ & & & & c\mu I & -c\mu I + T & T^0 \alpha \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

以 R 表示矩阵方程

$$c\mu R^2 + R(T - c\mu I) + T^0 \alpha = 0 \quad (2.2.1)$$

的最小非负解。回顾在经典 GI/M/c 排队的分析中, 稳态分布的表示需用到方程

$$z = \tilde{A}[c\mu(1-z)]$$

在 $(0, 1)$ 内的根 $z = \xi$, 其中 $\tilde{A}(s)$ 是到达间隔分布的 LST。这里 ξ 也只在罕见的情况可封闭地表出, 在多数具体模型中只能采用数值方法逼近。

以向量 e 右乘方程 (2.2.1) 两端, 容易导致 $c\mu R e = T^0$, 以 π^* 表示生成元 $T^* = T + T^0 \alpha$ 的平稳概率向量, 满足 $\pi^* T^* = 0$ 和 $\pi^* e = 1$ 。由定理 1.3.3, $\rho(R) < 1$ 当且仅当

$$c\mu \pi^* e = c\mu > \pi^* T^0 \alpha e = \pi^* T^0 = \lambda$$

正是经典 GI/M/c 排队正常返的充要条件 $\rho = \lambda(c\mu)^{-1} < 1$ 。当系统达到稳定状态时, 记

$$\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t) = k, J(t) = j\}, k \geq 0, 1 \leq j \leq m$$

$$\pi_k = (\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{km}), k \geq 0$$

定理 2.2.1 $\rho < 1$ 时, 过程的稳态分布可表为

$$\pi_k = \pi_{c-1} R^{k-c+1}, k \geq c-1 \quad (2.2.2)$$

$\pi_0, \dots, \pi_{c-1}$ 可如下递推地计算:

$$\begin{cases} \pi_0 = -\mu \pi_1 T^{-1} \\ \pi_k = (k+1) \mu \pi_{k+1} (k\mu I - T - k\mu e \alpha)^{-1}, 1 \leq k \leq c-2 \\ \pi_{c-1} [(c-1)\mu I - T - (c-1)\mu e \alpha - c\mu R] = 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

证明: 由定理 1.3.2 中的矩阵几何解表示给出 (2.2.2)。方程组 (1.3.9) 可写成

$$\begin{cases} \pi_0 T + \mu \pi_1 = 0 \\ \pi_{k-1} T^0 \alpha + \pi_k (T - k\mu I) + (k+1) \mu \pi_{k+1} = 0, 1 \leq k \leq c-2 \\ \pi_{c-2} T^0 \alpha + \pi_{c-1} [T - (c-1)\mu I + c\mu R] = 0 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

用 e 右乘 (2.2.4) 中每个方程的两端, 给出

$$\pi_{k-1} T^0 = k\mu \pi_{k+1} e, 1 \leq k \leq c-1$$

因此, 在 (2.2.4) 中可用 $k\mu \pi_{k+1} e \alpha$ 取代 $\pi_{k-1} T^0 \alpha$ 。注意到相应矩阵的可逆性, 得到 (2.2.3)。在 (2.2.3) 后式方括号内的矩阵是一个 m 阶非周期, 不可约生成元。可选取 π_{c-1} 是该生成元的平稳概率向量与任何正数 K 之积。再由 π_{c-1} 出发, 按 (2.2.3) 给出每一个 $\pi_0, \dots, \pi_{c-2}$ 。最后, 使用正规化条件确定常数 K 。

系统中稳态 Agent 顾客数 L 的分布可由 $\{\pi_k e, k \geq 0\}$ 给出。现在, 考虑系统中排队等待 Agent 顾客数 L_q , 首先

$$P\{L_q = 0\} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k e = 1 - \sum_{k=c-1}^{\infty} \pi_k e = 1 - \pi_{c-1} R^2 (I - R)^{-1} e = 1 - \pi_c R (I - R)^{-1} e$$

其次, 对 $j \geq 1$, 我们有

$$P\{L_q = j\} = \pi_{c+j} e = \pi_c R^j e, j \geq 1 \quad (2.2.5)$$

这表明 L_q 服从一个矩阵几何解的边缘分布, 由 Sengupta 定理 1.4.1, 我们立即得到

服从参数 μ 的指数分布, 现在 $J(t)$ 表示时刻 t 到达过程所处的位相, $\{L(t), J(t)\}$ 是一个 QBD 过程, 有状态空间

$$\Omega = \{(k, j); k \geq 0, 1 \leq j \leq m\}$$

过程的无穷小生成元是

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} T & T^0 \alpha & & & & \\ \mu I & -\mu I + T & T^0 \alpha & & & \\ & 2\mu I & -2\mu I + T & T^0 \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c\mu I & -c\mu I + T & T^0 \alpha \\ & & & & c\mu I & -c\mu I + T & T^0 \alpha \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

定理 2.2.2 $\rho < 1$ 时, 稳态下系统中排队 Agent 顾客数 L_q 的分布是

$$P\{L_q = j\} = \begin{cases} 1 - \pi_c R (I - R)^{-1} e, & j = 0 \\ \pi_c R^j e, & j \geq 1 \end{cases}$$

因此, L_q 服从 m 阶离散 PH 分布。

以 W 表示稳态下任意时刻到达 Agent 顾客的等待时间, 通常称为虚等待时间。对此, 我们有

定理 2.2.3 $\rho < 1$ 时, 虚等待时间的分布函数是

$$W(x) = 1 - \pi_c (I - R)^{-1} \exp[-c\mu(I - R)x] e, x \geq 0 \quad (2.2.6)$$

证明: 首先, 不需等待的概率是

$$P\{W = 0\} = \sum_{k=0}^{c-1} \pi_k e = 1 - \sum_{k=c}^{\infty} \pi_k e = 1 - \pi_c (I - R)^{-1} e$$

Agent 顾客到达遇状态 (k, j) , $k \geq c, 1 \leq j \leq m$, 其条件等待时间服从参数 $k - c + 1$ 和 $c\mu$ 的 Erlang 分布。有条件概率密度

$$f_k(x) = \frac{c\mu(c\mu x)^{k-c}}{(k-c)!} e^{-c\mu x}, k \geq c, x > 0$$

虚等待时间 W 的分布是:

$$\begin{aligned} W(x) &= P\{W = 0\} + P\{0 < W \leq x\} \\ &= 1 - \pi_c (I - R)^{-1} e + \sum_{k=c}^{\infty} \pi_{k-c+1} R^{k-c+1} \int_0^x \frac{c\mu [c\mu t]^{k-c}}{(k-c)!} e^{-c\mu t} dt \\ &= 1 - \pi_c (I - R)^{-1} e + \pi_{c-1} R \int_0^x \exp[-c\mu(I - R)t] c\mu dt \\ &= 1 - \pi_c (I - R)^{-1} e + \pi_c (I - R)^{-1} \times \{1 - \exp[-c\mu(I - R)x]\} e \\ &= 1 - \pi_c (I - R)^{-1} \exp[-c\mu(I - R)x] e, x \geq 0 \end{aligned}$$

系统中平均排队等待 Agent 顾客数和平均等待时间是

$$E(L_q) = \pi_{c-1} R (I - R)^{-2} e, \quad E(W) = \frac{1}{c\mu} \pi_{c-1} R (I - R)^{-2} e \quad (2.2.7)$$

小结 综上所述, 本文给出于多 Agent 系统排队模型的基本概念及相关理论, 鉴于篇幅所限, 其它内容另文给出。

参考文献

- 1 Pirk A, Gans M. Donmain-Dependnt information gathering agent. Expert systems with Applications, 2002, 23(3): 207~218
- 2 Mali A D. on the evatution of agent behaviors. Artificial Intelligence, 2003, 143 (1): 1~17
- 3 Jennings N R. on agent-based Software engineering. Artificial Intelligence, 2000, 117(2): 277~296
- 4 Tesfatsion L. Agent-based Computational economics: Modeling economies as complex adaptive system. Information Science, 2003, 149(4): 262~268
- 5 李凡长. 多 Agent 系统的组合设计模型研究. 小型微型计算机系统, 2002, 23(2)
- 6 田乃硕, 岳德权. 拟生灭过程与矩阵几何解. 科学出版社, 2002
- 7 Neuts M. Probability distributions of phase type. In Liber Amicorum Prof. Depar. Of Math., Belgium: Univ. of Louvain, 1975. 173~206
- 8 Neuts M. Matrin-analytic methods in queueing theory. Advance in Queueing, Edited by Dshalaw, CRC Press, 1985. 265~292